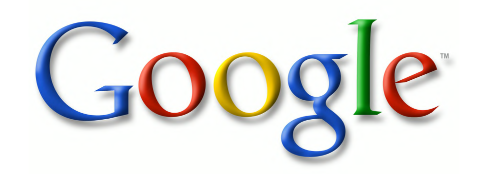
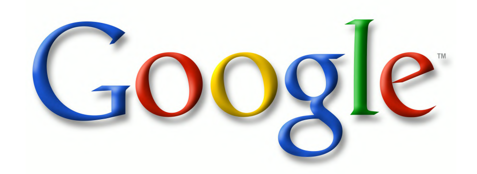
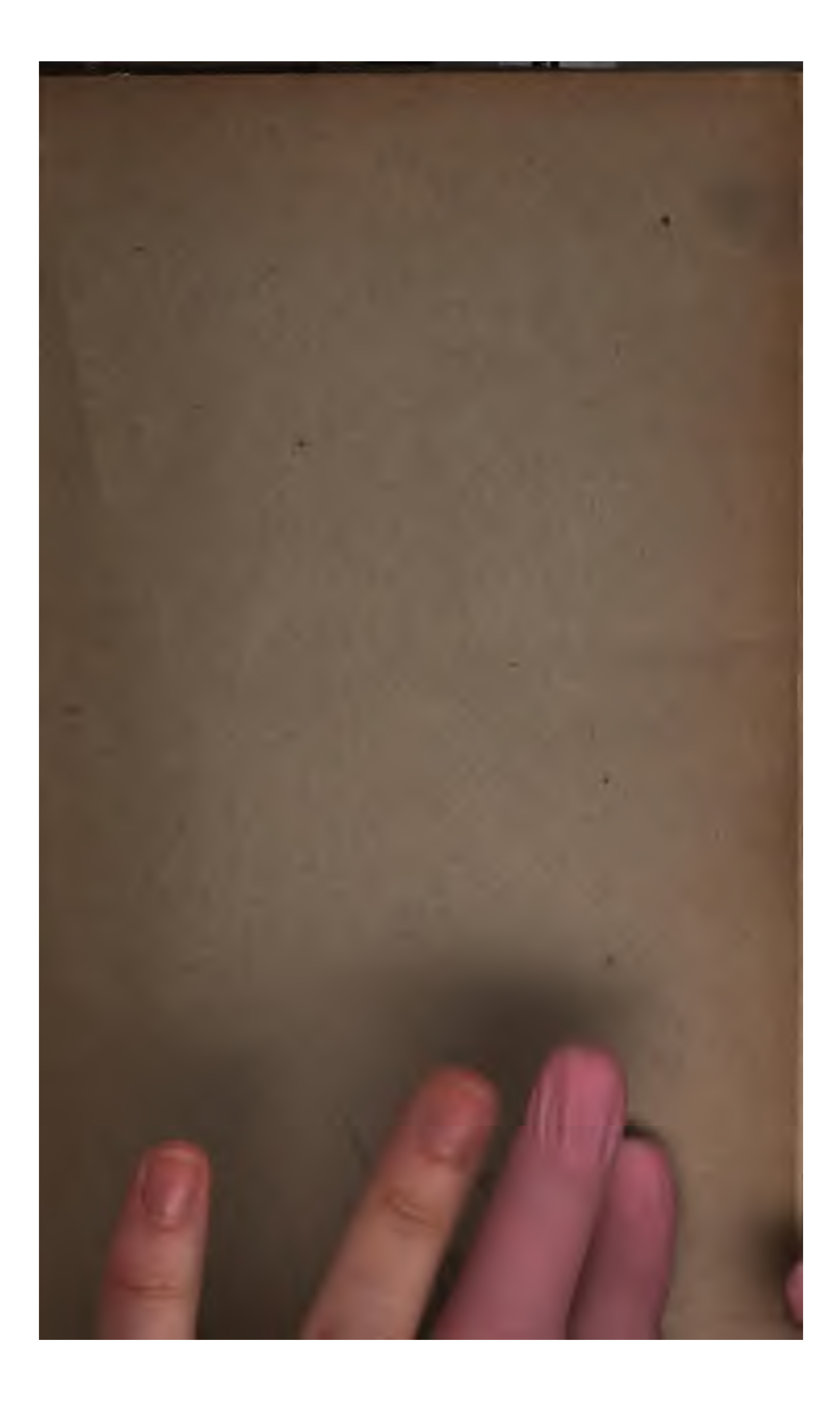
























Mathematics

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

im Verein mit anderen Mathematikern

und unter besonderer Mitwirkung der Herren

Felix Müller und **Albert Wangerin**

herausgegeben

von

Carl Ohrtmann.

Dreizehnter Band.

Jahrgang 1881.

Berlin.

Druck und Verlag von G. Reimer.

1883.

Astr. Viertschr.: Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von E. Schoenfeld in Bonn, A. Winnecke in Strassburg i. E. Leipzig. W. Engelmann. 8°.

Bair. Bl.: Blätter für das bairische Gymnasial- und Realschulwesen, redigirt von W. Bauer und A. Kurz. München. 8°.

Batt. G.: Giornale matematico ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8°.

Belg. Ann.: Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez.

Belg. Ann.: Annales de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles.

Belg. Bull.: Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°.

Belg. Mém. C.: Mémoires couronnés de l'Académie Royale de Belgique. Bruxelles. 4°.

Belg. M. N.: Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. Bruxelles. 4°.

Berl. Abh.: Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Monatsber.: Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°.

Bibl. un.: Bibliothèque universelle et revue suisse. Archives des sciences physiques et naturelles. Lausanne. Bridel.

Bologna Mem.: Memorie dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°.

Bologna Rend.: Rendiconti dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna.

Bonc. Bull.: Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4°.

Bord. Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles à Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°.

Brioschi Ann.: Annali di matematica pura ed applicata diretti da F. Brioschi e L. Cremona in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal Prof. Tortolini. Milano. 4°.

Brit. Ass. Rep.: Reports of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°

Brux. Ann.: Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles, publieés aux frais de l'État. Bruxelles. F. Hayez. 4°.

Brux. S. sc.: Annales de la société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B.).

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge.

Cambr. Trans.: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge.

Carl Rep.: Repertorium für Experimental-Physik, herausgegeben von Ph. Carl. München. gr. 8°.

Cas: Casopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch).

f. Forstw.: Centralblatt für das gesammte Forstwesen.

Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu der der Band gehört.

Almeida J.: Journal de physique théorique et appliquée, publié par J. Ch. d'Almeida. Paris. 8°.

Am. Ass.: Proceedings of the American Association for the advancement of sciences.

Am. J. Sc.: American Journal of sciences and arts.

Amst. Jaarb.: Jaarboek van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.

Amst., Verh.: Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.

Amst., Versl. en Meded.: Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam.

Anal.: The Analyst, a monthly journal of pure and applied mathematics. Edited and published by J. E. Hendricks. Des Moines, Jowa. gr. 8°.

Andresen Tekn. Foren. Tidsskr.: Den tekniske Forenings Tidsskrift udgivet af A. Andresen. Kopenhagen.

Ann. d. Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Chevreul, Dumas etc. Paris. Masson. 8°.

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées sous les auspices du Ministre de l'instruction publique par M. Le Pasteur. Paris. Gauthier-Villars. 4°.

Ann. d. Mines: Annales des Mines ou Recueil de mémoires sur l'exploitation des mines et sur les sciences et les arts qui s'y rapportent, rédigées par les Ingénieurs des Mines et publiées sous l'autorisation du Ministre des travaux publics. Paris. 8°.

Ann. d. P. et Ch.: Annales des ponts et des chaussées. Mémoires et documents relatifs à l'art de construction et en service de l'ingénieur. Paris. 8°.

Arch. f. Art.: Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Officiere des Deutschen Reichsheeres.

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona. 4°.

Astr. Viertschr.: Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von E. Schoenfeld in Bonn, A. Winnecke in Strassburg i. E. Leipzig. W. Engelmann. 8°.

Bair. Bl.: Blätter für das bairische Gymnasial- und Realschulwesen, redigirt von W. Bauer und A. Kurz. München. 8°.

Batt. G.: Giornale matematico ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8°.

Belg. Ann.: Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez.

Belg. Ann.: Annales de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles.

Belg. Bull.: Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°.

Belg. Mém. C.: Mémoires couronnés de l'Académie Royale de Belgique. Bruxelles. 4°.

Belg. M. N.: Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. Bruxelles. 4°.

Berl. Abh.: Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Monatsber.: Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°.

Bibl. un.: Bibliothèque universelle et revue suisse. Archives des sciences physiques et naturelles. Lausanne. Bridel.

Bologna Mem.: Memorie dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°.

Bologna Rend.: Rendiconti dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna.

Bonc. Bull.: Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4°.

Bord. Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles à Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°.

Brioschi Ann.: Annali di matematica pura ed applicata diretti da F. Brioschi e L. Cremona in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal Prof. Tortolini. Milano. 4°.

Brit. Ass. Rep.: Reports of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°

Brux. Ann.: Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles, publieés aux frais de l'État. Bruxelles. F. Hayez. 4°.

Brux. S. sc.: Annales de la société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B.).

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge.

Cambr. Trans.: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge.

Carl Rep.: Repertorium für Experimental-Physik, herausgegeben von Ph. Carl. München. gr. 8°.

Cas.: Casopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch).

Centr. f. Forstw.: Centralblatt für das gesammte Forstwesen.

Chelini, Coll. Math.: In memoriam Dominici Chelini. Collectanea mathematica nunc primum edita cura et studio di Cremona e E. Beltrami. Mediolani. Höpli. 8°.

Christiania Forh.: Forhandlingar i Videnskabs-Selskabet i Christiania. 8°.

Christ. G. d. W.: Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania. Christiania.

Civiling.: Der Civilingenieur. Herausgegeben von K. H. Bornemann.

Conn. d. temps: Connaissance des temps ou des mouvements célestes. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

Conn. Trans.: Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. New-Haven.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°.

Cron. cient.: Cronica cientifica revista international de ciencias, fundador proprietario y director D. Rafael Roig y Torres. Barcelona. 8°.

Darb. Bull.: Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, rédigé par MM. G. Darboux et J. Hoüel avec la collaboration des MM. André, Lespiault, Painvin et Radau, sous la direction de la Commission des Hautes Études. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

Dublin Trans.: Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin.

Edinb. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°.

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°.

Ed. Times: Mathematical questions, with their solutions from the „Educational Times“ with many papers and solutions not published in the „Educational Times.“ Edited by W. J. C. Miller. London. 8°. C. F. Hodgson and Son.

Electrot. Z.: Zeitschrift des elektro-technischen Vereins.

Erlang. Ber.: Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Erlangen. 8°.

Franc. Ass.: Association Française pour l'avancement des sciences naturelles.

Gött. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4°.

Gött. Anz.: Göttingische gelehrte Anzeigen. Unter der Aufsicht der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 12°.

Gött. N.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen. Göttingen. 12°.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft. Hamburg. 8°.

Helsingf. Afh.: Akademiens Afhandlingar Helsingfors.

Herm.: Hermathena, a series of papers on literature, science and philosophy, by members of Trinity College. Dublin. Ponsonby. 8°.

Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. Teubner. 8°.

Hoppe Arch.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig. C. A. Koch. 8°.

J. d. class. Ph.: Journal der classischen Philologie.

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris. Gauthier-Villars. 4⁰.

J. Hopkins circ.: Johns Hopkins University Circulars.

Jordan, Z. f. V.: Zeitschrift für Vermessungskunde, herausgegeben von W. Jordan.

Kjob. Skrift.: Schriften der Kopenhagener Akademie. Kopenhagen.

Klein Ann.: Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, K. v. d. Mühll gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. Leipzig. Teubner. 8⁰.

Königsb. Schr.: Schriften der ökonomisch-physikalischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Königsberg i. Pr. 4⁰.

Kopenh. Overs.: Oversigt over Videnskabs Selskabet Forhandlingar. Kopenhagen.

Krak. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Krakauer Akademie. Krakau. (Polnisch.)

Krak. Denkschr.: Denkschriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.)

Kronecker J.: Journal für reine und angewandte Mathematik. In zwanglosen Heften. Herausgegeben von L. Kronecker und K. Weierstrass mit tätiger Beförderung hoher Königl. Preussischer Behörden. Fortsetzung des von A. L. Crelle (1826-1856) und C. W. Borchardt (1856-1880) herausgegebenen Journals. Berlin. G. Reimer. 4⁰.

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig.

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig.

Leopold.: Abhandlungen der Leopoldinischen Akademie. Halle a. S.

Lie Arch.: Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Christiania. 8⁰.

Liège Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège. Liège.

Lisb. J.: Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturales publicados sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lisb. Mem.: Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lomb. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8⁰.

Lond. M. S., Proc.: Proceedings of the London mathematical Society. London. 8⁰.

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4⁰.

Lond. R. S., Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8⁰.

Lund Act.: Acta universitatis Lundensis. Lund.

Lund Afh.: Lunds Akademiens Afhandlingar. Lund.

Lund Arsskr.: Lunds Universitets Årsskrift. Lund.

Manch. Proc.: Proceedings of the litterary and philosophical Society of Manchester. Manchester.

Marb. Ber.: Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. Marburg. 8⁰.

Math.: Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissement d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand. Host. Paris. Gauthier-Villars. 8⁰.

Mem. R. Astr. S.: Memoirs of the Royal Astronomical Society. London. 4⁰.

Mess.: The Messenger of mathematics, edited by M. Allen Whitworth, C. Taylor, R. Pendlebury, J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan. 8⁰.

Modena Mem.: Memorie della Accademia Reale di Modena. Modena.

Mondes: Les Mondes, revue hebdomadaire des sciences et de leur application aux arts et à l'industrie par l'Abbé Moigno. Paris. 8⁰.

Monthl. Not.: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London. 4⁰.

Mosk. Nachr.: Nachrichten der Moskauer Universität. Moskau. (Russisch).

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bairischen Gesellschaft der Wissenschaften zu München. Zweite Classe. München.

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8⁰.

Nap. Rend.: Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. Napoli. 4⁰.

Néerl. Arch.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences á Harlem. La Haye. 8⁰.

Nieuw Arch.: Nieuw Archief voor wiskunde. Amsterdam. 8⁰.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux écoles Polytechnique et Normale, rédigé par MM. Gerono et Ch. Brisse. Paris. 8⁰.

Nouv. Corr.: Nouvelle correspondance de mathématiques, publiée par E. Catalan et P. Mansion. Mons. Manceaux. Paris. Gauthier-Villars. 8⁰.

Observatory: The Observatory, a monthly review of astronomy. Edited by W. N. M. Christie. M. A. London.

Odessa Nachr.: Nachrichten von der Universität Odessa. Odessa.

Padova Atti: Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Padova.

Par. Denkschr.: Denkschriften der Pariser Gesellschaft der exacten Wissenschaften. Paris. 4⁰. (Polnisch).

Paris Mém. prés.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France. Paris.

Paris Soc. Phil.: Bulletin de la Société Philomatique de Paris. Paris. 8⁰.

Petersb. Abh.: Abhandlungen der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. Petersburg. (Russisch).

Pétersb. Bull.: Bulletin de l'Académie impériale de St. Pétersbourg. Pétersbourg et Leipzig. Folio.

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and journal of science, by Brewster, Kane, Francis. London. 8⁰.

Prag. Abh.: Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. Selbstverlag der Königl. Böhmischen Gesellschaft. 4⁰.

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8⁰.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied mathematics. Edited by Sylvester and Ferrers. London. 8⁰.

Résal J.: Journal de mathématiques pures et appliquées fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville. Publié par H. Résal avec la collaboration de plusieurs savants. Paris. 4⁰.

Rev. d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15. de chaque mois. Paris.

Revue de l'instr. p.: Revue de l'instruction publique de Belgique. Gand. 8⁰.







Capitel 2. Theorie der Formen.

Dritter Abschnitt. Zahlentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Theorie der Formen.

Capitel 3. Kettenbrüche.

Vierter Abschnitt. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

Capitel 3. Integralrechnung.

Capitel 4. Bestimmte Integrale.

Capitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Capitel 7. Variationsrechnung.

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Functionen.

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1. Principien der Geometrie.

Capitel 2. Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

Capitel 3. Elementare Geometrie. (Planimetrie. Trigonometrie. Stereometrie.)

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Ebene Gebilde.

B. Räumliche Gebilde.

C. Abzählende Geometrie.

Seite

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Coordinaten.

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

B. Theorie der algebraischen Curven.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

D. Andere specielle Curven.

Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

D. Andere specielle Raumgebilde.

Capitel 4. Liniengeometrie. (Complexe, Strahlensysteme.)

Capitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

B. Conforme Abbildung.

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Kinematik.

Capitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

B. Hydrodynamik.

Capitel 5. Potentialtheorie.

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Capitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

Capitel 4. Wärmelehre.

Seite

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1. Geodäsie.

Seite

Capitel 2. Astronomie.

Anhang.

Berichtigungen.

Seite 77 Zeile 1 von oben lies „eines algebraischen“ statt „algebraischer“.
„ 82 „ 12 „ „ „ „xy“ statt „x''“.
„ 188 „ 5 „ „ „ „F. Franklin“ statt „J. Franklin“.
„ 221 „ 9 „ „ „ „XII“ statt „XIII.“.
„ 383 „ 6 „ unten „ „XII“ statt „XIII.“.
„ 720 „ 5 „ oben „ „XII.“ statt „XIII.“.

Verzeichnis

der Herren, welche für den dreizehnten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate).

A. Herr Prof. **August** in Berlin.
B. - Prof. **Bruns** in Leipzig.
Bjg. - Prof. **Björling** in Lund.
Bn. - Dr. **Biermann** in Berlin.
Cly. - Prof. **Cayley** in Cambridge.
Csy. - Prof. **Casey** in Dublin.
Dk. - Prof. **Dyck** in Leipzig.
Dn. - **Dickstein** in Warschau.
G. - Prof. v. **Geer** in Leiden.
Glr. - Prof. **Glaisher** in Cambridge.
Gm. - Dr. **Gram** in Kopenhagen.
Gr. - Prof. **Günther** in Ansbach.
H. - Prof. **Hoppe** in Berlin.
Hr. - Dr. **Hamburger** in Berlin.
H. St. - Prof **H. Stahl** in Aachen.
Hz. - Dr. **Hurwitz** in Göttingen.
Jn. - Prof. **W. Johnson** in Annapolis U. S.
L. - Prof. **Lie** in Christiania.
Ls. - **Lazarus** in Hamburg.
M. - Dr. **F. Müller** in Berlin.
Mi. - Dr. **Michaelis** in Berlin.
M-L. - Prof. **Mittag-Leffler** in Stockholm.
Mn. Herr Prof. **Mansion** in Gent.
My. - Dr. **F. Meyer** in Tübingen.
Mz - Dr. **Maynz** in Ludwigslust.
Nn. - Prof. **Neumann** in Leipzig.
No. - Prof. **Netto** in Berlin.
O. - Dr. **Ohrtmann** in Berlin.
Ok. - Prof. **Oberbeck** in Halle a. S.
Rg. - Prof. **Rodenberg** in Darmstadt.
Rs. - Dr. **Rosochatius** in Berlin.
Schg - Dr. **Schlegel** in Waren.
Schn. - Prof. **Schumann** in Berlin.
Scht. - Dr. **Schubert** in Hamburg.
Sn. - Dr. **Simon** in Berlin.
St. - Prof. **Stolz** in Innsbruck.
Std. - Prof. **Studnička** in Prag.
T. - Dr. **Toeplitz** in Breslau.
Tx. - Prof. **Teixeira** in Coimbra.
Ty. - **Tichomandritzky** in Petersburg.
V. - Prof. **Voss** in Dresden.
Wn. - Prof. **Wangerin** in Halle a. S.
W. St. - Prof. **W. Stahl** in Aachen.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:
Dr. C. Ohrtmann, Berlin SW, Markgrafenstr. 78. III.

Erster Abschnitt.

Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.

Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

J. S. Vaněček. Die Geometrie der alten Inder. Cas. X. 60, 127. (Böhmisch).

Die Arbeit beschäftigt sich mit Brahmagupta und Bhâskara Acârya unter Zugrundelegung der bekannten englischen Publicationen hierüber. Std.

G. J. Allman. Greek geometry from Thales to Euklid. Part. II. Dublin. Ponsonby and Weldrick.

Diese Fortsetzung einer in ihrem ersten Teile den Lesern des Jahrbuchs bereits bekannten Arbeit (s. F. d. M. IX. 1877. p. 21-22) beginnt mit den Philosophen der eleatischen Schule, deren Liebhaberei für Paradoxa, man denke nur an Zenon's Sophismen, immerhin auf die Methodik der Geometrie einen gewissen bereits von Clairaut anerkannten Einfluss ausgeübt hat. Der Schwerpunkt der hier behandelten Periode fällt dagegen in die Leistungen des Hippokrates von Chios, dessen Bestrebungen, den Kreis vermittelst der

bekannten und nach ihm benannten Monde zu quadriren, nach allen Seiten hin discutirt werden. Auch Demokrit wird als Mathematiker von Herrn Allman gründlicher gewürdigt, als dies von Seiten anderer Historiker geschehen ist, und zwar aus dem Grunde, weil er in dem Philosophen einen jener tieferen Denker erblickt, die einer bewussten Anwendung des Infinitesimalbegriffes den Weg bahnten. Auch mit dem Irrationalen scheint sich derselbe seit der pythagoräischen Zeit zuerst eingehender beschäftigt zu haben. Weiterhin ist von den Problemen die Rede, in welchen damals so ziemlich die ganze geometrische Forschung aufging: Kreisquadratur, Trisection des Winkels, Problem der zwei mittleren Proportionallinien. Auch hier ragt wieder Hippokrates hervor, und zwar, von seinen tatsächlichen Erfolgen abgesehen, zumal durch die consequente Anwendung der analytischen Methode. Diesem in der Tat bedeutenden Manne hat der Verfasser offenbar eine besondere Teilnahme gewidmet, und was er gegen Ende dieses Teiles in einzelnen denselben betreffenden Thesen zusammenstellt, wird Niemand unbeachtet lassen dürfen, der sich mit älterer griechischer Mathematik zu befassen gedenkt.

Gr.

J. L. Heiberg. Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii. Leipzig. Teubner. Vol. II., III.

Ueber Band I. dieses verdienstvollen Unternehmens, über die allgemeine Anlage desselben und über die dabei benutzten Hülfsmittel ist bereits berichtet worden. Band II. enthält das Buch von den Schneckenlinien, die zwei statischen Bücher, den Arenarius, die Quadratur der Parabel, welche sonst gewöhnlich zwischen das erste und zweite Buch vom Gleichgewicht der Figuren eingeschoben ward, und den Tractat von den schwimmenden Körpern. Damit ist der Kreis der unzweifelhaft ächten Schriften geschlossen, doch hat der Herausgeber auch alle vielleicht auf Archimedes zurückzuführenden Fragmente aufgenommen. So finden wir, und zwar mit sehr gelehrten mathematisch-historischen Einleitungen, die Lemmata (liber as-

sumptorum), das problema bovinum, ferner die bei alten Autoren hie und da zerstreuten Notizen über die *ἀρχαί*, das *ἐφόδιον* und das Buch „*περὶ ζυγῶν*." Endlich wird noch nach Theon, Olympiodor und Valla der von Archimedes angeblich für die Gleichheit von Incidenz- und Reflexionswinkel geführte Beweis, des Pappus gelegentliche Bemerkung über die Himmelskugel und die von Ptolemaeus und Ammianus Marcellinus überlieferte Nachricht von der hervorragenden Beteiligung des Archimedes bei der Bestimmung der Jahreslänge reproducirt. Das Vorwort giebt alle wünschenswerten bibliographischen Nachweise über die wissenschaftliche und antiquarische Bedeutung dieser Bruchstücke.

Die Vorrede zum III. Bande enthält zuvörderst einige Nachtragsbemerkungen zu den beiden früheren Bänden; mathematisch beachtenswert ist darunter die Wahrnehmung, dass ein arithmetischer Satz, dessen sich Archimedes in der Quadratur der Parabel bediente, schon im 9. Buche des Euklides bewiesen worden ist. Dann folgen umfängliche kritische Prolegomena, in welchen besonders die von den früheren Bearbeitern des Archimedes acceptirten Lesarten auf's Sorgfältigste geprüft werden; auch werden darin alle vorhandenen Codices, sowol die von Herrn Heiberg collationirten, als auch die nicht verglichenen, aufgezählt. Daran reiht sich des Eutokios Commentar zu gewissen Büchern des Archimedes (Kreismessung, Kugel und Cylinder, Statik), der bekanntlich für unsere Kenntnis vom griechischen Zahlenrechnen vom höchsten Werte, wenn auch nicht grade von grosser innerer Bedeutung ist. Zwei mit äusserstem Fleiss ausgearbeitete Indices beschliessen den Band.

Es ist so ein Werk vollendet, wie es seit langen Jahren von allen Seiten, doch ohne Hoffnung auf baldige Realisirung, erstrebt und gewünscht ward. Diese neue und im besten Sinne vollständige Archimedes-Ausgabe kommt somit einem wirklich gefühlten Bedürfnisse entgegen, und wenn auch die „deutsche Literaturzeitung" aus der Feder eines philologischen Recensenten einige Bemängelungen bringt, so hat uns doch grade diese Kritik in unserer festen Ueberzeugung noch bestärkt, dass das Werk auch den weitgehendsten vom Mathematiker und speciell

vom mathematischen Historiker zu stellenden Anforderungen genügt. Gr.

P. Tannery. Quelques fragments d'Apollonius de Perge. Darb. Bull. (2) V. 124-136.

Diese Note hat die Bestimmung, Alles zu sammeln, was bei alten Autoren gelegentlich von Apollonius und seinen wissenschaftlichen Leistungen ausgesagt wird. Sehr häufig finden wir solche Erwähnungen bei Proklos, und dieselben sind teilweise von grossem geschichtlichen Werte. So geht z. B. daraus hervor, dass in des Apollonius Buch von der Schraubenlinie gewiss die bekannte Eigenschaft dieser Curve nachgewiesen war, allenthalben das gleiche Krümmungsmass zu besitzen. Aus anderen Angaben des nämlichen Commentators ersehen wir, dass der grosse Geometer vergebliche Versuche gemacht hat, die euklidischen Axiome zum Teil zu beweisen, dass er eine besondere Construction senkrechter Geraden lehrte, dass er überhaupt die Elemente der Geometrie methodisch zu verbessern bestrebt war. Besonders bemerkenswert aber ist eine Notiz des Proklos, aus der hervorgeht, dass der Pergäer die geometrischen Gebilde nicht allein abstract definirt, sondern auch durch practische Beispiele erläutert wissen wollte; Linie sei z. B. die Grenze zwischen Licht und Schatten. Darauf hin spürt Herr Tannery ähnlich gefassten Definitionen nach, wie sie bei Heron, namentlich betreffs der körperlichen Winkel, mehrfach vorkommen, und vindicirt diese dem Apollonius. Dies soll natürlich nur hypothetisch geschehen, und anders wird es auch Niemand auffassen können; indessen ist durch diese neue Arbeit des französischen Forschers doch sicher soviel festgestellt, dass Apollonius sich auch lebhaft für Methodik und Didaktik der Geometrie interessirt haben muss.

Gr.

L. Majer. Proklos über die Definitionen bei Euklid. I. Definition 1-7. Pr. Stuttgart.

In einem Tübinger Gymnasialprogramm von 1875, dem Vorläufer des gegenwärtigen, hatte Herr Majer die Axiome und Grundforderungen des Proklos-Commentars behandelt; mit dieser Untersuchung wendet er sich zu den Definitionen. Er stellt zunächst fest, dass 35 solcher Definitionen vorhanden sind, und giebt uns sodann in sehr lesbarer deutscher Uebertragung den Text der Begleitworte des Proklos zu den ersten sieben Definitionen des Euklides. Dieselben beziehen sich auf den Punkt, die Linie schlechthin, den Punkt als Grenze der Linien, die gerade Linie, die Fläche, die Ebene als Specialfall der Fläche und auf die Linien als Grenzen der Flächen. Teils in Randnoten, teils in einem besonderen Schlussabschnitt werden endlich die Erklärungen des gelehrten Neuplatonikers kritisch und historisch eingehend erörtert. Besonders über gewisse höhere Curven (Cissoide, Torusschnitt, Hippopeda) wird das geschichtliche Material gründlich erschöpft; auch weist der Verfasser darauf hin, dass Proklos, indem er krumme Linien kinematisch erzeugte, bereits ein klares Verständnis vom Parallelogramm der Bewegungen, wenn auch nur für rechtwinklige Componenten, an den Tag legt. Allerdings haben Poselger und Rühlmann nachgewiesen, dass schon Aristoteles in seinen mechanischen Problemen mit diesem Princip wie mit einer längst bekannten Sache operirt. Gr.

J. L. Heiberg. Philologische Studien zu griechischen Mathematikern. I.-II. J. d. class. Ph. XI. Suppl. 357-399. Leipzig. Teubner.

Die erste Abteilung dieser Studien handelt von Eutokios, dem bekannten Commentator des Archimedes. Das Wenige, was man über die Lebensumstände des Mannes weiss, wird zusammengestellt. Es findet sich danach, dass seine Lebenszeit etwa in's Jahr 550 n. Chr. fällt. Sein Commentar erstreckt sich nicht auf sämmtliche archimedische Schriften. Die Quadratur der Parabel war ihm ganz unbekannt, und Herr Heiberg vermutet, dass er auch das Buch von den Schneckenlinien niemals gelesen habe. Ungleich höher in wissenschaftlicher Hinsicht steht des Eutokios

Commentar zu den vier ersten Büchern der *κωνικά* des Apollonios, welchen er nicht nach einer späteren Recension — beim Archimedes hielt er sich an die mangelhafte Ausgabe seines Lehrers Isidor — sondern nach einer Originalhandschrift bearbeitet zu haben scheint. Ein dritter eutokischer Commentar, jener zum Almagest des Ptolemaeus, ist nicht auf uns gekommen. Herr Heiberg stellt sodann noch das Verzeichnis jener griechischen mathematischen Werke zusammen, aus welchen Eutokios am häufigsten Stellen citirt. Es sind dies Euklid's Elemente, Euklid's Data und die Arbeiten verschiedener Geometer über das Problem der zwei mittleren Proportionallinien; von einigen anderen Autoren, welche er anführt, kennen wir nur die Namen und diese eben grossenteils nur durch ihn. Dagegen scheint es, dass die euklidischen *τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν* zur byzantinischen Zeit bereits verloren gegangen waren. Es folgen noch reichliche Emendationen, deren Beurteilung nicht Sache des Referenten sein kann.

Ebenso kann derselbe über die zweite Abteilung nur das mitteilen, dass in derselben der interessante Versuch gemacht wird, nach Möglichkeit den dorischen Urtext der beiden archimedischen Bücher *περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* wieder zu reconstruiren, da uns beide bekanntlich nur in attischer Ueberlieferung erhalten sind. Für Philologen, denen eben dieser Dialectverschiedenheit halber das Studium des Archimedes bereits in T. Müller's „Beitr. z. Terminol. der griech. Mathematiker“ anempfohlen worden war, dürfte dieser Abschnitt sehr viel Beachtenswertes darbieten. Gr.

M. Steinschneider. Études sur Zarkali, astronome arabe du XIe siècle et ses ouvrages. Bonc. Bull. XIV. 171-182.

Die vorliegenden Notizen besprechen die Quellen, aus denen für die Geschichte dieses Astronomen zu schöpfen sei.

O.

B. Boncompagni. Intorno ad uno scritto inedito di Adelardo di Bath intitolato „Regulae Abaci.“ Bonc. Bull. XIV. 1-134.

Von der im Titel genannten Schrift existiren drei Handschriften. Der Verfasser beschreibt dieselben auf das Genaueste und giebt nähere Nachricht über sie, wie über den Verfasser Adelhard von Bath. Den Schluss bildet ein Abdruck der Schrift.

O.

M. Steinschneider. Notice sur les tables astronomiques attribuées à Pierre III. d'Aragon. Bonc. Bull. XIII. 413-437.

In seiner berühmten Ausgabe der unter den Auspicien des gelehrten castilischen Königs Alphons entstandenen astronomischen Werke hatte Rico y Sinobas alle jenem Fürsten mit Recht oder Unrecht zugeschriebenen Handschriften aufgezählt und dabei auch eines Manuscriptes gedacht, welches gewöhnlich dem König Peter III. von Aragonien beigelegt wird, der Ansicht des spanischen Gelehrten nach jedoch ebenfalls von Alphons herrührt. Diese Frage der Urheberschaft wird hier näher untersucht. Es handelt sich um gewisse Sterntafeln, welche in Barcelona von Peter mit Unterstützung namhafter christlicher und jüdischer Mathematiker redigirt worden sein sollen, und deren Einleitung von Rico y Sinobas lateinisch mitgeteilt wurde. Herr Steinschneider, der die hebraeischen Originale dieses Prologes kannte, verglich dieselben mit dem lateinischen Texte und fand die allererheblichsten Fehler, sowie auch andere Anzeichen dafür, dass Rico sich bei der Untersuchung der betreffenden Handschrift getäuscht haben müsse. Es ist wahrscheinlich, dass das ganze Werk wirklich Peter's Anregung zu danken und dass nicht blos, wie man annehmen zu müssen geglaubt hatte, die von Astrologie strotzende Einleitung von den späteren Bearbeitern zu der ursprünglich alphonsinischen Arbeit hinzugefügt worden ist. Zuletzt werden, soweit die sehr spärlichen Quellen dies gestatten, einige Nachrichten über die bei der Anfertigung der Tafeln beschäftig-

ten Gelehrten beigebracht und zum Schlusse werden noch einige Angaben Rico's über die Lebenszeit einiger mittelalterlicher Autoren berichtigt. Der Text des Prologes, um welchen sich der Streit hauptsächlich dreht, ist anhangsweise nach dem Manuscript Nr. 10263 der Pariser Nationalbibliothek abgedruckt.

Gr.

A. Marre. Notice sur Nicolas Chuquet et son triparty en la science des nombres. Bonc. Bull. XIII. 555-592.

Le triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet Parisien d'après le manuscrit fonds français, No. 1346 de la bibliothèque nationale de Paris. Bonc. Bull. XIII. 593-659, 693-814.

Von neueren Historikern hatte zuerst Chasles darauf hingewiesen, dass die Bezeichnung der Potenzen in der noch heute üblichen Weise und eine der unsrigen wenigstens sehr ähnliche Wurzelbezeichnung in der Arithmetik des Etienne de la Roche (Lyon 1538) vorkomme. Bei der nämlichen Gelegenheit citirte er einen noch älteren französischen Autor, Nicolas Chuquet, in dessen leider verloren gegangenem Lehrbuch der Arithmetik man vielleicht auch ähnliche Wahrnehmungen würde machen können. Herr Aristide Marre hat nun dieses Buch in einem Manuscript der Pariser Nationalbibliothek wiedergefunden. Aus dem Texte dieser Handschrift ersehen wir in biographischer Hinsicht nur soviel, dass Chuquet, den Olry Terquem irrtümlich bald Chuquet bald Cuchet nannte, ein geborener Lyoner war, gegen die Wende des XV. Jahrhunderts lebte und in Paris den Grad eines Baccalaureus der Medicin erworben hatte. Um die Grundlage seines Werkes besser erkennen zu können, schaltet Herr Marre einen geschichtlich-mathematischen Excurs über das spätere Mittelalter ein, sich besonders gegen Hankel wendend, der da mit Unrecht behauptet habe, dass die Mathematik von Fibonacci bis Regiomontan und weiter hinaus keine Fortschritte gemacht habe. Chuquet's Traktat wurde handschriftlich vollendet im Jahre

1484, also zehn Jahre bevor Luca Pacioli's grosses Werk im Drucke erschien. Ersterer enthält nun bereits die cartesische Exponentenbezeichnung, Regeln, um mit denselben zu rechnen, Anwendungen derselben auf die Lehre von den Gleichungen, eine sehr merkwürdige „règle des nombres moyens", den Gebrauch der selbständigen Zeichen $\bar{p}$ und $\bar{m}$, jene Zeichenregel der Gleichungen, welche man gewöhnlich mit dem Namen Harriot's belegt, und nach des Verfassers Ansicht sogar eine deutliche Idee vom Wesen der Logarithmen. In der Numeration bedient sich Chuquet der Wörter Trillion, Billion, Million ganz im modernen Sinne, und mit quadratischen Gleichungen weiss er ganz gut umzugehen. Weiter werden, um das Verhältnis des arithmetischen Lehrbuches von de la Roche zu jenem Chuquet's festzustellen, eingehende Untersuchungen über Ersteren angestellt, als deren Ergebnis sich leider die unerfreuliche Tatsache constatiren lässt, dass der Lyoner Rechenmeister viele Stellen aus der ihm bekannten Handschrift seines älteren Landsmanns wörtlich abgeschrieben hat, während er dessen Namen nicht öfter als zweimal nennt. Gleichwohl muss, was Herr Marre nicht erwähnt, jene „arismetique" de la Roche's doch etwas anderes gewesen sein, als ein einfaches Plagiat, denn in ihr finden sich auch, wie zuerst von Treutlein, später noch bestimmter von Rodet betont worden ist, Spuren sehr origineller Methoden, so z. B. die Wurzelausziehung durch Kettenbrüche und ein Verfahren, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen neue Näherungswerte zu interpoliren. Zum Schlusse erhalten wir eine genaue bibliographische Beschreibung des Manuscriptes und ein kleines Glossar, um die vielfach vom modernen Französisch abweichende Ausdrucksweise Chuquet's besser verstehen zu können. Es erscheint beachtenswert, dass bei Letzterem wohl zuerst die heutzutage in einem so ganz anderen Sinne gebrauchten Kunstwörter „Equipollence" und „Equipollent" für Aequivalenz und Aequivalent sich vorfinden.

Wie oben bemerkt, folgt diesen einleitenden Bemerkungen des Herausgebers ein getreuer Abdruck der merkwürdigen Handschrift. Was die Wurzelbezeichnung anlangt, so schreibt Chuquet

$R^4.10$, $R^2.17$, wo wir $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt{17}$ zu setzen pflegen. Die Aehnlichkeit ist also eine sehr grosse. Es scheint uns übrigens keinem Zweifel unterworfen, dass Chuquet, der ja als Pariser Akademiker die Schriften Oresme's zur Verfügung hatte, bei der Abfassung seiner ausführlichen Anweisung, mit Wurzelgrössen zu rechnen, wesentlich auf den Schultern dieses genialsten Mathematikers des späteren Mittelalters gestanden hat. Gr.

S. Günther. Der Algorithmus linealis des Heinrich Stromer. Prag. Abh. (6) X.

Unter den gedruckten deutschen Rechenbüchern ist das in dieser Abhandlung besprochene und wieder abgedruckte eines der ersten und darum auch seltensten. Das Wenige, was bei den Bibliographen darüber zu finden war, ist hier gesammelt. Auch über die Person des Autors herrschte mancher Zweifel, und es ist nur einem glücklichen Zufall zu danken, dass einiges Licht über dieselbe verbreitet werden konnte. Durch die im Familienarchiv des Geschlechtes der Freiherrn von Stromer sich findenden Urkunden, welche mit dankenswerter Bereitwilligkeit zur Verfügung gestellt wurden, liess sich nämlich mit Sicherheit ermitteln, dass Heinrich Stromer dem kleinen oberpfälzischen Städtchen Auerbach entstammte und später als Professor der Medicin in Leipzig den heute noch nach seiner Vaterstadt benannten Auerbach-Hof, worin sich der berühmte Keller befindet, gründete. Neben seiner beruflichen Lehrtätigkeit hielt er auch mathematische Privatvorlesungen. Eine derselben hat er im Drucke herausgegeben. Es ist dies eine Anweisung zum „Rechnen auf der Linie“, die in manchen Einzelheiten von den anderen bekannten Lehrbüchern dieser Wissenschaft oder Kunst abweicht.
Gr.

B. Boncompagni. Testamento inedito di Nicolò Tartaglia. Chelini, Coll. Math. 363-412, Milano. Ulrico Hoepli.

A. Favaro. Intorno al testamento inedito di Nicolò Tartaglia pubblicato da D. B. Boncompagni. Padova. Tipografia G. B. Bandi.

Die Schrift des Fürsten Boncompagni war ursprünglich in dem Gedächtnisbande enthalten, durch welchen eine grosse Anzahl Gelehrter aller Nationen das Andenken Chelini's, eines im Jahre 1879 verstorbenen hochverdienten Mathematikers, gefeiert hat; nachgrade ist sie auch separat ausgegeben worden. Ueber Vornamen und Todestag des berühmten Tartaglia, der doch eigentlich zuerst in die Lehre von den cubischen Gleichungen volle Klarheit gebracht hat, war man bisher fast ganz im Unklaren. Die bezüglichen Angaben der Historiker weichen grossenteils von einander ab. Fürst Boncompagni zählt solcher Angaben eine ganze Menge auf. Nun aber gelang es, im Notariatsarchiv zu Venedig das Original des von Tartaglia unter Beistand des Notars Rochus de Benedictis abgefassten Testamentes aufzufinden, welches auch eigenhändige Randbemerkungen des grossen Algebraikers enthält. Dieses Testament nun, welches wir nicht allein in diplomatisch genauer Abschrift, sondern auch durch eine Facsimilirung gewissermassen im Originale erhalten, klärt die bis dahin noch schwebenden Zweifel völlig auf.

Es ergiebt sich, dass Nicolò Tartaglia der Sohn eines Brescianers, Messer Michele, war und in Brescia entweder im Jahre 1500 oder 1501 geboren wurde. Sein Tod erfolgte zu Venedig in der Nacht vom 13. zum 14. December 1557. Auf seine Familienbeziehungen wird durch die von dem berühmten römischen Geschichtsforscher gegebenen Nachweisungen manches neue Licht geworfen.

Professor Favaro, dem die Aufgabe geworden war, die Schrift des Fürsten der Akademie in Padua vorzulegen, begleitet dieselbe mit einer selbständigen kleinen Broschüre, die im Wesentlichen eine Inhaltsübersicht über erstere zu geben bestimmt ist, dabei aber auch manche neue Bemerkung enthält. So ist Herr Favaro der allgemeinen Annahme entgegen geneigt zu glauben, dass Tartaglia Familie gehabt hat, und führt dafür beachtenswerte

Gründe an. Wichtiger ist eine zweite Notiz über den Namen des Testators. Aus dem Testamente könnte man schliessen, dass derselbe eigentlich Nicolò Fontana geheissen und nur nebenbei noch den Beinamen Tartaglia geführt habe. Dieser Vermutung Boncompagni's haben sich Govi (C. R. XCIII. 558) und Mansion (Mathesis, I. p. 144) angeschlossen. Favaro tritt dieser Auffassung entgegen, und wir möchten ihm Recht geben. Endlich wird noch auf einen höchst sonderbaren Ausspruch des freilich auch sonst ziemlich unzuverlässigen Geschichtschreibers Papadopoli aufmerksam gemacht, demzufolge Tartaglia, der doch ganz sicher damals noch gar nicht geboren war, bereits Anno 1499 in Padua studirt haben sollte. Gr.

A. Favaro. I precursori inglesi del Newton. Traduzione dall' inglese. Bonc. Bull. XIII. 481-514.

Das Original dieses Aufsatzes erschien im Juliheft 1880 des „Edinburgh review". Derselbe beginnt mit allgemeinen Betrachtungen über die gewaltigen Fortschritte, welche im Verlaufe des XVII. Jahrhunderts sämmtliche Naturwissenschaften ohne Ausnahme gemacht haben, und geht sodann auf einzelne Persönlichkeiten näher ein. Vor Allem kommt hier Robert Hooke in Frage, von dem mit Recht gesagt wird, dass er der Art und Weise seines Forschungsganges nach kaum für den Schüler Bacon's von Verulam gehalten werden könne, als welcher er selber gelten wollte. Im XVI. Jahrhundert waren für die Verbreitung mathematischer Kenntnisse in England Dee, Recorde und Field tätig. Letzterer gab schon im Jahre 1537 Ephemeriden „nach Copernicus und Reinhold" heraus. Auch der Gastrolle, welche Giordano Bruno in Oxford gab, wird Erwähnung gethan. Weiter sind zu nennen Gilbert, der Verfasser des berühmten Werkes vom Magnet, die Mathematiker Harriot und Napier und der Physiologe Harvey. Horrox und Crabtree, bekannt durch ihre Beobachtung eines Mercurdurchganges, werden natürlich nicht vergessen, ebensowenig der gelehrte Kreis, der sich um den freilich selbst nicht besonders für ernste Studien eingenommenen

Karl II. gesammelt hatte. An dessen Namen knüpft sich die Begründung der später so genannten Akademie, deren erste Zierden Wallis, Boyle und der Bischoff Wilkins waren. Hierauf folgt ein längerer Excurs auf Bacon, dessen im Ganzen nicht sehr erhebliche Verdienste unseres Erachtens hier eine ganz entsprechende Kennzeichnung finden. Endlich wird die Bedeutung Hooke's, wie schon oben angedeutet, einer eingehenden Betrachtung unterzogen, aus welcher die ungemeine Vielseitigkeit und das gewaltige experimentelle Genie dieses Mannes recht klar hervorgehen. Er war es z. B., der schon um 1681 jenen akustischen Apparat angab, der noch heute unter dem Namen „Savart'sches Rad" ein Inventarstück unserer Cabinette ist, wie er denn auch bereits die Chladni'schen Klangfiguren ihrem Wesen nach anticipirt hat. Auch eine grosse Anzahl anderweiter neuer Entdeckungen rührt von ihm her. Geirrt hat er eigentlich nur in seiner Auffassung der Natur der Farbe, wenn man ihm nicht etwa seine grade nicht sehr angenehmen Charactereigenschaften auch bei dieser Gelegenheit zum Vorwurfe machen will. Den Schluss der interessanten Abhandlung bildet die Entstehungsgeschichte der Gravitationslehre, wobei die Namen Hooke, Wren und Halley neben demjenigen Newton's genannt zu werden verdienen. Dieser Umstand ist den Geschichtschreibern schon von jeher bekannt, dagegen dürfte sehr Vielen die Nachricht neu sein, dass der bekannnte Chemiker Mayow auch optische Experimentaluntersuchungen angestellt und den Anstoss zu jenen Forschungen gegeben hat, welche später Bradley zur Entdeckung der Aberration des Lichtes führen sollten. Gr.

C. Henry. Notice sur un manuscrit inédit de Claude Mydorge. Bonc. Bull. XIV. 271-278.

Extraits du traité de géométrie de Claude Mydorge. Bonc. Bull. XIV. 279-350.

Die erste Arbeit enthält Notizen über Claude Mydorge. Derselbe (1585—1647) war ein Freund von Descartes und unter

anderen auch Verfasser von Büchern über Kegelschnitte. Hiei wird eine bisher ungedruckte Arbeit publicirt, die ausser einer Einleitung in der Zusammenstellung von 1008 Problemen der elementaren Geometrie besteht. O.

A. Favaro. Galileo Galilei e lo studio di Bologna.

Ven. Att. Ist (5) VII. 761-777.

Im Anschlusse an gewisse von dem bekannten Coppernicus-Forscher Malagola aufgefundene Documente wird hier über Galilei's Beziehungen zur Universität Bologna berichtet. Im Alter von 23 Jahren hegte derselbe die Absicht, sich um ein Lehramt an jener Hochschule zu bewerben und gedachte zu diesem Zwecke eine Probe seines Talents einzureichen. Hierzu erschien ihm am geeignetsten ein Beweis für die Lage des Schwerpunktes im Pyramidenstumpf, den er eben gefunden hatte. Er legte ihn dem Professor Moleti in Padua vor und erhielt von diesem deshalb ein sehr schmeichelhaftes Zeugnis ausgestellt. Es existirt auch ein an eine freilich unbekannte Respectsperson in Bologna gerichtetes Schreiben, in welchem dem jungen Mathematiker wegen seines schönen neuen Satzes und seiner übrigen Leistungen hohe Lobsprüche gezollt werden. Auch ein anderes Schriftstück des bolognesischen Staatsarchives enthält eine warme Empfehlung Galilei's, die zwar nicht direct, aber doch zwischen den Zeilen auf einen Lehrstuhl abzielt. Erreicht hat er seinen Zweck bekanntlich nicht, vielmehr wurde Magini, der damals freilich auch schon einen ausgebreiteteren wissenschaftlichen Ruf besass, Professor der Mathematik. Einige Jahre später hatte Galilei auf's Neue Aussicht, durch Vermittelung seines Freundes Del Monte nach Bologna zu kommen, indess wurde wieder nichts aus der Sache, und als man ihm 30 Jahre später den damals vergeblich angestrebten Lehrstuhl in ehrenvollster Weise antrug, hatte er keine Lust mehr, dem Rufe Folge zu leisten. Es ist ein hübsches Stück Universitätsgeschichte, mit dem uns die Herren Malagola und Favaro bekannt gemacht haben. Gr.

A. FAVARO. La proposta della longitudine fatta da Galilei alle confederate provincie belgiche tratta per la prima volta integralmente dall' originale nell' archivio di stato. Ven. Att. Ist. (5) VII. 367-399.

Ein detaillirter Bericht über die Verhandlungen, welche zwischen Galilei und den Generalstaaten über das Problem der Bestimmung der Meereslänge gepflogen worden sind. Derselbe stützt sich auf die bei dieser Gelegenheit teilweise zum erstenmale abgedruckten Originalschriftstücke. Galilei's Vorschläge stützten sich besonders auf dreierlei: Genaue Ephemeriden der Jupitertrabanten zum Zwecke der Vorausbestimmung ihrer Finsternisse, Verbesserung des Fernrohres (Binocularteleskop) und Einführung eines neuen Principes der Zeitmessung. Damals eben begann er seine Idee einer Pendeluhr zu realisiren. Gr.

G. GOVI. Alcune lettere inedite di Galileo Galilei. Bonc. Bull. XIV. 351-379.

Es wird hier der Text von sechs Briefen Galilei's an den Cardinal F. Borromeo abgedruckt. Dem Text folgen Erläuterungen literarischer und sachlicher Natur. O.

A. FAVARO. Inedita Galileiana. Frammenti tratti dalla biblioteca nazionale di Firenze pubblicati ed illustrati. Ven. Mem. Ist. XXI. P. II. 433-473.

In der Nationalbibliothek zu Florenz findet sich ein Fascikel noch ungedruckter Galilei'scher Schriften, ausserdem mehrere Convolute von Briefen und Arbeiten von Männern, die irgendwie mit Galilei zu tun gehabt haben. Herr Favaro teilt hier eine Probe dieser, damals noch ungehobenen literarischen Schätze mit, welche inzwischen in dem grossen Werke des Marchese Campori eine natürlich noch ausgiebigere Verwertung gefunden haben. Was uns hier geboten wird, setzt sich aus fünf Teilen zusammen. Zunächst erhalten wir nach bisher nicht be-

kannten Quellen einige biographische Nachrichten über Galilei. Das zweite Stück enthält specifische Gewichtsbestimmungen des grossen Mannes, und zwar sind es verschiedene Edelsteinarten, deren Dichte er mit Hülfe seiner „bilancetta“ bestimmt hat. An dritter Stelle begegnen wir einigen geometrischen Betrachtungen, zu denen sich Galilei damals, als er Collegien über Fortification las, gelegentlich gedrängt sah. Es handelt sich um die Construction eines Lotes, um die Verzeichnung eines regulären Fünfeckes über einer gegebenen Seite und mit einer einzigen Cirkelöffnung, die sogenannte Dürer'sche Regel, endlich um eine allgemeine Regel zur näherungsweisen Construction beliebiger regelmässiger Vielecke. Des Weiteren wird der Lehrsatz bewiesen, dass das über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes errichtete gleichseitige Dreieck der Summe der beiden analogen über den Katheten errichteten Dreiecke gleich ist. Abschnitt IV. ist gewissen hydraulischen Bemerkungen gewidmet, die Galilei in seinem Gutachten über die Uferregulirung des Flusses Bisenzio niederlegte, und die auch für die Geschichte der theoretischen Hydrodynamik ein gewisses Interesse beanspruchen können. Bruchstück V. endlich enthält einige mehr humoristische Gelegenheitsäusserungen über philosophische Fragen. Als Anhänge sind ein Brief Galilei's an eine nicht näher festzustellende Adresse (vom 22. September 1630) und Viviani's Elogium auf seinen unglücklichen Lehrer beigegeben. Gr.

G. Libri. Due lettere inedite di Guglielmo Libri con la giunta di un aneddoto della gioventù di Galileo Galilei l'uno e le altre da una copia di mano del Libri medesimo. Firenze. 16°.

C. Henry. Supplément au travail intitulé „Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat suivies de fragments inédits de Bachet de Méziriac et de Malebranche.“ Bonc. Bull. XIII. 437-470.

Die Mehrzahl dieser Verbesserungen zu einer Arbeit, über welche Band XI. 1879. p. 16 Bericht erstattet wurde, bezieht sich auf gewöhnliche Druckfehler, doch finden sich auch sachliche Bemerkungen vor, welche der Verfasser zum Teil dem bekannten mathematischen Altertumsforscher Paul Tannery in Havre verdankt. Wir heben nur einige der bemerkenswertesten Punkte hervor. Es werden mehrere Actenstücke textuell mitgeteilt, die zwar nicht auf Fermat's wissenschaftliche Leistungen, wohl aber auf dessen gewöhnlich zu wenig gewürdigte Stellung als Beamter Bezug haben. Weiter wird darauf hingewiesen, dass die Erfindung des Satzes: „Jede in der Summe zweier Quadrate ohne Rest enthaltene ganze Zahl ist selbst eine Summe von zwei Quadraten, woferne jene beiden Zahlen teilerfremd sind" wahrscheinlich nicht, wie früher vermutet ward, Malebranche, sondern einem gewissen Pater Jaquemet gebührt. Dagegen wird von Malebranche's Studien auf dem Gebiete der Infinitesimalanalysis mit hoher Achtung gesprochen, und die Proben, welche uns von dieser seiner Tätigkeit hier mitgeteilt werden, machen es uns auch begreiflich, dass die grossen zeitgenössischen Mathematiker Leibniz und L'Hôpital mit grosser Anerkennung von dem französischen Forscher sprechen. Aus einer Rectification einer früheren Angabe scheint man ferner den Schluss ziehen zu müssen, dass Fermat von dem im Erdinneren proportional der Distanz gegen den Erdmittelpunkt hin zunehmenden Schwere unter der Voraussetzung einer in concentrischen Schichten gleichen Massenverteilung Kenntnis gehabt habe. Gr.

E. Spiess. Erhard Weigel, der Lehrer von Leibniz und Pufendorf. Ein Lebensbild aus der Universitäts- und Gelehrtengeschichte des 17ten Jahrhunderts. Leipzig. Klinkhardt.

Das Buch giebt im ersten Capitel Nachrichten über den äusseren Lebensgang Erhard Weigel's. Er ist geboren am 16. December 1625 zu Weiden an der Nab, wurde 1653 Professor der Mathematik zu Jena und starb als solcher am 21. März 1699.

Cap. VI. behandelt Weigel als Mathematiker, Cap. VII. Weigel's Erfindungen und Cap. VIII. sein Verdienst um Astronomie und Kalenderwesen. Der Verfasser, dem es namentlich auf die Characteristik der Zeit- und Universitätsverhältnisse ankommt, schliesst sich in diesen Capiteln der Hauptsache nach der Darstellung an, die Bartholomaei in Schlömilch's Z. XIII. Sppl. 1-44 über Weigel gegeben hat. Referent verweist daher auf F. d. M. I. 1868. p. 12-13, wo die Arbeit besprochen ist. O.

Beiträge zur Geschichte der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Hamb. Mittl. No. 1. 8-16.

Der vorliegende erste Abschnitt dieser Beiträge schildert die Begründung der Gesellschaft und das erste Jahrhundert ihres Bestehens. Am 2. Januar 1690 versandte Heinrich Meissner einen Ausschreibebogen zur Gründung der „Kunstrechnungs-Liebenden-Societät". In Folge dessen traten 15 Mitglieder der Gesellschaft bei. Bis zum Jahre 1790 hatte die Gesellschaft 196 Mitglieder. Doch hielten sich die eigentlichen studirten Mathematiker derselben während dieser Zeit noch fern. Es werden dann die Leistungen einzelner Mitglieder der Gesellschaft geschildert. O.

L. Euler. Considérations sur quelques formules intégrales dont les valeurs peuvent être exprimées en certains cas par la quadrature du cercle. Mémoire publié conformément au manuscrit autographe par Ch. Henry. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

L. Mascheroni. Bibliografia Mascheroniana ossia catalogo bibliografico delle opere a stampa dell' Abbate Lorenzo Mascheroni con un elenco de' suoi manoscritti per G. Ravelli. Bergamo. 8°.

C. Henry. Supplément à la bibliographie de Gergonne. Bonc. Bull. XIV. 211-218.

In der Bibliothek der Sorbonne befindet sich das von Gergonne geschenkte Exemplar der Annales des Mathématiques pure et appliquée (1810-1831). In demselben findet sich bei 43 anonym oder pseudonym abgedruckten Arbeiten Gergonne's Name als des Verfassers von seiner eignen Hand beigeschrieben. Danach wären also den 178 im Catalogue of scientific papers (1800-1863) Bd. II. erwähnten Nummern noch 43 hinzuzufügen. O.

S. Günther. Der Briefwechsel zwischen Gauss und Sophie Germain. Schlömilch Z. XXVI. H. L. A. 19-25.

Im Jahre 1879 hat B. Boncompagni einen Brief von Gauss an Sophie Germain veröffentlicht, dem er im Jahre 1880 fünf weitere Briefe von Sophie Germain an Gauss folgen liess. Der vorliegende Bericht ist wesentlich diesen letzten Briefen gewidmet. Der erste dieser Briefe vom 21. November 1806 beschäftigt sich mit einzelnen Teilen der Disquisitiones arithmeticae. Ebenfalls der Hauptsache nach mit zahlentheoretischen Betrachtungen angefüllt ist ein zweiter Brief vom 21. Juli 1805, dem am Schluss Notizen über Legendre's Bahnbestimmung für Kometen zugefügt werden. Der Brief vom 16. November 1805 enthält eine Bemerkung, die sich auf die Determinanten der adjungirten Formen bezieht, während der Brief vom 20. Februar 1807 nur der Aufdeckung der Pseudonymität gewidmet ist. Die Antwort auf diesen Brief ist der oben genannte Brief von Gauss. Den Schluss der Sammlung endlich bildet die Antwort Sophie Germain's darauf vom 27. Juni 1807. O.

G. Govi. Presentazione di cinque lettere fotolitografate di Sofia Germain a Carlo Federico Gauss pubblicate da B. Boncompagni. Nap., Rend. XIX. 113-114. 1880.

Siehe F. d. M. XII. 1880. p. 13-14. O.

N. H. Abel. Oeuvres complètes. Nouvelle édition publiée aux frais de l'État Norvégien par MM. L. Sylow et S. Lie. Christiania. Grondahl et Son.

Die vorliegende neue Ausgabe von Abel's Werken ist auf Kosten des Norwegischen Staates durch die Herren Sylow und Lie besorgt. Die sämmtlichen Manuscripte sind sorgfältig von Neuem geprüft worden. Der erste Band enthält alle von Abel publicirten Arbeiten, mit Ausnahme einer einzigen Abhandlung, die in dem Magazin des Sciences Naturelles, 1824, erschienen, von Abel selbst, weil fehlerhaft, zurückgezogen war. Der zweite Teil enthält die hinterlassenen Manuscripte und Auszüge aus Briefen. Den Schluss bilden erläuternde und ergänzende Bemerkungen der Herausgeber. O.

C. G. J. Jacobi. Gesammelte Werke. I. Band. Herausgegeben von C. W. Borchardt. Berlin. G. Reimer.

Die Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften hat beschlossen, die gesammelten Werke Jacobi's, Lejeune-Dirichlet's und Steiner's in einer der grossen Meister würdigen Ausstattung herauszugeben. In diese Ausgabe sollen nicht nur diejenigen Abhandlungen, welche bereits im Drucke erschienen sind (zum grossen Teil in den immer schwerer zugänglichen ersten Bänden des Crelle'schen Journal's), sondern auch die fast druckfertig im Nachlasse vorgefundenen Arbeiten aufgenommen werden. Fast gleichzeitig mit dem I. Bande der Werke Steiner's erschien der vorliegende erste Band von Jacobi's Werken, der mit dem Bildnisse Jacobi's geschmückt ist. Der kürzlich verstorbene C. W. Borchardt hat sowohl auf die Correctheit des Textes wie auf die typographische Ausstattung die grösstmögliche Sorgfalt verwendet. Die einzelnen Abhandlungen Jacobi's sind nach den behandelten Gegenständen in Gruppen eingeteilt und innerhalb dieser ist, soweit es möglich war, eine chronologische Anordnung beobachtet. Nach diesem Plane werden die beiden ersten Bände alle Abhandlungen Jacobi's über elliptische und Abel'sche Transcendenten umfassen.

Der erste Band beginnt mit Lejeune-Dirichlet's Gedächtnisrede auf Jacobi, welche in den Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1852 erschien. Die folgenden 13, bereits früher von Jacobi selbst veröffentlichten Arbeiten betreffen sämmtlich die Theorie der elliptischen Functionen. Es genügt, ihre Titel anzuführen: 2. Extrait de deux Lettres de M. Jacobi de l'université de Königsberg à M. Schumacher (Schumacher, Astr. Nachr. IV., Nr. 123. September 1827); 3. Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis, (ib. VI., Nr. 127. December 1827); 4. Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum (Regiomonti Sumptibus fratrum Bornträger 1829); 5. Addition au mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques Vol. II., p. 101 du Journal de M. Crelle (Crelle's J. III., 85); 6. Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre carrés (Crelle's J. III., 191); 7. Notices sur les fonctions elliptiques (Crelle's J. III. 192-195, 303-310, 403-404; IV., 185-193); 8. Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementar-Geometrie (Crelle's J. III., 376); 9. De functionibus ellipticis commentatio prima et altera (Crelle's J. IV., 371-390; VI., 397-403); 10. Note sur une nouvelle application de l'analyse des fonctions elliptiques à l'algèbre (Crelle's J. VII., 41-43); 11. Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales (Crelle's J. XV., 199-204); 12. Ueber die zur numerischen Berechnung der elliptischen Functionen zweckmässigsten Formeln (Crelle's J. XXVI., 93-114); 13. Ueber einige die elliptischen Functionen betreffende Formeln (Crelle's J. XXX., 269, 270); 14. Anzeige von Legendre: Théorie des fonctions elliptiques, troisième supplément (Crelle's J. VIII., 413-417). Daran schliesst sich eine Reihe von Abhandlungen aus dem Nachlasse Jacobi's. Es beginnt die bereits früher von Borchardt in seinem Journal LXXX., 205-279, veröffentlichte Correspondance mathématique avec Legendre (s. F. d. M. VII. 1875. 275). Darauf folgen drei bisher ungedruckte Arbeiten, die wahrscheinlich unmittelbar nach Vollendung der Fundamenta geschrieben sind, nämlich: 16. De transformationibus functionum ellipticarum irrationalibus sive inversis (p. 463-482); 17. De divisione integralium ellipti-

corum in n partes aequales (p. 483-488); 18. De multiplicatione functionum ellipticarum per quantitatem imaginariam pro certo quodam modulorum systemate (p. 489-496). Eine besonders wertvolle Zugabe ist die letzte Abhandlung: „Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet" (p. 497-538), die Borchardt nach einer Vorlesung Jacobi's in dessen Auftrage ausgearbeitet und durch die von Jacobi eigenhändig hinzugefügten Anmerkungen vervollständigt hat. Sie kann, wie Herr Professor Weierstrass bemerkt, mit gutem Fug als eine von Jacobi autorisirte betrachtet werden. Die von Herrn Weierstrass nach Borchardt's Notizen ausgearbeiteten Anmerkungen (p. 539 bis 546) enthalten diejenigen Stellen, an denen wichtigere Veränderungen des ursprünglichen Textes vorgenommen worden sind.

M.

JACOB STEINER. Gesammelte Werke. Herausgegeben von K. Weierstrass. Bd. I. Berlin. G. Reimer.

Die gesammelten Werke Steiner's werden herausgegeben auf Veranlassung der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Der vorliegende erste Band enthält Steiner's Arbeiten aus den Jahren 1826-1834 in chronologischer Aufeinanderfolge, nämlich 14 Arbeiten aus den drei ersten Bänden des Crelle'schen Journals, 4 Arbeiten aus dem 18. und 19. Bande von Gergonne's Annalen, dann die beiden selbständig erschienenen Bücher: „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" und „Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises". Die Revision der „systematischen Entwickelung" ist von Herrn Schröter in Breslau, die der übrigen Arbeiten von Herrn Kiepert in Hannover vorgenommen worden. In den Anmerkungen des Herausgebers werden die Stellen besprochen, in denen sich bei den Revisionen Irrtümer gezeigt hatten, oder die sonst einer Erläuterung bedürftig erschienen.

O.

E. Beltrami. Della vita e delle opere di Domenico Chelini. Chelini Coll. Math. I-XXXII.

Die Einleitung zu dem Sammelwerke, welches dem Andenken des am 16. November 1878 verstorbenen italienischen Mathematikers gewidmet ist, enthält eine Lebensbeschreibung des Gefeierten, die namentlich eine eingehende Würdigung der wissenschaftlichen Leistungen giebt. Diese haben sich besonders auf die analytische Geometrie im Allgemeinen, die Theorie der Oberflächen und mechanische Gegenstände bezogen (siehe auch F. d. M. X. 1879. p. 27). Dann folgt ein Verzeichnis der Arbeiten Chelini's. Der Sammelband enthält Arbeiten von Reye, Schläfli, Borchardt, Kronecker, Cayley, Hirst, Darboux, Hermite, Mannheim, H. S. Smith, Geiser, Wolf, Ovidio, Siacci, Bardelli, Brioschi, Jung, Caporali, Betti, Dini, Padova, Battaglini, Boncompagni, Cerruti, Cremona, Beltrami, Bertini und Casorati, über welche an den betreffenden Stellen dieses Bandes referirt werden wird.

O.

F. Brioschi. Michele Chasles. Brioschi Ann. (2) X. 158-160.

G. Darboux. M. Chasles. Lond. M. S. Proc., XII. 216-217.

B. Boncompagni. M. Chasles. Bonc. Bull. XIII. 815-828.

Nachrufe und biographische Mitteilungen über M. Chasles (siehe F. d. M. XII. 1880. p. 15-16), die teils nur das äussere Leben, teils auch die wissenschaftliche Entwickelung des verstorbenen Mathematikers besprechen.

O.

Cenno necrologico ed elenco delle pubblicazioni del G. Bellavitis. Rom., Acc. R. d. L. (3) V. 15-19.

A. Favaro. Justus Bellavitis. Schlömilch Z. XXVI. H. L. A. 153-169.

Die erste Arbeit enthält einen kurzen Bericht über den äusseren Lebensgang des verstorbenen Mathematikers (s. F. d. M.

XII. 1880. p. 15), die zweite eine eingehende Schilderung seiner Tätigkeit und seines wissenschaftlichen Entwickelungsganges. Beiden ist ein Verzeichnis der 140 Publicationen von Bellavitis, die sich auch auf andere Gebiete als Mathematik und Physik erstrecken, beigefügt. O.

ABONNÉ. Nécrologie. Nouv. Ann. (2) XX. 137-139.

Nekrolog für G. Bellavitis. Siehe F. d. M. XII. 1880. p. 15. O.

R. RUBINI. Fiore sparso sulla tomba del suo adorato Maestro Fortunato Padula. Nap. Rend. XX. 181-198.

Enthält einen Nachruf des am 23. December 1815 geborenen und am 20. Juni 1881 verstorbenen Mathematikers Fortunato Padula, in dem eine Reihe von Arbeiten desselben eingehend besprochen wird. O.

J. E. B. MAYOR. The Cotterells, Cotterills and Cottrells of Cambridge. Lond. M. S., Proc. XII. 217-218.

Die vorliegende Notiz enthält Nachrichten über den verstorbenen Mathematiker T. Cotterill (geboren 1808, gestorben 1881) nebst einer Liste seiner publicirten und unpublicirten Arbeiten. O.

Adresse der Berliner Akademie der Wissenschaften zur Feier des fünfzigjährigen Doctorjubiläums von Ernst Eduard Kummer. Berl. Monatsber. 1881.

Die Adresse giebt ein kurzes Bild der mathematischen Tätigkeit Kummer's. Diese zerfällt in drei sich auch der Zeit nach abgrenzende Abschnitte. Während des ersten Abschnitts beschäftigte sich Kummer wesentlich mit Untersuchungen über die Theorie der Reihen und Integrale. Als Mittelpunkt der hierher

gehörigen Leistungen erscheint die Arbeit über die hypergeometrischen Reihen. Es folgt die Zeit der zahlentheoretischen Arbeiten, in denen besonders die Ausbildung des Begriffs der idealen Zahlen und die Reciprocitätsgesetze hervorzuheben sind. Die dritte Periode ist analytisch geometrischen Problemen gewidmet. Hier ist die allgemeine Theorie der Strahlensysteme, dann die specieller algebraischer Strahlensysteme, welche diese Untersuchungen characterisiren, zu nennen. O.

S. DICKSTEIN. Joannes Broscius. Warsch. Päd. Enc. 1882. (Polnisch.).

Biographische Skizze und Verzeichnis seiner Schriften. Dn.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

E. G. V. SCHIAPARELLI. Sulla nuova storia delle matematiche pubblicata dal prof. M. Cantor. Lomb. Rend. (2) XIV. 62-69.

Die vorliegende Mitteilung enthält einen eingehenden Bericht über den ersten Band der Cantor'schen Geschichte der Mathematik (siehe F. d. M. XII. 1880. p. 16-28), in dem namentlich auf die Fortschritte des Werkes gegenüber dem von Montucla aufmerksam gemacht wird. O.

A. FAVARO. Sulla biblioteca matematica italiana del Prof. P. Riccardi. Ven. Atti Ist. (5) VII. 47-64.

Der Verfasser giebt einen eingehenden Bericht über das der italienischen Literatur zur hohen Zierde gereichende Werk des Bologneser Professors. Auch benützt er die in demselben enthaltenen Daten zu vergleichend-statistischen Berechnungen von derselben Art, wie er solche systematisch in seinem Schriftchen „Intorno ad una statistica degli scienziati vissuti nei due ultimi secoli“ (Padua 1878) angestellt hat. Gr.

G. Parmentier. Correspondance. Nouv. Ann. (2) XX. 139-140.

Es handelt sich um die Ableitung des Wortes Algebra aus dem Arabischen. O.

L. Bergold. Arithmetik und Algebra, nebst einer Geschichte dieser Disciplinen. Karlsruhe. H. Reuther.

Der Verfasser hat schon früher den guten Gedanken gehabt, seinem Lehrbuch der Trigonometrie auch einen kurzen Abriss der Geschichte dieser Wissenschaft beizugeben. Die vorliegende Entwickelungsgeschichte der Arithmetik ist kurz und nicht immer nach den neuesten Quellen gearbeitet, hebt aber die für die Schüler wichtigsten Momente gut hervor und ist im Allgemeinen auch correct. Einzelne Mängel werden sich künftig leicht beseitigen lassen: so können die Anfänge der Combinationslehre (S. XXI.) nicht blos bis zu Jean Buteon, sondern viel weiter, nämlich bis in's griechische und indische Altertum zurück verfolgt werden, und wenn auch lobend anzuerkennen ist, dass hier (S. XVIII.) nicht, wie gewöhnlich die Napier'schen mit den natürlichen Logarithmen einfach verwechselt werden, so ist die Characterisirung ihres gegenseitigen Verhaltens doch noch immer keine ganz zutreffende. Das Lehrbuch selbst beginnt mit den Elementen der Zahlenrechnung, geht dann zur allgemeinen Arithmetik über und umfasst auch noch die Algebra bis zu den Gleichungen des 3. und 4. Grades. Die Darstellung ist verständlich und exact; dass auch den Kettenbrüchen und der Combinatorik (oder, wie sie hier nach älteren Mustern heisst) Syntaktik ein grösserer Spielraum vergönnt wurde, als in den meisten gangbaren Compendien, wird vielen Lehrern angenehm sein. Gr.

P. Tannery. De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide. Bord. Mém. (2) IV. 395-417.

Wenn man fragt, welche Formen quadratischer Gleichungen bereits den älteren Griechen geläufig waren, so erhält man zur

Antwort, dass es die folgenden drei waren:

$$x^2+px=q,\quad x^2=px+q,\quad px=x^2+q.$$

Selbstverständlich müssen diese Formen aus der geometrischen Einkleidung der bezüglichen Aufgaben erst herausgelesen werden. Es handelte sich gewöhnlich darum, an eine gegebene Strecke ein Rechteck so anzustrecken, dass es entweder einen gegebenen Flächeninhalt habe oder um ein Gewisses einen gegebenen Flächeninhalt übertreffe oder endlich um ein Gewisses hinter einem gegebenen Flächeninhalt zurückbleibe. Diese drei Forderungen gaben den drei Kunstausdrücken παραβολή, ὑπερβολή, ἔλλειψις ihre Entstehung, und diese dienten dann später (nach Archimedes) in leicht verständlichem Zusammenhang zur Bezeichnung der drei Gattungen von Linien der zweiten Ordnung. Diese drei Probleme werden im Sinne der Alten gelöst und zuletzt algebraisch umgeformt. Von biquadratischen Gleichungen, welche einer Zurückführung auf quadratische fähig sind, scheint nur ein Fall aus jener Zeit nachgewiesen werden zu können. Es handelt sich dort um die Auflösung der Gleichungen

$$xy=A,\quad x^2=my^2+B,$$

wofür Euklid eine elegante, nach modernem Urteile jedoch etwas weit hergeholte Lösung giebt. Ausserdem lassen sich gewisse irrationale Ausdrücke des zehnten euklidischen Buches als Wurzeln höherer Gleichungen auffassen, so z. B. die Summe

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{m+1}{m-1}}\,b}+\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{m-1}{m+1}}\,b},$$

welche einer biquadratischen Gleichung für x^2, also eigentlich einer Gleichung achten Grades als Wurzel entspricht. Herr Tannery glaubt nun, was das rein Historische anlangt, dem Eudoxus, welchem gewöhnlich die Aufstellung einer wissenschaftlichen Theorie der Proportionen zugeschrieben wird, lediglich das Verdienst zuerkennen zu sollen, dass er zuerst die bereits den Pythagoräern bekannten Grundwahrheiten dieser Theorie mit der aus derselben Schule stammenden Lehre vom Irrationalen zu versöhnen gewusst habe. Proklos führt auch die oben erwähnten Kunstwörter Parabel, Hyperbel, Ellipse auf pythagoräischen

Ursprung zurück, wovon der erste Geschichtschreiber der Geometrie, Eudemos, allerdings anscheinend keine Kenntnis hat. Dagegen sprechen andere Zeugen, so besonders Plutarch, zu Gunsten der von Proklos aufgestellten Behauptung. Insbesondere dürfte nach des Verfassers Ansicht auch darauf Gewicht zu legen sein, dass Hippokrates von Chios, nachweisbar ein Pythagoräer, mit ähnlichen Problemen bei der Quadratur der nach ihm benannten Monde gut Bescheid weiss. Was endlich die arithmetische Lösung quadratischer Gleichungen betrifft, so findet sich diese im Altertum nicht früher als in den „Porismen" des Diophantes, und ob dieser dabei sich noch des alten geometrischen Kernes seiner Behandlungsweise bewusst geworden sei, muss dahingestellt bleiben; unwahrscheinlich ist es nicht. Gr.

H. Heilermann. Bemerkungen zu den Archimedischen Näherungswerten der irrationalen Quadratwurzeln.
Schlömilch Z. XXVI. H. L. A. 121-126.

Theon Smyrnaeus hat zur Auflösung der Gleichung $x^2-2y^2=1$ oder, wie er sich ausdrückt, zur Bildung der Seiten- und Diametralzahlen ein Verfahren angegeben, welches hier zur Lösung der allgemeineren Pell'schen Gleichung $x^2-ay^2=b$ und damit zur Berechnung rationaler Näherungswerte von $\sqrt{a}$ verwertet, also entsprechend verallgemeinert wird. Man bilde zwei Systeme recurrirender Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 + D_0, & D_1 &= aS_0 + D_0, \\ S_2 &= S_1 + D_1, & D_2 &= aS_1 + D_1, \\ S_3 &= S_2 + D_2, & D_3 &= aS_2 + D_2, \\ &\vdots & &\vdots \\ S_n &= S_{n-1} + D_{n-1}, & D_n &= aS_{n-1} + D_{n-1}; \end{aligned}$$

dann gilt offenbar die Relation

$$D_n^2 - aS_n^2 = (1-a)^n(D_0^2 - aS_0^2)$$

oder, wenn $D_0 = S_0 = 1$ ist,

$$D_n^2 - aS_n^2 = (1-a)^{n+1}.$$

Je weiter man mit der Berechnung fortschreitet, mit um so

grösserer Annäherung wird $\frac{D_n}{S_n}$ als von $\sqrt{a}$ nur wenig verschieden angesehen werden können, denn offenbar kann man der zuletzt erhaltenen Gleichung auch diese Gestalt erteilen:

$$\frac{D_n}{S_n} = \sqrt{a + \frac{(1-a)^{n+1}}{S_n^2}},$$

und bei dem Bruche unter der Klammer wächst der Nenner ungleich rascher, als der Zähler.

Herr Heilermann zeigt nun, dass und wie man durch diese Methode die archimedischen Näherungswerte zum grossen Teile finden könne; sogar solche, die sich derselben auf den ersten Anblick entziehen zu wollen scheinen, müssen sich ihr fügen, wenn man a nicht gleich 3, sondern gleich einer damit zusammenhängenden Zahl setzt. Ueberhaupt empfiehlt es sich in vielen Fällen,

$$a = 1 + \frac{b^2}{c}$$

zu setzen und die beiden Terme c und b entsprechend zu bestimmen. Endlich giebt der Verfasser noch einen Weg an, der mittels geometrischer Betrachtungen von grosser Einfachheit zu einer Kettenbruchentwickelung für $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ führt. Uebersetzen wir diese geometrische Herleitung in die Sprache der Algebra, so gewinnt der Verfasser seinen Kettenbruch dadurch, dass er zuerst

$$\sqrt{a} = \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{a^3 - m^2}{a^2}}$$

und sodann

$$\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{a^3 - m^2}{a^2}} = \frac{m}{a} + \cfrac{\frac{a^3 - m^2}{a^2}}{\frac{2m}{a} + \cfrac{\frac{a^3 - m^2}{a^2}}{\frac{2m}{a} + \cdots}}$$

setzt. Er erhält auf diese Weise, indem er zuerst a mit 2, m mit 2, sodann aber a mit 3, m mit 5 identificirt, die Relationen

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+\cdots}, \qquad \sqrt{3} = \frac{5}{3} + \cfrac{\frac{2}{9}}{\frac{10}{3} + \cfrac{\frac{2}{9}}{\frac{10}{3} + \cdots}}.$$

Mag man auch vielleicht nicht der Ansicht zuneigen, die Alten hätten wirklich in ähnlicher Art rationale Näherungswerte quadratischer Irrationalitäten bestimmt, unter dem rein mathematischen Gesichtspunkt sind diese Entwickelungsmethoden doch immer höchst interessant. Gr.

P. Tannery. L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie. Bord. Mém. (2) IV. 161-195.

Eine eingehende Studie über die arithmetischen Sätze und Beispiele, die gelegentlich (denn ein speciell arithmetisches Werk ist von diesem Mathematiker nicht bekannt) in den geometrischen Schriften des Alexandriners Heron vorkommen. Der Verfasser handelt zunächst von den Massen des Heron, bespricht sodann das Alter, die Reihenfolge und die Authenticität der einzelnen als heronisch bezeichneten Tractate und wendet sich sodann zu den Quadratwurzeln, von denen bei unserem Autor unverhältnismässig mehr ausgerechnete Näherungswerte sich vorfinden, als bei irgend einem anderen Mathematiker des Altertums. Dass derselbe vor der Ausziehung einer Quadratwurzel nicht die mindeste Scheu hatte, geht nach Herrn Tannery allein schon aus dem Umstande hervor, dass zur Berechnung eines Kreisabschnittes Näherungsformeln mit einer und zwei Quadratwurzeln angewandt werden, während doch auch eine rationale Formel zur Verfügung stand. Alsdann werden nicht weniger als 25 Näherungswerte, die da und dort verstreut sind, zusammengestellt und nach gewissen Categorien geordnet. Meistenteils begnügte sich Heron mit der bekannten Näherung

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a},$$

denn dass ihm auch der negative Fall geläufig war, beweist das Beispiel

$$\sqrt{63} = \sqrt{8^2 - 1} = 8 - \frac{1}{16}.$$

War eine höhere Genauigkeit erforderlich, so entwickelte Heron durch mehrmalige Anwendung dieses Gedankens die Wurzel in eine Bruchreihe; überhaupt ist als characteristisch die übrigens auch sonst im Altertum fast ausschliesslich angewandte Darstellung

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \cdots$$

zu bemerken. Gelegentlich machte der alexandrinische Geodät wohl auch von der Identität $\sqrt{\alpha^2 \beta} = \alpha\sqrt{\beta}$ Gebrauch, so z. B. da, wo er

$$\sqrt{108} = \sqrt{6^2 . 3} = 6\sqrt{3} = 6 \cdot \frac{26}{15} = 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

setzt. Nur einige wenige ganz sonderbar verwickelte Näherungswerte spotten jeden Versuchs, sie erklären zu wollen. Von da wendet sich Herr Tannery zu der merkwürdigen Goniometrie Heron's; für sämmtliche reguläre Polygone vom Dreieck bis zum Zwölfeck wird der Flächeninhalt als Function der Seite dargestellt. Es sind somit sämmtliche Werte von cotang $\frac{2\pi}{n}$ ($n = 3, 4, \ldots 11, 12$) numerisch berechnet. Wie diese Berechnung vollzogen worden sein könne, gelingt unserem Gewährsmann in sehr befriedigender Weise aufzuklären. Abgesehen von diesen sämmtlich auf Irrationalitäten des zweiten Grades sich beziehenden Stellen participirt die Arithmetik bei Pappus nur noch mit einer natürlich aus geometrischen Erwägungen hervorgegangenen Aufgabe der unbestimmten Analytik: Es soll das vier Unbekannte umfassende simultane Gleichungssystem

$$a(x+y) = u+v,$$
$$xy = buv$$

ganzzahlig erfüllt werden. Die allgemeinen Lösungsformeln werden hergeleitet, und es zeigt sich, dass diejenigen, auf die

Heron gekommen ist, in ersteren als specielle Fälle enthalten sind. Eine ganz ähnliche, wenn schon etwas allgemeinere Lösung ist 1400 Jahre später von Maximus Planudes gegeben worden.

Gr.

P. Tannery. Sur le problème des boeufs d'Archimède.
Darb. Bull. (2) V. 25-30.

Das sogenannte Ochsenproblem, dessen Text seit Lessing die bedeutendsten Philologen nach Möglichkeit zu reinigen unternommen haben, läuft nach den neuesten und sichersten Conjecturen darauf hinaus, dass neun Gleichungen mit zehn unbekannten Grössen ganzzahlig befriedigt werden sollen, nämlich die folgenden:

$$(1)\quad \lambda = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\varkappa+\xi, \qquad (2)\quad \varkappa = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\mu+\xi,$$

$$(3)\quad \mu = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\lambda+\xi, \qquad (4)\quad \lambda' = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(\varkappa+\varkappa'),$$

$$(5)\quad \varkappa' = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(\mu+\mu'), \qquad (6)\quad \mu' = \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(\xi+\xi'),$$

$$(7)\quad \xi' = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(\lambda+\lambda'), \qquad (8)\quad \lambda+\varkappa = p^2,$$

$$(9)\quad \mu\varkappa+\xi = \frac{q^2+q}{2}.$$

So haben in neuester Zeit besonders Krummbiegel und Amthor (Schlömilch Z., H. Lt. Abt. 25. Band, S. 121 ff., S. 153 ff.) den Sinn der Aufgabe gefasst, welche nach ihrer Ansicht recht wohl von Archimedes selbst gestellt sein könnte. Herr Tannery pflichtet dem bei, und zwar bestimmt ihn hierzu, was sehr plausibel erscheint, wesentlich der Umstand, dass das Problem im gewöhnlichen Sinne nicht lösbar ist, und dass Archimedes selbst einmal ausdrücklich die Erklärung abgegeben hat, er habe ab und zu auch absichtlich zur Erprobung seiner Fachgenossen derartige Aufgaben gestellt. Amthor hat nun dargetan, dass eine Lösung erzielt werden könne, wenn man diejenige Lösung u der Pell'schen Gleichung

$$t^2 - 2.3.7.11.29.353u^2 = 1$$

aufsuche, welche zugleich der Congruenz

$$u \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2.4657)$$

Genüge tut; er geriet dabei auf einen Kettenbruch von 91-gliedriger Periode. Herr Tannery weist darauf hin, dass die ungeheuren Zahlen, welche hier vorkommen, immer noch weit hinter jenen zurückbleiben; von welchen in der Sandrechnung des Archimedes die Rede ist, und er hält es nicht für ausgeschlossen, dass dieser Letztere (natürlich nicht mittels der Lagrange'schen Kettenbruchentwickelung) eine ähnlich hohe Zahl als Lösung erhalten habe. Den Schluss der Abhandlung bilden einige Bemerkungen über die Pell'sche Gleichung. Gr.

L. Matthiessen. Die Methode Tá jàn im Suán-king von Sun-tsè und ihre Verallgemeinerung durch Yih-hing im I. Abschnitte des Tá jàn li schu. Schlömilch Z. XXVI. H. L. A. 33-37.

In Fortsetzung seiner Studien über die unbestimmte Analytik der Chinesen, über deren Ergebnisse er zuerst im Jahre 1875 der Rostocker Philologenversammlung berichtet hatte, schildert uns hier Herr Matthiessen die sogenannte Tá-jàn-Regel des Sun-tsè. Man wusste bereits, dass dieselbe sich wesentlich mit der von Gauss §§ 22ff. der „Disquisitiones arithmeticae" gegebenen Vorschrift zur Lösung des allgemeinen Restproblemes deckte, wenn es sich nämlich darum handelt, alle den linearen Congruenzen

$$Z \equiv a (\mathrm{mod}\ A), \quad Z \equiv b (\mathrm{mod}\ B), \quad Z \equiv c (\mathrm{mod}\ C) \ldots$$

genügenden Zahlen Z aufzufinden. Die elegante Methode des § 36 leistet das Verlangte jedoch nur dann, wenn $A, B, C\ldots$ durchweg teilerfremde Zahlen sind, und das chinesische Verfahren, sonst, wie gesagt, auf derselben Grundlage stehend, bietet insofern einen Vorzug, als es diesen Vorbehalt nicht macht. Wenn nämlich

$$m = \mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_n$$

(unter μ alsdann durchaus relative Primzahlen verstanden) die

kleinste in $A, B, C\ldots$ zugleich aufgehende ganze Zahl ist, so bildet der Chinese die sogenannten „Erweiterungs-Hülfszahlen“ $\alpha, \beta, \gamma\ldots$, welche resp. den Congruenzen

$$\alpha \equiv 1 \pmod{\mu_1}\ ,\quad \beta \equiv 1 \pmod{\mu_2}\ ,\quad \gamma \equiv 1 \pmod{\mu_3}\ \ldots$$

$$\alpha \equiv 0\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{\mu_1}\right),\quad \beta \equiv 0\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{\mu_2}\right),\quad \lambda \equiv 0\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{\mu_3}\right)\ldots$$

genügen, und setzt sodann

$$Z \equiv \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots \pmod{ABC\ldots},$$

wo also offenbar die Aufgabe in grösster Allgemeinheit erfasst und gelöst ist. Ja im Yih-hing, wie Biernatzki sagte, d. h. in dem Lehrbuch des Yih-hing, wird die Schlussformel sogar in einer noch allgemeineren Form geschrieben, welche Matthiessen durch

$$Z \equiv \Sigma\alpha(1 + A - \mu_i)\, a \pmod{ABC\ldots}$$

wiedergiebt.

Zahlreiche Beispiele erläutern die Verwendungsfähigkeit dieser chinesischen Regel. Nicht minder lässt sich bei Benutzung derselben auch sofort erkennen, ob die vorgelegte Aufgabe den lösbaren oder den unlösbaren Fällen angehört. Wenn trotz dieser Vorzüge die hohe geschichtliche Bedeutung dieses Capitels chinesischer Algebra nicht früher erkannt worden ist, so liegt dies daran, dass die Einzigen, die bislang demselben ihre Aufmerksamkeit gewidmet hatten, Biernatzki und Terquem, den Text unrichtig auffassten. Die Regel wird, wie dies ja in der Natur der Sache liegt, im Originale auf chronologische und astrologische Probleme angewendet, und, durch diese Einkleidung getäuscht, war Biernatzki in den Irrtum verfallen, die betreffenden Teile des Buches für eine Einleitung in die Wahrsagekunst zu halten, deren Inhalt es nicht lohne, näher zu untersuchen. Man muss also Herrn Matthiessen und seinem Freunde, dem bekannten mathematischen Sinologen A. Wylie in Shanghai, für diese Ehrenrettung des Sun-tsé sehr dankbar sein; hoffentlich bestätigt sich auch die von Wylie ausgesprochene Hoffnung, demnächst noch weitere Materialien zum besseren Verständnis altchinesischer Zahlenwissenschaft aufzufinden. Gr.

L. Matthiessen. Le problème des restes. C. R. XCII. 291-294, Kronecker J. XCI. 251-262.

Eine dem Sinne nach mit derjenigen Darstellung, über welche soeben referirt ward, übereinstimmende Entwickelung des chinesischen Verfahrens zur Auflösung eines Systemes linearer Congruenzen. Nur ist der Beweisgang, welcher a. a. O. ganz modern gehalten ist, diesmal mehr dem Sinne und der Ausdrucksweise des Originals angepasst. Gr.

O. Stolz. R. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Klein Ann. XVIII. 255-279.

Die vorliegende Arbeit ist die Ausführung der Notiz, über die im vorigen Bande der F. d. M. p. 34 berichtet worden ist. Den Notizen über das Leben Bolzano's und dem Verzeichnis der einschlagenden Schriften desselben folgt eine Darlegung der Bolzano'schen Ansichten im Einzelnen. No. I. betrifft die Gleichheit zweier Zahlen. Hier wird als characteristisch für Bol zano's Darstellung der Satz angeführt: „Wenn in der Gleichung $A+\omega = B+\omega'$ die Grössen ω und ω' so klein werden können, als man nur immer will, während A und B unverändert bleiben, so muss genau A gleich B sein." In No. II wird dann der Begriff der veränderlichen Grösse und in No. III die obere Grenze einer Veränderlichen fixirt. Hier ist namentlich der Lehrsatz zu bemerken: „Wenn eine Eigenschaft nicht allen Werten einer veränderlichen Grösse x, wohl aber allen, die kleiner sind als ein gewisses u, zukommt, so giebt es stets eine Grösse U, welche die grösste derjenigen ist, von denen behauptet werden kann, dass alle kleineren x die Eigenschaft besitzen." No. IV spricht über die Convergenz von Reihen aus reellen Gliedern. Hier wird namentlich nachgewiesen, dass Bolzano die notwendige Bedingung der Convergenz unendlicher Reihen präciser gefasst habe als Cauchy. In No. V findet sich der Begriff der stetigen Function (nach Bolzano) folgendermassen erklärt: „Nach einer richtigen Erklärung... versteht man unter der Redensart, dass eine Function

fx für alle Werte von x, die inner- oder ausserhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetz der Stetigkeit sich ändere, nur so viel, dass, wenn x irgend ein solcher Wert ist, der Unterschied $f(x+\omega)-fx$ kleiner als jede gegebene Grösse gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man immer will, annehmen kann.“ Diese Erklärung wird dann durch den Beweis des Satzes: „Jede Function von der Form

$$a+bx^m+cx^n+\cdots+px^r,$$

in welcher $m, n, \ldots r$ ganze positive Exponenten bezeichnen, ist für alle Werte von x eine nach dem Gesetz der Stetigkeit veränderliche Grösse“ erläutert und in Beziehung auf seine Geltung richtig gestellt. No. VI hat die Ueberschrift: „Ueber die Differentiirung unendlicher Reihen.“ Hier handelt es sich um einen Satz, dem Bolzano besondere Wichtigkeit beigelegt hat. Der Satz heisst: „Wenn eine Function von x, von beliebig vielen, aber nur nach bestimmtem Gesetz zu bildenden Gliedern besteht, $F^r x$, die Eigenschaft hat, dass sie entweder für alle x oder doch für alle, die innerhalb gewisser Grenzen a und b liegen, blos durch die Vermehrung ihrer Gliederzahl r so klein werden kann, als man nur immer will; wenn ferner $f^r x$ eine zweite Function von ebenso beliebiger Gliederzahl bedeutet, die von der ersten auf solche Art abhängt, dass zwischen beiden für jeden innerhalb a und b liegenden Wert von x die Gleichung

$$\frac{F^r(x+\omega)-F^r x}{\omega}=f^r x+\Omega$$

stattfindet, worin Ω so klein werden kann, als man nur immer will, wenn es ω werden kann, so besitzt auch die Function $f^r x$ die Eigenschaft, dass sie für eben dieselben Werte von x, wie $F^r x$, so klein werden kann, als man nur immer will, wenn man die Gliedermenge r gross genug annimmt.“ Der von Bolzano gegebene Beweis wird besprochen und sein Verhältnis zu den Untersuchungen von Dini an's Licht gestellt. Im VII. Paragraphen wird die Rectification der Curven besprochen. Der vom Verfasser angefügte Anhang handelt in seinem ersten Abschnitte über das Problem der Rectification der Curven. Der Verfasser setzt zunächst die archimedische Aufstellung dieses Problems und die

von demselben gemachten Annahmen auseinander und geht dann zu der Darstellung des Problems über, die Duhamel in seinem Werke: „Des méthodes dans les sciences de raisonnement II. p. 411“ davon gegeben hat. Duhamel verlangt zuerst einen Beweis für die Behauptung, dass eine gegebene Curve ein Verhältnis zur Längeneinheit habe. Es handelt sich dabei zunächst um den arithmetischen Sinn der Definition: „Die Länge einer gegebenen Curve ist die Grenze, der sich der Umfang eines der Curve eingeschriebenen Polygons bei unbegrenzter Abnahme der Seiten nähert.“, das heisst also um den Grenzwert einer Function von unbegrenzt vielen, unter einander nur durch eine einzige Bedingung verknüpften Veränderlichen, wenn jede derselben unabhängig von den übrigen zur Grenze 0 convergirt. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer solchen Grenze ist von Duhamel aufgestellt worden, jedoch bedarf der Satz einer weiteren Voraussetzung, mit deren Berücksichtigung derselbe die folgende Form erhält: „Wenn die Summe der positiven Zahlen α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_m$, deren jede sich der Grenze Null nähert und deren Anzahl dabei unbegrenzt wächst, unter diesen Umständen einen endlichen Grenzwert hat, so nähert sich auch die Summe der Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ demselben Grenzwerte, falls der Quotient $\beta_n : \alpha_n$ gleichmässig bezüglich aller Werte $n = 1,2,\ldots$ für $\lim \alpha_n = o$ zum Grenzwerte 1 convergirt.“ Daraus ergiebt sich dann für das eigentliche Ziel der Satz: „Ist der Bogen AB convex, so nähern sich für alle Punkte M desselben die Winkel NMT und $N'MT'$ zwischen der Tangente in M, TMT' und den Sehnen zu beiden Seiten von M, MN und MN' gleichmässig der Grenze Null bei unbeschränkter Annäherung der Punkte N, N' an den Punkt M.“ Nach dem Beweise dieses Satzes geht der Verfasser zu der Arbeit des Herrn P. du Bois-Reymond über diesen Gegenstand (Clebsch Ann. XV. p. 285 s. F. d. M. XII. 1880. p. 299) über. Durch Hinzunahme der hier entwickelten Methode ist dann der Bogen als Zahl definirt, und es ergeben sich die archimedischen Annahmen als notwendige Sätze. Zum Schluss erläutert der Verfasser, wie das Problem der Quadratur, Complanation und Cubirung sich in analoger Weise behandeln lasse. Der zweite

Abschnitt endlich beschäftigt sich mit der Frage, ob der Differentialquotient einer unendlichen Reihe, deren Glieder eindeutige und stetige Functionen einer Veränderlichen $x : f_\mu(x)$ sind, gleich der Summe der aus den Differentialquotienten $f_n'(x)$ gebildeten Reihe ist. Es werden dabei Arbeiten von Duhamel, Bertrand, Liouville, Darboux, Dini berücksichtigt. O.

A. DE GASPARIS. Lettera direttagli dal matematico Hermite, nella quale riconosce che il de Gasparis aveva già dieci anni fa trovato dei risultati importanti, sopra una rimarchevole trascendente. Rom. Acc. L. (3) V. 217.

Aus einem Artikel von Gasparis „Ueber die Berechnung des Wertes von $\Sigma \frac{1}{P_r}$“, datirt 1867, ist zu ersehen, dass derselbe die von Prym mit grossem Erfolge in die Theorie der Euler'schen Function eingeführte Function 10 Jahre vor ihm untersucht und ihre wesentlichsten Eigenschaften aufgestellt hatte. H.

S. GÜNTHER. Beiträge zur Geschichte der neueren Mathematik. Pr. Ansbach.

I. William Wallace, ein Vorläufer der Lehre von den Hyperbelfunctionen. Der Verfasser hebt unter den Arbeiten des auch anderweit bekannten Mathematikers W. Wallace den Aufsatz: „New series for the quadrature of conic sections and the computation of logarithms“ (Trans. of Edinb. VI. 269ff.) als denjenigen hervor, in dem der Begriff der Hyperbelfunctionen bereits deutlich hervortrete. Er analysirt den Inhalt der Arbeit und gelangt dabei zu folgendem Endresultat: „Wallace hat gewisse lineare Grössen, die sich vollständig mit Sinus, Cosinus und Tangens in gewöhnlichem Sinne decken, als Functionen des zur unabhängigen Veränderlichen gewählten hyperbolischen Flächensectors dargestellt; er hat ferner einen vollständigen Abriss jenes For-

melsystems gegeben, welches die Functionen des einfachen Argumentes mit denen des doppelten resp. halben Argumentes verknüpft; er hat endlich Reihen und unendliche Producte ermittelt, als deren Elemente gewisse Hyperbelfunctionen auftreten."

O.

C. TAYLOR. On the history of geometrical continuity. Cambr. Proc. IV. 14-17.

Die Arbeit bezieht sich auf die Geschichte der Brennpunkte. Bei der Ellipse und Hyperbel waren sie Apollonius bekannt, während sie für die Parabel sich bei Pappus finden, der die Eigenschaften der Brennpunkte, der Directrix etc. herleitet. Die Brennpunkte wurden lange Zeit als „puncta ex applicatione facta" und dann in späterer Zeit als „umbilici, foci" und gelegentlich „Pole" bezeichnet. Die Bezeichnung Brennpunkte wurde zuerst von Kepler gebraucht. Die betreffenden Stellen anticipiren das Princip der Continuität in der Anwendung auf Kegelschnitte.

Glr. (O.)

SONNENBURG. Der goldene Schnitt. Beiträge zur Geschichte der Mathematik. Pr. Bonn.

Es wird das Wesen der Teilung einer Strecke nach stetiger Proportion arithmetisch und geometrisch erläutert und sodann untersucht, ob bereits die Alten dieser Construction einen besonderen Wert beigelegt haben. Dies ist nicht der Fall; erst Pacioli brachte sie gegen Ende des XV. Jahrhunderts zu Ehren, und der eigentliche Begründer der Symbolik des goldenen Schnittes ist Kepler. Dies ist wahr, doch scheint uns der Verfasser die bereits sehr abenteuerliche Hinneigung mancher Mathematiker des XVI. Jahrhunderts zur Wertschätzung der sectio divina etwas zu wenig zu berücksichtigen; man denke nur an die Kreisquadratur des Orontius Finaeus. Im weiteren Verlaufe der Abhandlung wird äusserst apodictisch jedes Hervortreten der Streckenteilung nach äusserem und mittlerem Verhältnis bei

Gebilden der Natur und Kunst in Abrede gestellt, was natürlich ist, da der Verfasser es nicht unternahm, in Zeising's Arbeiten den Weizen von der allerdings überwiegenden Spreu zu sondern. Allein angesichts der tiefen Forschungen eines Hultsch über das Hervortreten gewisser arithmetischer Verhältnisse bei Tempelbauten des Altertums sollten doch Kernsätze nicht aufgestellt werden, wie z. B. der folgende S. 20: „Alle die zahlreichen Angaben von Messungen an Bildsäulen und Gruppen, an Tempeln und Palästen, an Skeletten und Präparaten sind wertlos, weil sie mit der Voreingenommenheit für ein solches naturwidriges Gesetz enge verbunden sind.“ Gr.

A. Pánek. Experimentelle Bestimmung der Zahl π.

Cas. X. 272. (Böhmisch.).

Enthält eine historische Skizze über diese Aufgabe und deren Lösung auf dem Wege der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Std.

P. Tannery. Sur la mesure du cercle d'Archimède.

Bord. Mém. (2) IV. 313-339.

Die Methode, deren sich Archimedes zur Bestimmung seiner bekannten Ungleichungen

$$3\frac{10}{70} > \pi > 3\frac{10}{71}$$

bediente, stützt sich auf die Ein- und Umbeschreibung regulärer Polygone von 3.2^n Seiten und darf im Allgemeinen hier wohl als bekannt vorausgesetzt werden. In's Algebraische übertragen läuft sie darauf hinaus, dass zwei Zahlenreihen

$$a_0,\ a_1,\ a_2 \dots a_n;\ \ b_0,\ b_1,\ b_2 \dots b_n$$

successive mit Hülfe der Bestimmungsgleichungen

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1},\quad b_n = \sqrt{a_n^2 + c^2}$$

ausgerechnet werden sollen. Es kommt also wesentlich darauf an, zu zeigen, wie wohl die Griechen zu Archimedes' Zeit sich

bei der Ausziehung einer Quadratwurzel verhielten. Herr Tannery, der sich ein competentes Urteil durch sein Studium der bei Heron so überaus zahlreich auftretenden quadratischen Irrationalitäten gebildet hat, ist nun der Ansicht, dass hierbei zwei Stadien zu unterscheiden seien. Zunächst verschaffte man sich nämlich einen angenäherten Wert mittels eines Verfahrens, welches dem Grundgedanken nach mit dem noch heute üblichen vollkommen übereinstimmt. Wir wollen dies an einem Beispiele klar machen. Bei Archimedes ist $a_0 = 265$, $b_0 = 306$, $c = 153$, somit

$$a_1 = 571,\ b_1 = \sqrt{571^2 + 153^2} = 571 + x.$$

Durch Erhebung in's Quadrat ergiebt sich, wenn das sehr kleine x^2 vernachlässigt wird, unter $\backsim$ ein Zeichen für „annähernd gleich" verstanden,

$$153^2 = 2.571x,\quad x = \frac{23409}{1142} \backsim 20.$$

Hiernach kann $b_1 = 571 + 20 + y$ gesetzt werden. Lässt man bei der nun folgenden Erhebung in's Quadrat y^2 bei Seite, so wird

$$23409 = 400 + 1182y + 22840,$$

$$y \backsim \frac{169}{1182}.$$

Hierfür wird $\frac{1}{7}$ genommen, und es ist somit $571 + 20 + \frac{1}{7} = 591\frac{1}{7}$ der erste Näherungswert für b_1. Dieses Verfahren diente aber, wie bemerkt, nur für den Anfang. Hatte man einen ächten Bruch $\frac{p}{q}$ als ersten Näherungswert für $\sqrt{A}$ erhalten, so bildete man die unbestimmte Gleichung

$$p^2 - Aq^2 = k,$$

wo k eine sehr kleine ganze Zahl bedeutet, und leitete aus ihr durch einfache Processe neue Werte ab, die dem Bruche $\frac{p}{q}$ mit grösserer Annäherung an die Wahrheit substituirt werden konnten. Bei Archimedes war $A = 3$, $k = 1$ oder gleich -2, und es handelte sich für ihn also darum, die beiden — modern gesprochen — Pell'schen Gleichungen

$$x^2 - 3y^2 = 1,\quad x^2 - 3y^2 = -2$$

ganzzahlig aufzulösen. Herr Tannery hält dafür, dass Archimedes völlig im Stande gewesen sei, diese Lösung zu erbringen, und man wird nicht umhin können, ihm beizupflichten, wenn man die völlig elementaren und ganz und gar den diophantischen Mustern sich anschmiegenden Betrachtungen sieht, durch deren Hilfe ersterer seine Auflösung bewerkstelligt. Der Meinung des Berichterstatters zufolge ist keiner der vielen Mathematiker, die sich seit etwa 100 Jahren mit dem Mysterium der archimedischen Quadratwurzeln beschäftigt haben, so tief in dasselbe eingedrungen, wie Herr Tannery. Gr.

S. GÜNTHER. Beiträge zur Geschichte der neueren Mathematik. Pr. Ansbach.

II. Das Alignementsproblem der sphärischen Trigonometrie. Das Problem hat der Verfasser an anderer Stelle (Schlömilch Z. XXVI. 50-56 siehe diesen Band Abschnitt XII. Capitel 2) in folgenden Worten präcisirt: „Es soll in einem sphärischen Viereck, dessen Oberfläche geringer ist, als die einer Halbkugel, der Durchschnittspunkt der Diagonalen gefunden werden, sobald die Coordinaten der vier Eckpunkte mit Bezug auf ein irgendwie gewähltes sphärisch-rechtwinkliges Axensystem gegeben sind.“ Den dort gegebenen historischen Notizen wird ein Exposé der Entwickelung des Problems nachgebracht. Der erste, der dies Problem und zwar nur mit Hülfe eines Fadens als Instrumentes löste, war Michael Mästlin um etwa 1572. Tycho Brahe schon legte dieser Lösung einen so hohen Wert bei, dass er die Arbeit Mästlin's in seinem Werke über den neuen Stern der Cassiopeja wörtlich reproducirte, die grosse Bedeutung dieser Arbeit noch ausdrücklich hervorhebend. Der Würdigung Mästlin's folgt eine Auseinandersetzung der Lösungen von Pingré und De Lambre, denen sich Bessel's Bearbeitung des Problems anschliesst. Zum Schluss giebt der Verfasser die von ihm selbst hergeleiteten Formeln (siehe oben) in einer Form, dass sie sofort zur Rechnung benutzt werden können. O.

C. Taylor. The method of perspective was it known to the Greek geometry? Mess. (2) V. 112-113.

Der Verfasser bemerkt in Bezug auf die im Titel aufgestellte Frage, dass Serenus in seinem Werk: „De sectionibus cylindri" die Eigenschaft eines harmonischen Strahlenbüschels im Raum anwendet, um zu beweisen, dass alle von einem Punkt an einen Kegel gelegten Tangenten ihre Berührungspunkte auf zwei erzeugenden Linien haben, und dass die Idee der Projection durch Strahlen von einem leuchtenden Punkt an einem einfachen Beispiel erläutert wird. Glr. (O.).

S. Roberts. Historical note on Dr. Grave's theorem on confocal conics. Lond., M. S., Proc. XII. 120-122.

Der von Grave im Jahre 1841 ausgesprochene Satz heisst: „Wenn man von einem Punkte einer Ellipse zwei Tangenten an eine confocale Ellipse zieht, so ist der Ueberschuss der Summe dieser beiden Tangenten über den von ihnen abgeschnittenen Bogen constant." Dieser Satz ist nun, wie der Verfasser zeigt, nur ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes, den Leibniz in einem Briefe vom 3. Januar 1704 an Johann Bernoulli mitgeteilt hatte.

O.

P. H. Schoute. De kegelsneden in de projectivische meetkunde. Groningen. J. B. Wolters.

Rede gehalten beim Antritt der Professur an der Universität in Groningen. Sie giebt eine geschichtliche Uebersicht des Entwickelungsganges der Behandlung der Kegelschnitte nach der projectivischen Methode und eine Auseinandersetzung des Wertes dieser Methode auch in ihrem Verhältnis zur analytischen.

G.

S. Günther. Beiträge zur Geschichte der Mathematik. Pr. Ansbach.

III. Ein vergessenes Grundgesetz der Mechanik. Nach einleitenden Worten über die Grundgesetze der Mechanik überhaupt hebt der Verfasser hervor, dass Basedow, der berühmte Gründer des Philanthropinismus, auch ein recht tüchtiger Mathematiker gewesen sei, was freilich wenig bekannt zu sein scheine. Basedow hat namentlich auch ein Grundgesetz aufgestellt. Dasselbe heisst: „Stossen zwei Strecken unter einem beliebigen hohlen Winkel aneinander und projicirt man beide auf eine durch die Winkelspitze gehende, in den hohlen Winkelraum fallende Gerade, so ist die Summe der Projectionen dann ein Grösstes, wenn jene Gerade mit der Diagonale des aus den beiden Strecken construirten Parallelogramms zusammenfällt.“ Dieser Grundsatz ist dann im dritten Drittel des achtzehnten Jahrhundert von Busse, Professor an der Bergakademie in Freiberg, wesentlich erweitert worden. O.

C. Isenkrahe. Euler's Theorie von der Ursache der Gravitation. Schlömilch Z. XXVI. H. L. A. 1-19.

Der Verfasser sucht nachzuweisen, dass Euler bereits gegen die Newton'sche Ansicht von der Fernwirkung Opposition gemacht habe. O.

J. de Andrade Corvo. Des lignes isogoniques au seizième siècle. Lisb. J. 1881.

Der Verfasser giebt hier zunächst eine Geschichte der Entdeckung der Declination der Magnetnadel und der Versuche, aus dieser Declination die Längen auf dem Meere zu bestimmen. Er giebt dann eine Tabelle der von portugiesischen Seefahrern des 15. und 16. Jahrhunderts gemachten Beobachtungen. Diese Tabelle enthält die Beobachtungen von D. João de Castro (1538 und 1541) auf dem Wege von Indien nach dem Roten Meere, von Vicente Rodrigues (1572) auf dem Wege von Indien; von Gaspar Reimão (1598), von Aleixo de Motta (1588-1623) und endlich die von Kircher (1539-1640) veröffentlichten Beobachtungen, die vorzugsweise von portugiesischen Seefahrern herstammen. Tx. (O.).

F. Folie. Histoire de l'astronomie en Belgique. Belg., Bull. (3) II. 661-678.

Vor dem neunzehnten Jahrhundert hatten astronomische Beobachtungen in Belgien, abgesehen von einigen Schriftstellern (wie Fromond und den beiden van Laensberghe) keine Stelle. Jetzt giebt es dagegen ausser der königlichen Sternwarte zu Brüssel mehrere Privatobservatorien, und viele Schriftsteller haben astronomische und geodätische Fragen behandelt. Diese sind: Adolf Quetelet, Ernst Quetelet, Houzeau, Meyer, Schaar, Mailly, Montigny, Terby, de Boe, van Ertborn, van Monckhoven, van Tricht, Spée, Termet (und endlich Folie selbst).

Mn. (O.).

R. Wolf. Beiträge zur Geschichte der Astronomie. Astr. Viertschr. XV. 363-371. 1880.

S. Günther. Eine Ortsbestimmung der sphärischen Astronomie. Schlömilch Z. XXVI. 50-56.

Siehe Abschn. XII. Cap. 2.

W. Matzka. Zur christlichen Zeitrechnung und für deren Verbesserung. Prag. Abh. (6) X. No. 5.

Siehe Abschn. XII. Cap. 2. O.

R. Menge und F. Werneburg. Antike Rechenaufgaben. Ein Ergänzungsheft zu jedem Rechenbuch für Gymnasien. Leipzig. Teubner.

Das Ziel, welches sich die Verfasser bei Abfassung dieses Rechenbuches steckten, Schülern der unteren Gymnasialklassen ein Uebungsbuch in die Hand zu geben, dessen allgemeine Haltung sich dem sonstigen Studiengange der Knaben vollständig anpasst, haben dieselben erreicht. Sämmtliche Rechnungsbeispiele,

545 an der Zahl, erinnern an die Antike. Römische und griechische Masse, Münzen und Zeiteinheiten bilden für jede Aufgabe den Text. Sachlich kommen alle Teile der niederen Rechenkunst zur Geltung: die vier Species in ganzen Zahlen und Brüchen, Verwandlungen aller Art, wie sie die strenge Durchführung der Einheitsmasse im Gebiete der Neuzeit mehr und mehr unmöglich macht, ferner Decimalbrüche, Schlussrechnung und Proportionen, Zins- und Gesellschaftsrechnung, endlich die Kettenregel. Ein Anhang mit Tabellen enthält die vollständige Zusammenstellung der Data, die im Buche selbst Verwendung finden können. Wie sehr das Büchlein Allen erwünscht kommt, die an der oft sehr banausischen Form vieler Rechenbücher kein Gefallen finden, erhellt schon aus dem Umstande, dass es gleich nach seinem Erscheinen von Dr. F. Wolrab in Pesth in's Ungarische übersetzt wurde. Gr.

F. J. Studnička. Ueber das Sexagesimalsystem.
Cas. X. 87. (Böhmisch).

Enthält historische Nachrichten über dieses System überhaupt und den diesbezüglichen Fund und Bedeutung der Tafeln von Senkereh im Jahre 1854 insbesondere und zwar nach Cantor's ausgezeichneter Geschichte zusammengestellt. Std.

F. Hultsch. Miscelle. Schlömilch Z. XXVI. H. L. A. 38-39.

Bei seinem ersten Versuche, das von C. Henry herausgegebene „Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus“ in einigen Textesstellen zu verbessern, hatte Herr Hultsch (24. Band der nämlichen Zeitschrift, H. L. A. S. 199ff.) angenommen, es sei darin die Teilung des Kreises in 60 gleiche Teile zu Grunde gelegt. Herr Tannery hat aber durch eine glückliche Conjectur herausgebracht, dass eine Teilung des Kreises in wirkliche Grade gemeint sei; Herr Hultsch acceptirt Tannery's Lesart und gelangt so wenigstens für eine sehr schlimme Stelle zu einer ganz befriedigenden Interpretation. Gr.

D. Bierens de Haan. Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. Amsterdam Versl. en Meded. XVI. 1-44, Arch. Néerl. XVI. 443-462.

Fortsetzung der bekannten Beiträge zu der Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften in den Niederlanden.

XIX. Handelt über den ersten Gebrauch der Isohypsen (Linien von gleichem Niveau) durch niederländische Ingenieure. Es wird gezeigt, dass sie zuerst durch Bolstra (1704-1776) und Cruquius (1678-1754) gefunden worden sind und von dem letzteren gebraucht werden beim Zeichnen der Karten für den Lauf und die Mündung der Flüsse, so wie bei denen der holländischen Seen. Ein merkwürdiges Kärtchen von Bolstra über die Merevede, auf welchem solche Niveaulinien vorkommen, ist im Abdruck der Abhandlung beigegeben.

XX. Dieser Aufsatz ist den ältesten Seekarten (1540) und besonders denjenigen von Willem Jansz. Blaeu (1605) gewidmet. Der bekannte Verfertiger von Seekarten war 1571 in Alkmaar geboren und richtete später in Amsterdam eine Druckerei ein, die auch im Ausland grosse Berühmtheit erlangte, besonders sind seine Atlanten sehr gesucht. Er starb 1638 in Amsterdam. Er gab drei Werke mit Seekarten heraus, die wiederholt neu gedruckt wurden und lange Zeit im Gebrauch blieben. Eine ausführliche Beschreibung dieser Werke schliesst sich hier an.

G.

Capitel 2.
Philosophie. (Methodik, Pädagogik).

D. J. Korteweg. De wiskunde als hulp wetenschap. Amsterdam. Van Heteren.

Rede, gehalten bei dem Antritt der Professur an der Universität zu Amsterdam. Sie beschäftigt sich mit den beiden

Richtungen in der Behandlung der Mathematik, die eine um ihrer selbst willen, die andere als Hülfswissenschaft. Hier wird sie besonders vom zweiten Gesichtspunkt aus betrachtet und ihr Nutzen für die Physik nachgewiesen. G.

O. Plch. Ueber eine gemeinschaftliche Deductionsform gewisser Lehrsätze und Formeln. Cas. X. 201, 252. (Böhmisch.)

Der Aufsatz bezieht sich auf die Ableitung von Ausdrücken, bei welchen constante Verhältnisse variabler Grössen auftreten. Std.

C. H. Judson. Investigation of the mathematical relations of zero and infinity. Anal. VIII. 105-113.

Kritik der Arten, wie das unendlich Grosse und unendlich Kleine von den Herren Daires, Price und andern behandelt worden ist. Jn. (O.).

J. Worpitzky. Zahl, Grösse, Messen. Festschrift. Berlin. (Fried. Werd. Gymn.).

Herr Worpitzky unterwirft in der kleinen Abhandlung die Untersuchungen Riemann's und Helmholtz' über die Grundbegriffe der Geometrie einer Kritik, deren Fundament die Unterscheidung von Anschauung und Begriff, von Grösse und Zahl ist. Referent hält diese Unterscheidung, die zum Teil auf Kant zurückführt, für richtig und für das einzige Mittel die Uebergriffe der Analysis, die ihr Capital zusammenborgt, zurückzuweisen. Riemann's Unterscheidung der discreten und stetigen Mannigfaltigkeit stellt zwei Vorstellungen auf gleiche Stufe, die vielmehr im Verhältnis sehr mittelbarer Ueber- und Unterordnung stehen, und deren wesentliche Eigenschaften aus verschiedenen Bewusstseinsthätigkeiten hervorgehen. Worpitzky's Behauptung, dass die Arithmetik aus sich allein heraus nichts für die Erkenntnis des eigentlichen Wesens geometrischer Anschauungen leisten kann,

scheint dem Referenten richtig. Der allgemeine Zahlbegriff ist allerdings der allgemeinste Begriff, den unser Bewusstsein besitzt und steht so weit über der anschaulichen stetigen Mannigfaltigkeit, dass diese durch analytische Formeln noch gar nicht berührt wird. Dem entsprechend würde Ref. freilich die Arithmetik nicht mit Worpitzky als Wissenschaft des Messens gelten lassen, wenn auch zuzugeben ist, dass die Entwickelung der Rechnungsoperationen im Anschluss an die ausserarithmetischen Beziehungen und Verwendungen der Arithmetik vor sich gegangen ist. Der Versuch, „die Discussion eines widerspruchlos definirten Begriffs zur genetischen Definition einer Anschauung zu erheben“ und andersartige räumliche Anschauungen als möglich hinzustellen, kann nur in der Beschränkung zugelassen werden, dass nach Wolff's Lehre Möglichkeit und Denkbarkeit für identisch gehalten werden. Eine solche Erklärung aber hat Kant als unzureichend angesehen und die Annahme der Möglichkeit einer Vorstellung von dem Nachweis der Uebereinstimmung mit den formalen Bedingungen der Erfahrung abhängig gemacht. Man kann mit Kant Anschauungen nicht eher für möglich halten, als man nicht den Nachweis der Zusammenfassbarkeit des Ganzen in der Anschauung geliefert hat. So wenig der Nachweis des Rationalismus, dass unsere Raumanschauung ein ewiges und notwendiges Hilfsmittel der Erkenntnis sei, zu Recht besteht, so wenig ist auch der vollständige Nachweis der Möglichkeit eines andersartigen Hilfsmittels gelungen. Wir stehen vor einem Factum und können uns die Vertauschbarkeit mit einem andersartigen Factum wohl denken, aber nie vorstellen. Mi.

H. Fr. Th. Beyda. Die imaginären Grössen und ihre Auflösung. Stuttgart. J. B. Metzler.

Wir lesen in der Schrift Beyda's folgende Sätze:

S. 10: „Wir behaupten, dass nicht immer $(-4)(-4) = +16$, sondern dass $(-4)(-4)$ auch gleich -16, ja selbst, dass $(+4)(+4) = -16$ sein kann.“

S. 45: „$\sqrt{-16} = -\pm 4$."

S. 14: „Da

$$\sqrt{+16} = \pm 4, \text{ aber } \sqrt{-16} = \mp 4,$$

und

$$\mp 4 = -\pm 4$$

ist, so ist auch im Allgemeinen

$$\sqrt{-16} = -\sqrt{16}.“$$

S. 50: „So ergiebt sich, dass

$$i = i^2 = i^3 = i^4 = i^m$$

ist."

S. 59: „Waren schon durch Euler und Andere die unrichtigsten Formeln und Rechnungen mit solchen (imaginären) Grössen in die Mathematik eingeführt worden, so ist diese Unrichtigkeit und Begriffsverwirrung durch Gauss, fast möchte ich sagen, bis zum tollsten Unsinn gesteigert worden." Mi.

O. Donadt. Das mathematische Raumproblem und die geometrischen Axiome. Leipzig. A. Barth.

Der Verfasser beschränkt sich auf das logisch-mathematische Raumproblem. Nach einer kurzen geschichtlichen Uebersicht über die Entwickelung des Problems (S. 6-21) unterzieht er die Grundbegriffe der Geometrie und deren Anordnung einer Kritik (S. 21-61) und gewinnt zuletzt Definition und Axiomensystem der Raumanschauung (S. 61-68). Die Arbeit bezeichnet einen nicht zu unterschätzenden Fortschritt in der Lösung des Problems; in mathematischer Beziehung erscheint sie völlig correct, in philosophischer vielleicht nicht ganz ausreichend. Donadt glaubt die begriffliche Natur des mathematischen Raumes beweisen zu können, wie dem Ref. scheint, mit Unrecht und ohne gehörige Würdigung des Kant'schen Unterschiedes von der discursiven und sinnlichen Erkenntnis (S. 21-26). Aber mit Recht bestreitet er, dass die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit der Gattungsbegriff für den Raum sei (p. 27—33). Er zeigt die Verschiedenheit des Farbensystemes und des Raumes, polemisirt gegen die Schlüsse aus anders-dimen-

sionalen Wesen und hebt die Unmöglichkeit der sinnlichen Vorstellung von Anschauungen, für die wir kein Analogon haben, hervor. Gewiss ist die Raumanschauung einzig in ihrer Art. Er zeigt ferner durch mathematische Untersuchung, dass der Wert des Krümmungsmasses nicht als Einteilungsgrund für die n-fache Mannigfaltigkeit dienen kann (p. 33-50), und macht auf den Unterschied und die Berechtigung des von ihm im Anschluss an Gauss gewonnenen Ausdrucks für das Krümmungsmass im Gegensatz zu dem von Riemann so bezeichneten Ausdruck aufmerksam. Er findet, und hierdurch giebt er eine, wie dem Ref. scheint, richtige Erklärung der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms, den wahren Grund für die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen Axiomen in dem Ausgehen von zwei elementaren Masstäben in der Geometrie, der geraden Linie und dem Winkel. Durch das Parallelenaxiom wird (und ein Parallelenaxiom ist jeder Geometrie notwendig) die logische Verknüpfung der beiden qualitativ verschiedenen Masstäbe gegeben. Der innere Kern desselben, wie man es auch formulirt, ist jeder Geometrie, die über die gerade Linie hinausgeht, notwendig. Nach des Ref. Urteil ist damit in der Tat der ganze Wert und die Stellung des Axiomes richtig bestimmt. Die empiristischen Folgerungen aus den Untersuchungen über die Axiome der Geometrie weist Donadt mit Recht zurück, während er anderseits den bisherigen Untersuchungen das Verdienst zuschreibt, die Mathematik um Begriffe bereichert und eine wichtige Untersuchung im Fluss erhalten zu haben. Was Referent an Donadt's Arbeit vermisst, ist eine schärfere Untersuchung über das Verhältnis der analytischen Untersuchungen zum Raumbegriffe selbst. Aus einer solchen hätte sich vielleicht ein anderes Urteil über die begriffliche Natur des Raumes ergeben. Mi.

R. Zimmermann. Henry More und die vierte Dimension des Raumes. Wien. C. Gerold's Sohn.

Die interessante kleine geschichtsphilosophische Abhand-

lung Zimmermann's führt den Nachweis, dass Henry More (geb. 1614 zu Grantham) mit Unrecht zu den Begründern und Vertretern der Lehre von der vierten Dimension des Raumes gerechnet wird. Henry More sucht das seine Zeit lebhaft beschäftigende Problem vom Zusammenhange der Seele und des Körpers des Menschen im Gegensatz zur cartesianischen Lehre auf eigene Weise und zwar mit Hülfe der englischen empiristischen Methode zu lösen, und er gelangt seltsamer Weise mit dieser zu einer mystischen Naturerklärung. Der Spiritismus unserer Zeit, soweit derselbe überhaupt eine scheinbar wissenschaftliche Grundlage besitzt, lässt sich mit viel grösserem Rechte auf diese Naturerklärung, als, wie es vielfach geschieht, auf Kant zurückführen. Nach der einem ernste wissenschaftlichen Angriff wohl kaum momentan Stand haltenden und von Zimmermann gebührend kritisirten Ansicht More's beruht der Zusammenhang von Geist und Materie auf einem gemeinsamen Bestandteil, der Ausdehnung. More trennt Ausdehnung und Raumerfüllung, die für Cartesius ein und dasselbe sind. Körperlichkeit ist der Materie zuzuschreiben, aber Ausdehnung ist Eigenschaft des immateriellen Geistes, den More im Gegensatz zu den Anhängern der mechanischen Naturerklärung, in seinem System der Physik nicht entbehren zu können glaubt. More verwirft den Cartesianischen Dualismus, während er von der spinozistischen, oder gar kantischen Lösung des Problems durchaus keine Vorahnung hat. Geist und Raum sind nach More wesensverwandt und beide sind der Materie als einem dritten entgegengesetzt. Beide sind Realitäten, beide unkörperlich; aber der Geister sind viele, der Raum ist nur einer; die Geister besitzen Beweglichkeit und von innen heraus bestimmte Bewegung, während der Raum unbeweglich ist. Die immaterielle Natur des Raumes macht ihn zu gleicher Zeit zur Aufnahme der wesensverwandten immateriellen Geisterwelt und der von jener wesenhaft verschiedenen materiellen Welt der Körper fähig. Da das Gesetz der Undurchdringlichkeit nur für die materielle Körperwelt Geltung hat, so steht nicht im Wege, dass in demselben Raume, welchen die Geisterwelt bereits erfüllt, eine andere, die materielle Körperwelt zu gleicher Zeit vorhanden

sei. Die Möglichkeit dieses Vorhandenseins zweier Welten im Raume erklärt sich nun More durch etwas, was er vierte Dimension nennt. Aber er nimmt diese vierte Dimension weder als wesensverwandt mit den drei bekannten Dimensionen des Raumes an, noch bedient er sich ihrer, um ein sonst unbegreifliches Ein- und Austreten der Geisterwelt in und aus der Körperwelt damit zu erklären. Die vierte Dimension ist ihm die Veränderlichkeit der Wesensdichtigkeit (spissitudo essentialis) und er schreibt diese quarta dimensio gar nicht dem Raume, sondern den Geistern zu. Vermöge dieser vierten Dimension können die Geister die Dichtigkeit ihres Wesens in dem Grade ändern, dass das aufzunehmende Plus der Körperwelt in dem schon von immateriellen Geistern erfüllten, seiner Ausdehnung nach bei jener Veränderung der Geister unverändert-bleibenden Raume Platz findet. Nur die Geister also sind vier-dimensional, während Körperwelt und Raum selbst drei-dimensional sind. Die vierte Dimension ist von More also nicht im Sinne einer vierten Richtung im Raume eingeführt worden. Materielle und geistige Welt verhalten sich nach ihm wie Undurchdringliches und Durchdringliches, jene ist ein todtes Extensum von absoluter Dichtigkeit, die andere ein lebendigès Extensum, das unbeschadet seiner Extension seine Dichtigkeit verändern kann. Zimmermann hat völlig Recht, wenn er behauptet, dass More nach dieser Beschaffenheit seiner Lehre weiterhin nicht mehr unter den Zeugen für die vierte Dimension im Sinne des Spiritismus angeführt werden darf. Man muss Zimmermann für die Belehrung über den halbvergessenen und von Zöllner mit Unrecht als Vorläufer seiner Raumtheorie angerufenen englischen Spiritualisten dankbar sein.

Mi.

M. Sibiriakoff. Preuve élémentaire de la proposition fondamentale de la théorie des lignes parallèles. Petersburg.

Sibiriakoff beweist das bekannte Parallelentheorem auf elementarem Wege unter Voraussetzung von Begriffen und Axiomen,

die nach seiner Meinung, von der Parallelentheorie, unabhängig sind. Ref. kann sich von dieser Unabhängigkeit nicht überzeugen, da sich unter den Voraussetzungen unter andern folgende befinden: IV. In jedem Dreieck ist der Aussenwinkel grösser als jeder der inneren nicht anliegenden Dreieckswinkel. VII. Der kürzeste Abstand eines Punktes von einer Geraden ist das Lot auf dieselbe. VIII. Es existirt eine Linie, die den Kreis in einem Punkte berührt etc. Trotz der Antworten, die Sibiriakoff p. 5-9 Herrn Bouniakowsky auf seine Einwendungen giebt, muss also Referent die Möglichkeit eines Beweises des Parallelentheorems bezweifeln. Mi.

A. Macfarlane. Algebra of relationship. Parts II. and III. Edinb. Proc. X. 5-13, 162-173.

Fortsetzungen der Arbeit: „On a calculus of relationship" siehe F. d. M. XI. 1879. p. 50-51. Cly. (O.).

J. Venn. On the various notations adopted for expressing the common propositions of logic. Cambr. Proc. IV. 36-47.

Der Verfasser stellt eine Liste auf über die verschiedenen symbolischen Formen, welche im Laufe der Zeit für denselben Satz gebraucht worden sind. Er wählt die universelle Negation (nicht S ist P) als diejenige aus, welche am einfachsten und wenigsten zweifelhaft unter allen Formen ist. Das Verzeichnis besteht aus 26 Bezeichnungen, welche in 6 Klassen geteilt sind. 1) „Existential": Boole, Macfarlane. 2) „Identity": Boole, Wundt, Jevons, Delboeuf, Murphy, Halland, Drobisch, Segner. 3) „Implication": Darjes, Grassmann, MacColl, Peirce, Frege. 4) „Common form convertible": De Morgan, Wundt, Ploncquet, Bentham, Hamilton. 5) „Notional": Leibniz, Lambert. 6) „Non descript and arbitrary": Maimon, Ploncquet, Chase. Jede Bezeichnung wird genau beschrieben. Glr. (O.).

J. VENN. On the employment of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions. Cambr. Proc. IV. 47-59.

Der Verfasser giebt einen historischen Ueberblick des Gebrauchs geometrischer Diagramme zur Darstellung logischer Sätze. Diese wie die obige Arbeit stehen auch in des Verfassers Werk: „Symbolic Logic“. Glr. (O.).

C. S. PEIRCE. On the logic of number. Sylv., Am. J. IV. 85-96.

Peirce versucht in dem Artikel einige der arithmetischen Fundamentalsätze $(x+y)+z = x+(y+z)$; $x+y = y+x$ etc. aus wenigen Grundsätzen in logischer Form zu beweisen. Ref. scheint diese Einführung der logischen Schulform in die Anfänge der Arithmetik wohl die Schwierigkeit des Verständnisses, aber nicht die Sicherheit der Sätze zu erhöhen. Die in der Arithmetik gegebene Ableitung der Fundamentalformeln genügt vollkommen, und der Zweifel eines „renowned English logician“ an der Wahrheit derselben verdient wohl kaum Beachtung.

Mi.

H. MC COLL, R. HARLEY. Solutions of a question (6353). Ed. Times XXXIV. 51, 74.

Jedes x ist entweder y und nicht z oder z und nicht y. Jedes wx ist entweder y und z oder keins von beiden. Jedes xy, welches nicht w ist, ist z. Kein x, das weder y noch w ist, ist z. Dann giebt es überhaupt kein x. O.

J. HOÜEL. La experiencia en las ciencias exactas. Cron. Cient. IV. 105-108, 129-132.

Siehe F. d. M. VII. 1875. p. 28. O.

O. SCHMITZ-DUMONT. Die Einheit der Naturkräfte.
Berlin. Duncker.

Wer mit Kant einverstanden ist, dass in der Tat nicht die Natur dem menschlichen Geiste, sondern der menschliche Geist der Natur einen Teil ihrer Gesetze vorschreibe, der wird, so beschränkt auch sein Rationalismus ist, und so sehr er an der Notwendigkeit der Erfahrung festhält, den Grundgedanken Schmitz-Dumont's, dass der dem kindlichen Bewusstsein auffallende Parallelismus intellectueller mathematischer und empirisch beobachteter Gesetze nicht zufällig sei, sondern dass die Natur, soweit sie von uns erkannt wird, auch den Gesetzen des Intellects gehorchen muss, dass in gewissem Sinne der Geist den Körper schaffe, für vollkommen zutreffend erklären, der wird auch ferner mit Schmitz-Dumont die Möglichkeit anerkennen, dass da, wo die empirische Forschung vor einer Vielheit von Kräften und ersten Ursachen Halt macht, nur die logische und mathematische Forschung, mit ihrem Rüstzeug ausgestattet, weiter vordringen und bis zu einer einheitlichen letzten Ursache gelangen könne. Von solchem philosophischen Standpunkte aus wird man den Versuch Schmitz-Dumont's, die verschiedenen von der Physik angenommenen Grundkräfte auf eine Urkraft zurückzuführen und die Begriffe von Atom, Kraft, Materie etc. zu berichtigen, nicht ohne Interesse und Anerkennung verfolgen können. Der Empirist reinsten Wassers wird freilich auf Schritt und Tritt den Ausführungen Schmitz-Dumont's widersprechen müssen. Da Referent auf jenem an Kant anknüpfenden Standpunkte steht, so begnügt er sich hier mit jener allgemeinen Anerkennung. Zweifelhaft bleibt ihm allerdings vieles Einzelne. Ueber die Berechtigung der Annahme einer allgemeinen abstossenden oder einer anziehenden Urkraft mag sich Schmitz-Dumont mit Gilles auseinandersetzen. Referent erkennt keineswegs die Identität des Satzes vom Widerspruch und des Causalitätsgesetzes an und bestreitet die Möglichkeit, räumliche Constructionen aus logischer Synthese oder Zahlenberechnungen abzuleiten, findet auch die Vorwürfe, die den arithmetischen Operationszeichen gemacht werden, nicht ganz

gerechtfertigt. Die Grundidee der Arbeit Schmitz-Dumont's als Ziel und Aufgabe erkennt Referent als richtig an.

Mi.

GILLES. Ueber die Newton'sche Anziehungskraft.
Pr. Essen.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass sich die Newton'sche Anziehungskraft nicht auf Bewegung zurückführen lasse, sondern die Urkraft der Natur sei. Er bekämpft und widerlegt die Aetherstosstheorie Isenkrahe's und die Astraldrucktheorie Anderssohn's. Er sucht die dunkelen Punkte der Newton'schen Anziehungskraft durch Berichtigung der Begriffe vom Atom und vom Raum aufzuhellen. Er definirt das Atom als Kraftcentrum mit unendlich grosser Wirkungssphäre, als nach einem Centrum ziehende Anziehungskraft. Er ändert, auf Kant bauend, die Vorstellung vom Raume, indem er in dem psychischen Gebilde neben der Vorstellung des Auseinanders auch die des Zusammens, des Ineinanders findet und dem entsprechend in dem Ansich der Dinge einen Zusammenhang, eine Beziehung auf das All entdeckt. Der empirische Raum ist ebenso, wie der ideale Raum ein Ineinander beim Auseinander. Man muss dem Verfasser zugeben, dass beim Begriffe des Raumes bisher einseitig und unvollständig die Mannigfaltigkeit der Synthesis vor der Einheit des Apperceptionsprocesses betont ist. So sonderbar der Satz: „Ein Auseinander im strengen Sinne giebt es nicht“ auch klingt, so ist er doch vom reinen, wie empirischen Raume vollständig richtig. Aus seiner Definition von Atom und Raum gewinnt der Verfasser das Anziehungsgesetz und führt schliesslich auf die Anziehungskraft die Erscheinungen, welche abstossenden Kräften zugeschrieben werden, und die Cohäsionskraft zurück. Bei dem letzteren Versuche gelangt der Verfasser zu einer Reihentheorie über die Anordnung der Materie innerhalb eines Körpers und versucht nach dieser Reihentheorie die Erscheinungen der Krystallisation zu erklären. Auch die Erscheinungen des Lichtes, der Wärme, der Elektricität und des Magnetismus glaubt der Ver-

fasser, wie er am Schlusse andeutet, in ihrem letzten Grunde auf die Newton'sche Anziehungskraft zurückführen zu können.

Mi.

J. Delboeuf. La liberté et ses effets mécaniques.
Belg. Bull. (3) I. 463-479.

Der Verfasser betrachtet den Menschen als eine Kraft, welche den sonstigen Naturkräften analog ist, jedoch in jedem beliebigen Augenblick des Wollens wirken kann. Mn. (O.).

S. Dickstein. Ueber den mathematischen Unterricht in den unteren Gymnasial- und Realklassen.
Warsch. Paed. J. 1881. (Polnisch.).

Dn.

J. Diekmann. Die Determinanten in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der 35. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Stettin.
Hoffmann Z. XII. 95-99.

Entgegen einer Bemerkung von Erler zu einem früheren Artikel in Hoffmann's Z. XI. 173. betont der Verfasser die Wichtigkeit der Determinanten für die Lehre von den quadratischen Gleichungen, indem sich die allgemeine Bedingung, unter der ein System von zwei Gleichungen 2ten Grades ohne cubische Resolvente lösbar sei, in Determinantenform darstelle; er constatirt überdies, dass die drei Typen dieser Systeme von ihm zuerst aufgestellt seien, die Plücker'schen aber nur zwei Specialfälle vertreten. Der durchgehende Gesichtspunkt des Artikels ist die Frage, ob sich die Determinantenlehre für den Schulcursus eignet. Die Section hat dies verneint. Doch ist dabei zu beachten, dass es sich nach Diekmann'scher Auffassung nur um Verbindung mit der Lehre von den Gleichungen, also um Aufnahme in den Cursus von Secunda handelte, während vom Anschluss an die Combinatorik im

Cursus von Prima, wo die Frage eine sehr verschiedene ist, nicht gesprochen zu sein scheint. H.

KAISER. Ueber einige Hauptpunkte des geometrischen Unterrichts. Pr. Remscheid.

Der Verfasser hält einen propädeutischen Anschauungsunterricht für dringend geboten, als den Weg, auf dem das Vorurteil besiegt werden müsse, dass nur besondere Naturanlagen zur Mathematik befähigten. Derselbe soll nicht unmerklich in den exact logischen Unterricht übergeführt, sondern davon streng geschieden werden. Der Beweis soll bei denjenigen Sätzen beginnen, wo die Anschauung zur Einsicht nicht ausreicht, wo also der Zweck des Beweises von Anfang an ersichtlich ist. Vorher soll auch nicht der Schein erweckt werden, dass etwas bewiesen wäre. Es würde zur Klarheit des Folgenden sehr beitragen, wenn der Verfasser diese richtige Bemerkung vom Beweise auch auf die Definition als logisches Element ausgedehnt hätte. Gerade Linie und Richtung sollen nämlich mitgebrachte Grundbegriffe sein, der Winkel schon auf dem propädeutischen Standpunkt als Richtungsunterschied „definirt" werden. Dass eine solche Definition unrichtig ist, leuchtet ein. Hätte der Verfasser erklärt, es solle auch nicht der Schein erweckt werden, als wenn etwas definirt würde, so lag es nahe, das Verhältnis richtig zu stellen. Nicht durch den Richtungsunterschied wird begriffen, was ein Winkel ist, sondern umgekehrt der Winkel ist das Constructionsmittel, um den Richtungsunterschied aufzufassen und dadurch erst den Sinn der Richtung als eines mathematischen Begriffs zu verstehen. Dann wird es sofort deutlich, dass die Länge der Schenkel gleichgültig ist; ausserdem ist man dann besser orientirt, um zu wissen, welche Definitionen und Beweise in der exacten Lehre für die Winkelsätze erfordert werden. Der Parallelensatz und seine nächsten Consequenzen für das Dreieck werden im propädeutischen Unterricht behandelt, sie sollen erläutert, nicht bewiesen werden; die Auskunftsmittel von Thibaut und S. Günther soll man dem Anfänger nicht darbieten. In Betracht der Methode

der logisch exacten Geometrie will der Verfasser keine allgemeinen Grundsätze aufstellen, sondern nur specielle Punkte besprechen. Der erste ist die Incommensurabilität. Hier enthüllt er treffend und ausführlich die von Reidt (aber auch von andern Schriftstellern) gehegte Illusion, als ob das arithmetische Verfahren der Aufsuchung des grössten gemeinsamen Factors, auf Linien angewandt, ein Kriterium der Commensurabilität darböte. Er entscheidet sich dafür, den Fall der Incommensurabilität ganz zu ignoriren, weil er in der Wirklichkeit nie constatirt werden kann.

Es ist dies der einzige Punkt, in welchem er die wissenschaftliche Wahrheit factisch, und zwar hier nur gegen Rücksichten der Bequemlichkeit, zurücksetzt, ohne es auszusprechen. In der Kritik der Ansichten von Reidt und Duda nimmt er hingegen stets den exact logischen Standpunkt ein. Dass irrationale Verhältnisse nur als Wurzelgrössen vorkämen, scheint eine nicht wohl überlegte Behauptung zu sein. Nicht nur das Verhältnis von Kreis und Radius widerlegt sie, es ist auch überhaupt ohne Unterschiebung des Unbewiesenen für Bewiesenes nicht möglich den Begriff des allgemeinen Linienverhältnisses zu entbehren. Fernere Gegenstände der Besprechung sind das Verfahren bei der Aehnlichkeitslehre, die Stellung der Proportionsglieder, die Einordnung der Lehre von der Flächengleichheit, desgleichen der Trigonometrie und Stereometrie, die Frage, ob die Goniometrie an das rechtwinklige Dreieck oder den Kreis anzuknüpfen habe, die Herleitung einiger Formeln, die Aufgabe für den Anfang der Stereometrie mehr Interesse zu wecken. Hier sind die Gesichtspunkte vorwaltend praktische. H.

G. Hauck. Das graphische Rechnen, seine Entwickelung seit Culmann und sein Verhältnis zur Schule. Hoffmann Z. XII. 333-355.

Der Verfasser schildert die Entwickelung, welche das graphische Rechnen seit dem Erscheinen von Culmann's Werk: „Die graphische Statik“ (Zürich, Meyer u. Zeller, 1864) gewonnen hat. Sie hat eine Richtung genommen, die der Culmann'schen

Auffassung durchaus nicht entspricht. Der Verfasser characterisirt sie jener, der „geometrischen“, gegenüber als die „arithmetische“ und unterzieht dieselbe einer Kritik, die nicht zu ihren Gunsten ausfällt. Freilich hat diese Richtung Gutes geschaffen, das sich namentlich in einer Vervollkommnung des mechanischen Rechnens, d. h. des Rechnens mit Maschinen etc., geltend macht. Der eigentlich Culmann'schen Auffassung ist nur Cremona gefolgt. Den Schluss bildet die Beantwortung der Frage, ob das graphische Rechnen in den Schulunterricht aufzunehmen sei. Der Verfasser beantwortet sie mit: „Nein“. O.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen).

W. S. Burnside and A. W. Panton. The theory of equations with an introduction to the theory of binary algebraic forms. Dublin. University Press.

In der Vorrede bezeichnen die Verfasser das Buch als einen Versuch, die neueren Entwickelungen der höheren Algebra mit den sonst gewöhnlich in der Theorie der Gleichungen behandelten Gegenständen zu combiniren. Demgemäss beschäftigen sich die ersten zehn Capitel mit Gegenständen, wie sie sich gewöhnlich in den Lehrbüchern für die höheren Classen der Schulen und für Studenten finden. Der Zweck dieser Abteilung ist aus den Titeln der einzelnen Capitel hinreichend zu ersehen. 1) Allgemeine Eigenschaften der Polynome. 2) Allgemeine Eigenschaften der Gleichungen. 3) Beziehungen zwischen den Wurzeln und Coefficienten der Gleichungen mit Anwendungen auf die symmetrischen Functionen der Wurzeln. 4) Transformation der Gleichungen. 5) Lösung der reciproken und binomischen Gleichungen. 6) Algebraische Lösungen der cubischen und biquadratischen Gleichungen. 7) Eigenschaften der derivirten Functionen. 8) Grenzen der Wurzeln von Gleichungen. 9) Trennung



der Wurzeln von Gleichungen. 10) Lösung numerischer Gleichungen. Von neuen Sachen in diesem Teile sind folgende zu erwähnen. Bei der Discussion der symmetrischen Functionen der Wurzeln der cubischen und biquadratischen Gleichungen in ihrer Darstellung mit Binomialcoefficienten werden besonders hervorgehoben die symmetrischen Functionen der Wurzel-Differenzen, welche eine so wichtige Rolle in der Theorie dieser Formen spielen. In dem Capitel über Transformation wird der Leser wieder auf einfachem und natürlichem Weg zu den Functionen der Coefficienten geführt, welche in der Theorie dieser Formen vorkommen. Es wird ferner eine vollständige Discussion der algebraischen Lösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen gegeben. In der Einleitung zu diesem Gegenstand wird gezeigt, dass alle bekannten Methoden zur Lösung dieser Gleichungen in drei Gruppen zerfallen, nämlich: 1) Auflösung der gegebenen Function in Factoren, wie sie sich bei Descartes' Lösung der biquadratischen Gleichung zeigt, nebst der Darstellung der cubischen Gleichung als Differenz zweier Cuben. 2) Eine angenommene Form für die Wurzeln: Beispiele dazu sind Cardan's Lösung der cubischen und Euler's Lösung der biquadratischen Gleichung. 3) Die Methode der symmetrischen Functionen der Wurzeln. Es wird gezeigt, dass die eigentliche Wurzelform, in der sich die Wurzel einer cubischen Gleichung ausdrücken lässt,

$$\sqrt[3]{p}+\frac{A}{\sqrt[3]{p}}$$

ist. Diese Form giebt drei, und nur drei, verschiedene Werte. Im Fall der biquadratischen Gleichung ist klar, dass jede der Formen

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\frac{A}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}, \quad \sqrt{q}\sqrt{r}+\sqrt{r}\sqrt{p}+\sqrt{p}\sqrt{q}$$

den besonderen Character hat, eine Wurzel darzustellen; jede von ihnen enthält vier, und nur vier, verschiedene Werte. Alle Lösungsmethoden und Gleichungen vierten Grades können auf dieselbe Resolvente

$$4a^3\theta^3-Ia\theta+J=0$$

zurückgeführt werden, welche reducirte Normalgleichung 3ten Grades genannt wird. Alle diese verschiedenen Theorien und Methoden werden durch zahlreiche Beispiele erläutert. In dem Capitel über numerische Gleichungen wird namentlich auf Horner's Methode eingegangen, als derjenigen, welche am besten und praktischsten zu den Wurzeln, endlichen oder incommensurabeln Wurzeln, führt, während auch gleichzeitig Newton's Methode der Divisoren und Newton's und Lagrange's Näherungsmethoden auseinandergesetzt werden. Die Behandlung des Gegenstandes ist, ebenso wie die vorausgehende Untersuchung über die Grenzen der Wurzeln und die Trennung der Wurzeln einfach und gründlich.

Der Teil des Werkes, welcher sich mit den neueren Teilen der Wissenschaft beschäftigt, beginnt mit einem Capitel über Determinanten, welches auf kleinem Raum eine einfache und knappe Darstellung enthält. Mit Uebergehung der Capitel über symmetrische Functionen und Elimination wenden wir uns zu den wesentlicheren Capiteln. Die Darstellung der Covarianten und Invarianten geht von den Functionen der Wurzeldifferenzen der Gleichungen aus. Während diese Art der Behandlung ihre Anwendung auf binäre Formen beschränkt und deshalb einer Verallgemeinerung bedarf, besitzt sie doch den Vorzug der Einfachheit und ist in Uebereinstimmung mit den von den Verfassern in der Einleitung auseinandergesetzten Plänen. Das Capitel über die Covarianten und Invarianten des dritten und vierten Grades enthält manche wichtige Resultate. Die dort veröffentlichte Methode zur Bestimmung der Zahl der Covarianten und Invarianten dieser Formen scheint einfacher als alle früher bekannten. In dem Ausdruck für die Relation zwischen der Quartik und ihren Covarianten finden sich neue Resultate. Bezeichnet man mit X, Y, Z die quadratischen Factoren der Covariante 6ten Grades der Quartik U, wenn jeder dieser Factoren so reducirt ist, dass seine Discriminante gleich der Einheit ist, so hat man folgende Art, die Quartik selbst und ihre Hessiana H mit Hülfe der Factoren auszudrücken:

$$H = \varrho_1^2 X^2 + \varrho_2^2 Y^2 + \varrho_3^2 Z^2,$$
$$U = \varrho_1 X^2 + \varrho_2 Y^2 + \varrho_3 Z^2,$$
$$b = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

wo $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Wurzeln der reducirten Normalgleichung dritten Grades in der Form

$$4\varrho^3 - I\varrho + J = 0$$

sind. Die Beziehungen haben den Vorteil, in einfacher und directer Weise auf die Lösung der Gleichung

$$\varkappa U - \lambda H = 0$$

zu führen. Das Buch schliesst mit Capiteln über die Transformation und die complexen Variabeln. Im ersten derselben wird die Anwendung der Tschirnhausen'schen Transformation auf den dritten und vierten Grad vereinfacht. Das letzte Capitel ist wesentlich eine Einleitung in den Gegenstand und soll in einer späteren Auflage erweitert werden. Am Ende des Bandes finden sich zwei Noten historischen Characters über die algebraische und numerische Lösung der Gleichungen. Auch dem zweiten Teil sind überall Beispiele und Uebungen angefügt. Csy. (O.).

L. Kronecker. Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln. Kronecker J. XCI. 301-334.

Ist $F(x, v) = 0$ eine irreductible Gleichung n^{ten} Grades, welche den willkürlichen Parameter v rational in ihren Coefficienten enthält, so definirt dieselbe eine algebraische Function x von v. Ist der Coefficient von x^n gleich 1, und sind die übrigen Coefficienten ganze Functionen von v, dann ist x eine ganze algebraische Function von v. Jede rationale Function von x und v, welche zugleich algebraisch ganz in v ist, kann auf die Form

$$\varphi(x, v) : \frac{\partial F(x, v)}{\partial x}$$

gebracht werden, wo φ in x und v rational und ganz ist. Daraus folgt, dass sie, mit der Discriminante $D(v)$ von x multiplicirt, als ganze rationale Function von x und v darstellbar ist. Eine ganze algebraische Function von v, welche in x und v rational ist, kann nur Teiler der Discriminante $D(v)$ als Nenner enthalten. Wir wählen unter diesen ganzen algebraischen Functionen von v ein Fundamental-System aus:

$$f_0(x, v) = 1, \quad f_1(x, v), \quad f_2(x, v), \ldots, f_{n-1}(x, v)$$

von den Graden 0, 1, 2, ... $(n-1)$, deren Nenner $N_0 = 1$, $N_1, N_2, \ldots N_{n-1}$ von möglichst hohen Graden in v sind. Es ist N_m ein Vielfaches von N_{m-1}. Jede ganze algebraische Function von v, welche in x, v rational ist, kann als lineare Function von $f_0, f_1, \ldots f_{n-1}$ dargestellt werden, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von v sind. Die Determinante

$$| f_\lambda(x_\mu, v) |$$

werde durch $\sqrt{\Delta}$ bezeichnet; dann findet sich für die Discriminante von x die Gleichung

$$D(v) = \Delta(v)[N_1(v)\,N_2(v)\ldots N_{n-1}(v)]^2.$$

Bildet man die Determinante

$$| \varphi_\lambda(x_\mu, v) |$$

für n beliebige in v algebraisch ganze, in v und x rationale Functionen, so wird das Quadrat derselben

$$D_\varphi = \Delta(v)[R(v)]^2,$$

wo R eine ganze rationale Function von v ist. Durch Specialisirung folgt, dass $\Delta(v)$ auch ein Teiler der Discriminanten aller derjenigen irreductiblen Gleichungen n^{ten} Grades ist, durch welche ganze algebraische Functionen von v definirt werden, die in x und v rational sind. Das Fundamentalsystem giebt die Determinante niedrigsten Grades $Df = \Delta$; diese Eigenschaft ist für ein Fundamentalsystem characteristisch. Δ heisst der wesentliche Teiler der Discriminante von x; der übrig bleibende Factor derselben, der ausserwesentliche Teiler der Discriminante der ganzen algebraischen Function x, ist das Quadrat einer ganzen rationalen Function von v, und zwar ist derselbe gleich dem Quadrat der Determinante des Substitutionssystems, mittels dessen $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ durch diese Functionen eines Fundamentalsystems linear ausgedrückt werden. Ist $(v-\alpha)$ ein ausserwesentlicher Factor, d. h. ein Factor des ausserwesentlichen Teilers, so ist es characteristisch für ihn, dass ganze algebraische Functionen von v existiren, die sich nur als gebrochene rationale Functionen von x und v, und zwar mit dem Nenner $(v-\alpha)$ darstellen lassen.

Ist die Gleichung $F(x, v) = 0$ reductibel, so folgt: Der wesentliche Teiler der Discriminante ist gleich dem aus den wesent-

lichen Teilern der Discriminanten ihrer Factoren gebildeten Producte; der ausserwesentliche Teiler ist durch das Quadrat der Eliminationsresultante ihrer Factoren teilbar.

Versteht man unter $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ unbestimmte Grössen und setzt

$$z_k = w_0 f_0(x_k, v) + \cdots + w_{n-1} f_{n-1}(x_k, v),$$

so ist $\Delta(v)$ der einzige von w unabhängige Factor in der Discriminante von z, so dass man erhält:

$$D_z(v) = \Delta(v)[W(v; w_0, w_1, \ldots w_{n-1})]^2.$$

Hieraus folgt, dass der wesentliche Teiler der grösste gemeinsame Teiler der Discriminanten aller derjenigen ganzen algebraischen Functionen n^{ter} Ordnung ist, die sich durch x und v ausdrücken lassen. Der ausserwesentliche Teiler ist dagegen im Allgemeinen für alle diese algebraischen Functionen verschieden. $W(v; w_0 \ldots w_{n-1})$ enthält für $n > 2$ auch keinen von v unabhängigen Teiler. Durch passende Wahl der unbestimmten Grössen $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ kann man eine Function ξ von folgenden Eigenschaften erlangen: Jede durch x rational ausdrückbare algebraische Function von v lässt sich als ganze rationale Function von ξ darstellen, deren in v rationale Coefficienten in ihren Nennern nur Linearfactoren enthalten, welche sowohl unter einander als von denen des wesentlichen Teilers der Discriminante verschieden sind.

Die Unterscheidung zwischen wesentlichem und ausserwesentlichem Teiler kann auch auf die Discriminante von Gleichungen ausgedehnt werden, in welchen der erste Coefficient nicht gleich Eins ist. Man erkennt für den wesentlichen Teiler der Discriminante einer beliebigen algebraischen Function n^{ter} Ordnung y die Eigenschaft, dass derselbe der grösste gemeinsame Factor der Discriminanten aller derjenigen algebraischen Functionen n^{ter} Ordnung ist, welche sich durch y und v rational ausdrücken lassen.

Für einen ausserwesentlichen Factor $(v - \alpha)$ ist es characteristisch, dass durch $v = \alpha$ und einen zugehörigen Wert von x den drei Gleichungen

$$F(x, v) = 0, \quad \frac{\partial F(x, v)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F(x, v)}{\partial v} = 0$$

genügt werden kann. Der ausserwesentliche Teiler der Discriminante der Gleichung $F(x, v) = 0$ ist als der grösste von U, V unabhängige Teiler des über alle n Wurzeln der Gleichung erstreckten Productes

$$\Pi\left(U\frac{\partial F(x, v)}{\partial x} + V\frac{\partial F(x, v)}{\partial v}\right)$$

zu characterisiren. No.

E. Netto. Bemerkung über Abel'sche Gleichungen.

Klein Ann. XVIII. 247-252.

Ist $f(x) = 0$ eine irreductibele Gleichung n^{ten} Grades und eine Wurzel derselben $x_0' = \theta(x_0)$ eine rationale Function einer anderen x_0, so ordnet sich das System der Wurzeln (cfr. Abel, Oeuvres; nouv. éd. Bd. I. No. XXV. § 1) in folgende Tabelle ein:

$$\begin{array}{lllll} x_0 & \theta(x_0) & \theta^2(x_0) & \cdots & \theta^{m-1}(x_0), \\ x_1 & \theta(x_1) & \theta^2(x_1) & \cdots & \theta^{m-1}(x_1), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{\nu-1} & \theta(x_{\nu-1}) & \theta^2(x_{\nu-1}) & \cdots & \theta^{m-1}(x_{\nu-1}). \end{array} \qquad \begin{pmatrix} m\nu = n \\ \theta^m(x_\alpha) = x\alpha \end{pmatrix}$$

Die Resolvente

$$\varphi_0 = x_0 + \theta(x_0) + \theta^2(x_0) + \cdots + \theta^{m-1}(x_0)$$

genügt einer Gleichung ν^{ten} Grades $F(\varphi) = 0$, mit deren Lösung die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ gegeben ist. Diese Gleichung ist zwar ebenso wie $f(x) = 0$ irreductibel, aber ohne weitere Voraussetzungen eine allgemeine. Der Verfasser stellt sich die Frage: „Welche Bedingungen müssen die Wurzeln von $f(x) = 0$ erfüllen, damit dieselben Beziehungen, wie bei $f(x) = 0$, auch bei $F(\varphi) = 0$ eintreten?" jedoch unter der Beschränkung, dass aus $\varphi_\beta = Rat(\varphi_\alpha)$ auch $x_\beta = Rat_1(x_\alpha)$ folgen solle. Unter dieser Beschränkung ergiebt sich als notwendig und hinreichend hierfür, dass zwischen den Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ die Beziehungen stattfinden:

$$x_0' = \theta(x_0), \qquad\qquad x_1 = \theta_1(x_0).$$
$$\theta_1\theta(x_0) = \theta^{\alpha_1}\theta_1(x_0), \qquad \theta_1\theta(x_0) = \theta^{\alpha_2}\theta_2(x_0),$$
$$\theta_2\theta_1(x_c) = \theta^{\beta_1}\theta_1^{\gamma_1}\theta_2(x_0), \qquad \theta_2\theta_1(x_0) = \theta^{\beta_2}\theta_1\,\theta_3(x_0),\ldots$$
$$\theta_3\theta_2(x_0) = \theta^{\delta_1}\theta_1^{\varepsilon_1}\theta_2^{\zeta_1}\theta_3(x_0),\ldots$$
$$x_2 = \theta_2(x_0), \qquad\qquad x_3 = \theta_3(x_0),\ldots$$
$$\theta_3\theta(x_0) = \theta^{\alpha_3}\theta_3(x_0),\ldots$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Die so definirten Gleichungen sind demnach die allgemeinsten, welche nach „Abel'scher Methode" (cf. Abel l. c.) gelöst werden können. Aus der Betrachtung der Gruppe der Gleichung $f(x) = 0$ ergiebt sich eine bemerkenswerte Analogie mit den auflösbaren Gleichungen überhaupt. Dass man durch diese Art von Gleichungen wirklich auf neue auflösbare geführt wird, wird durch Angabe eines speciellen Falles gezeigt. T.

L. Gegenbauer. Ueber algebraische Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen. Wien. Ber. LXXXIV. 1102-1107.

Es werden zwei Systeme von ganzen Functionen der Veränderlichen x mit reellen Coefficienten gegeben: $\theta_\lambda(x)$ und $\eta_\lambda(x)$ von den Graden $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ mit folgenden Eigenschaften: Sämmtliche Wurzeln von $\theta_{n+1}(x) = 0$ und $\eta_n(x) = 0$ sind reell und ungleich. Zwischen je zwei Wurzeln der Gleichung $\eta_n(x) = 0$ liegt eine Wurzel von $\theta_{n-1}(x) = 0$ und zwischen je zwei Wurzeln von $\theta_{n+1}(x) = 0$ eine von $\eta_n(x) = 0$. Endlich trennen die Wurzeln von $\eta_{n-1}(x) = 0$ diejenigen von $\eta_n(x) = 0$ und die Wurzeln von $\theta_n(x) = 0$ diejenigen von $\theta_{n+1}(x) = 0$ von einander. Als Specialfälle ergeben sich die Sätze der Herren Biehler und Hermite (vgl. F. d. M. XI. 1879. p. 64, 273). No.

K. Hunrath. Algebraische Untersuchungen nach Tschirnhausen's Methode. II. Pr. Hadersleben.

Fortsetzung der Arbeit, welche F. d. M. VIII. 1876. p. 46 besprochen wurde. Es werden complicirte Rechnungen durchgeführt, welche bekannte Resultate liefern. No.

G. J. LEGEBEKE. Sur une propriété des racines d'une équation dérivée. Arch. Néerl. XVI. 273-278.

Behandelt einige Beziehungen zwischen den Wurzeln der abgeleiteten Gleichung und denen der Hauptgleichung. Die Eigenschaft, welche hier nachgewiesen wird, ist die folgende: Die Wurzeln der abgeleiteten Gleichung liegen zwischen oder auf den Seiten eines convexen Vielecks, welches so construirt ist, dass alle Wurzeln der Hauptgleichung innerhalb des Vielecks oder auf seinen Seiten liegen.

Hat die Hauptgleichung keine imaginären Wurzeln, so geht das Vieleck in eine gerade Linie über, und dann umfasst die genannte Eigenschaft das bekannte Rolle'sche Theorem. G.

J. COLLIN. Sur le théorème de Rolle. Nouv. Ann. (2) XX. 132-133.

Einfacher Beweis für den Fall algebraischer Gleichungen. No.

P. BACHMANN. Ueber Galois' Theorie der algebraischen Gleichungen. Klein Ann. XVIII. 449-468.

Die Grundzüge der Galois'schen Theorie werden in einer von der gewöhnlichen Darstellungsweise dadurch abweichenden Form vorgetragen, dass die bei der Lösung der Gleichung wechselnden Rationalitäts-Bereiche als Zahlenkörper im Dedekind'schen Sinne aufgefasst werden. No.

CH. HUDSON. Formulae in the theory of equations. Quart. J. XVIII. 74-89.

1) Bestimmung der Summe der Producte von je r Gliedern einer endlichen arithmetischen Reihe erster Ordnung. 2) Bestimmung des Coefficienten von x^r in der Entwickelung von $(1+ax+bx^2)^n$. 3) Bestimmung des Restes der Division einer ganzen Function n^{ten} Grades durch eine Potenz $(x-c)^m$. 4) Aus-

druck für eine vielfache Wurzel durch die Coefficienten der Gleichung n^{ten} Grades, wenn die Ordnung der Multiplicität $\frac{1}{2}(n+1)$ erreicht oder überschreitet. No.

FORESTIER. Sur l'équation au carré des différences. Toul. Mém. (8) III. 187.

Ankündigung einer praktisch durchführbaren Berechnungsweise für die Gleichung der Wurzeldifferenzen. No.

L. ZMURKO. Beiträge zur Theorie der Auflösung von Gleichungen mit Bezugnahme auf die Hilfsmittel der algebraischen und geometrischen Operationslehre. Wien. Denkschr. XLIV. 60-120.

Im ersten Capitel werden specielle Wurzelformen algebraischer Gleichungen betrachtet und aus diesen unhaltbare Folgerungen über die Lösung allgemeiner Gleichungen gezogen. Das zweite Capitel beschäftigt sich mit der graphischen Lösung algebraischer und gewisser Gattungen transcendenter Gleichungen. No.

G. CANDÈZE. Remarques sur le théorème de Sturm. Nouv. Ann. (2) XX. 193-197.

Es sei für die ganze Function $V(x)$ und ihre Ableitung $V'(x)$

$$V = V_1 Q_1 - V_2, \quad V_1 = V_2 Q_2 - V_3, \dots \quad V_{n-2} = V_{n-1} Q_{n-1} - V_n,$$

so dass

$$V, V_1, V_2, \dots V_{n-2}, V_{n-1}, V_n$$

eine Sturm'sche Reihe bilden. Mit Z_λ werde der Zähler des λ^{ten} Näherungswertes von

$$Q_1 - \cfrac{1}{Q_2 - \cfrac{1}{Q_3 - \dots}}$$

bezeichnet. Dann liegt zwischen zwei Wurzeln von $V = 0$ eine ungrade Anzahl von Wurzeln der Gleichung $Z_\lambda . V_{\lambda+1} = 0$.

No.

G. Candèze. Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation. Nouv. Ann. (2) XX. 49-53.

Ist in

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

der Coefficient a_0 dem absoluten Werte nach grösser als alle folgenden, so ist 2 eine obere Grenze für die Wurzeln. Setzt man $x = py$ und bestimmt p so, dass $a_0 p^m$ dem absoluten Werte nach grösser wird als

$$a_1 p^{m-1}, \; a_2 p^{m-2}, \ldots,$$

so ist $2p$ eine obere Grenze für die Wurzeln der Gleichung. Dieselbe Methode ist auch anderweitig verwendbar. No.

Laguerre. Sur l'introduction des logarithmes dans les critériums qui déterminent une limite supérieure du nombre des racines d'une équation qui sont comprises entre deux nombres donnés. C. R. XCIII. 1061-1063.

Bezeichnet $f(x)$ eine Function mit positiven Coefficienten, $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ eine Reihe von positiven, ihrer Grösse nach geordneten Constanten und m die Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung

$$A_0 f(a_0 x) + A_1 f(a_1 x) + A_2 f(a_2 x) + \cdots + A_n f(a_n x) = 0,$$

so ist diese Zahl m höchstens gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$A_0 \log \frac{a_0}{a_1}, \quad A_0 \log \frac{a_0}{a_1} + (A_0 + A_1) \log \frac{a_1}{a_2},$$

$$A_0 \log \frac{a_0}{a_1} + (A_0 + A_1) \log \frac{a_1}{a_2} + (A_0 + A_1 + A_2) \log \frac{a_2}{a_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_0 \log \frac{a_0}{a_1} + \cdots + (A_0 + \cdots + A_{n-1}) \log \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

In besonderen Fällen kann man die Einführung der Logarithmen vermeiden, ohne die Genauigkeit der Formel zu vermindern.

No.

LAGUERRE. Sur une extension de la règle des signes de Descartes. C. R. XCII. 230-233.

Es sei $F(x)$ ein endliches Polynomen oder eine unendliche Reihe, die nach steigenden Potenzen von x geordnet ist. Alle Coefficienten seien positiv. Ferner seien die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ positiv und ihrer Grösse nach geordnet. Dann hat die Gleichung

$$AF(\alpha x)+BF(\beta x)+CF(\gamma x)+\cdots = 0$$

höchstens so viel reelle Wurzeln als die Reihe $A, B, C, \dots$ Variationen liefert; die Differenz beider Zahlen ist durch 2 teilbar.

Wir betrachten

$$f(x) = Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\cdots = 0$$

und setzen

$$f_n = A, \quad f_{n-1} = Aa+B, \quad f_{n-2} = Aa^2+Ba+C,$$
$$\cdots, \quad f = Aa^n+Ba^{n-1}+\cdots,$$

dann liefert die Anzahl der Variationen der Reihe $f_n, f_{n-1}, \dots f$ eine obere Grenze für die Zahl der Wurzeln von $f(x) = 0$, welche grösser als a sind. No.

L. GEGENBAUER. Eine Verallgemeinerung der Cartesianischen Zeichenregel. Wien. Ber. LXXXIII. 321-332.

Es lässt sich eine Reihe von Functionen von x definiren $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ von den Graden $0, 1, 2, \dots$, welche von zwei positiven Constanten a, b abhängen und folgende Eigenschaft besitzen: Entwickelt man eine ganze Function von $F(x)$ vom Grade n in eine nach den ψ fortschreitende Reihe

$$F = \Sigma A_\lambda \psi_\lambda,$$

so steht die Anzahl der Zeichenwechsel in A_0, A_1, A_2, A_3 zu der Anzahl der Wurzeln von $F(x) = 0$, welche gleich oder grösser als b sind, und die Anzahl der Zeichenwechsel in

$$A_0, -A_1, A_2, -A_3, \cdots$$

zu der Anzahl der Wurzeln, welche kleiner oder gleich $-a$ sind, in den durch die Cartesianische Zeichenregel gegebenen Beziehungen. Die Functionen ψ werden untersucht. No.

A. E. Pellet. Sur un mode de séparation des racines des équations et la formule de Lagrange. Darb. Bull. (2) V. 393-395.

Ist

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_i x^i + \cdots,$$

α_i der Modul von a_i, und hat die Gleichung

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1} - \alpha_n x^n + \alpha_{n+1} x^{n+1} + \cdots = 0$$

zwei positive Wurzeln r_1 und $r_2 > r_1$, so hat die Gleichung

$$f(x) = 0$$

n Wurzeln, deren Moduln kleiner als r_1 sind, während die der übrigen grösser als r_2 werden. Aus diesem Satze lässt sich in sehr einfacher Weise die Lagrange'sche Reihe herleiten.

No.

Laguerre. Sur la séparation des racines des équations numériques. C. R. XCII. 1146-1149.

Der Herr Verfasser giebt für besondere Gleichungen einige Sätze über die Maximalzahl von Wurzeln, welche zwischen gegebenen Grenzen liegen. Wir führen zur Characterisirung derselben den folgenden an: Ist ω eine beliebige positive Grösse, so hat

$$a + bx + cx(x-\omega) + dx(x-\omega)(x-2\omega) + \cdots = 0$$

mindestens so viel positive Wurzeln wie

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots = 0.$$

No.

Laguerre. Sur la séparation des racines des équations dont le premier membre est décomposable en facteurs réels et satisfait à une équation linéaire du second ordre. C. R. XCII. 178-181.

Es wird gezeigt, dass bei Gleichungen von der in der Ueberschrift angegebenen Art zu jedem Werte x durch die Lösung einer quadratischen Gleichung zwei Werte ξ_1, ξ_2 gefunden werden können, so dass zwischen x und ξ_1 und ebenso zwischen x und ξ_2 höchstens eine Wurzel der Gleichung liegt. Dasselbe

gilt, wenn das Polynomen durch eine unendliche Reihe ähnlicher Beschaffenheit ersetzt wird. No.

Laguerre. Sur les équations algébriques de la forme

$$\frac{A_0}{x-a_0}+\frac{A_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}=0.$$

C. R. XCIII. 890-892.

Die Zahl der Wurzeln einer solchen Gleichung, welche zwischen einer willkürlichen Grösse ξ und a_i liegen, wo

$$a_0<a_1<\cdots a_{i-1}<\xi<a_i<\cdots$$

ist, kann die Zahl der Zeichenwechsel der Summanden von

$$\frac{A_i}{\xi-a_i}+\frac{A_{i+1}}{\xi-a_{i+1}}+\cdots+\frac{A_{i-1}}{\xi-a_{i-1}}$$

nicht überschreiten; die Differenz beider Zahlen ist durch 2 teilbar. Ist das Polynomen u so bestimmt, dass es für

$$x=a,\ a+h,\ a+2h,\cdots a+nh$$

die Werte

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots u_n$$

annimmt, so ist die Zahl der Wurzeln, welche kleiner sind als a, höchstens der Anzahl der Zeichenwechsel von

$$u_0-nu_1+\frac{n(n-1)}{1.2}u_2-\cdots\pm u_n,$$

die Zahl derjenigen, welche grösser sind als a, höchstens der Anzahl der Zeichenwechsel von

$$u_n-nu_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2}-\cdots\pm u_0$$

gleich. No.

Laguerre. Sur les équations de la forme

$$\Sigma\int_a^b e^{-zx}f(z)dz=0.$$

C. R. XCIII. 1000-1003.

Für die Anzahl der positiven Wurzeln dieser Gleichung wird die Möglichkeit der Berechnung einer oberen Grenze gezeigt.

Der Nachweis stützt sich auf Sätze folgender Art: Die Gleichung

$$Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+\cdots=0$$

hat höchstens so viel positive Wurzeln wie die Gleichung

$$\frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}x^{\alpha}+\frac{B}{\Gamma(\beta+1)}x^{\beta}+\frac{C}{\Gamma(\gamma+1)}x^{\gamma}+\cdots=0.$$

No.

F. Franklin. On Newton's method of approximation. Sylv., Am. J. IV. 275-276.

Beweis des Fourier'schen Satzes, unter welchen Bedingungen bei der Newton'schen Methode Annäherung an eine Wurzel der Gleichung eintritt. No.

A. Laisant. Sur les séries récurrentes dans leurs rapports avec les équations. Darb. Bull. (2) V. 218-250.

In der Einleitung giebt Herr Laisant die Literatur zu dem von ihm behandelten Gegenstande. Referent vermisst dabei vor allem: Euler, Algebra II. § 231 ff. An dieser Stelle hätte Herr Laisant Beispiele für die Ungenauigkeit seiner Hauptsätze finden können. Der Fehler im Beweise liegt in der unberechtigten Annahme eines Grenzwertes (S. 227. Z. 7-11). Ferner hätte: Jacobi, Observatiuncula § 5, Crelle J. XIII. S. 340 angeführt werden müssen; dadurch wären §§ 12-15 der Artikel vereinfacht worden. Neu ist in der Abhandlung die geometrische Construction unter der Voraussetzung complexer Näherungswerte. No.

Ch. B. Solution d'une question (127.) Nouv. Ann. (2) XX. 329-330.

Beweis des Satzes: Macht man die Gleichung

$$(a_1+x)^{\frac{1}{2}}+(a_2+x)^{\frac{1}{2}}+\cdots+(a_n+x)^{\frac{1}{2}}=0$$

rational, so gelangt man zu einer Gleichung, deren Grad 2^{n-2} ist.

O.

W. KRETKOWSKI. Auflösung algebraischer Gleichung durch bestimmte Integrale. Krak. Denkschr. 1881. (Polnisch.).

Die Arbeit ist eine Ausführung der noch von Lagrange gegebenen Methode; sie löst hier mittels der Laurent'schen Reihe dieselbe Aufgabe, die Jacobi in seiner Schrift: „Ueber den Ausdruck der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale" (Crelle J. IV.) nur für Gleichungen mit reellen Coefficienten behandelt hat. Dn.

E. WEST. Exposé des méthodes générales en mathématiques; résolution et intégration des équations, applications diverses, d'après Höne Wronski. Résal J. (3) VII. 5-32.

E. WEST. Digression sur les séries. Résal J. (3) VII. 111-128.

Das Vorliegende ist ein Bericht über ein Werk von Wronski (geboren 1778 in Posen, gestorben 1853 in Neuilly, erst polnischer, dann russischer Officier bis 1797, dann Gelehrter, zwei Jahre in Deutschland, von da an in Frankreich). Der Gegenstand des Werkes ist die approximative Auflösung der Gleichungen. Zur Darstellung der Wurzeln einer beliebigen algebraischen oder transcendenten Gleichung $\varphi(y)=0$ wendet der Verfasser die Entwickelung der folgenden Reihe an:

$$y = w - \varphi(w)\frac{\partial w}{\partial\varphi(w)} - [\varphi(w)]^2\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\varphi(w)\partial w}{[\partial\varphi(w)]^3} - \cdots.$$

Der allgemeine Term lautet:

$$-[\varphi(w)]^\mu\frac{D(\partial^2\varphi(w)\partial^3[\varphi(w)]^2\partial^4[\varphi(w)]^3\ldots\partial^\mu[\varphi(w)]^{\mu-1})\partial w}{1!\,2!\ldots\mu!\,[\partial\varphi w]^{1+2+\cdots\mu}},$$

wo D eine numerische Determinante bezeichnet. Das an sich willkürliche w ist so zu wählen, dass die Reihe am schnellsten convergirt. Es werden zuerst die Einführungen des Verfassers erklärt, dann der obige Reihenausdruck abgeleitet. Hierauf folgen Bemerkungen über die idealen und absurden Grössen, dann das Princip der Convergenz der Reihe, dann secundäre Wege, die Convergenz zu erlangen. Fernere Gegenstände der Besprechung

sind die „génération neutre", die Beschaffenheit des Fundamentalwerts, Auflösung der primitiven Gleichungen, die reducirte Gleichung (d. h. eine dem $\varphi(x) = 0$ näher kommende, deren Wurzeln bekannt sind), die theoretischen Lösungen, die Exhaustionsmethode. Zum Schluss wird das Beispiel behandelt:

$$\sin\xi = \frac{r\mu\nu}{\theta e H g}\,\frac{\varphi\cos\alpha + \sin(\alpha-\omega)}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\theta e}{r}\,\frac{1-\cos\xi}{\xi},$$

wo ξ, ω die Unbekannten sind. Der Bericht hat den Zweck, das Verständnis der Urschrift zu erleichtern, lässt sich aber wohl schwerlich, gesondert von derselben, als hinreichend zur Mitteilung betrachten.

Der zweite Artikel handelt von einer Stelle im ersten, wo von Verwandlung divergenter Reihen in convergente die Rede ist. Der Sinn dieses Ausdrucks gründet sich auf die Aufstellung von Wronski: „Die Reihen in ihrer Allgemeinheit genommen als convergente oder nicht convergente haben an sich, in der unbegrenzten Anzahl ihrer Terme und ohne Zuhülfenahme einer Ergänzungsgrösse, eine bestimmte Bedeutung (Wert)". Dass man ohne Rücksicht auf den Rest Transformationen vollziehen kann, wird an einigen Beispielen gezeigt; doch giebt wenigstens der Bericht über jene Bedeutung (oder Wert) keine deutliche Auskunft.

H.

J. J. Åstrand. Om en ny Methode for Lösning af trinomiske Ligninger af n^{te} Grad. Lie, Arch. VI. 448-459.

Approximative Methode zur numerischen Berechnung der Wurzeln einer trinomischen Gleichung n^{ten} Grades.

L.

A. Scholtz. Résolution de l'équation du troisième degré. Nouv. Ann. (2) XX. 220-225.

Mit Hülfe der quadratischen und der cubischen Covariante

einer cubischen Form werden Beziehungen abgeleitet, die zur Lösung der Gleichung dritten Grades führen. No.

LEHMANN. Eine algebraische Lösung des irreductiblen Falles der cubischen Gleichungen. Schlömilch Z. H. L. A. XXVI. 39-43.

Zum vierten Male begegnen wir den Unrichtigkeiten des Herrn Guido Weichold. Von Herrn Lehmann werden sie als „neu", „höchst originell" und „fruchtbar" „der Beachtung der Mathematiker auf's Wärmste empfohlen". Herr Lehmann äussert: „das Aufsuchen des gemeinschaftlichen complexen Factors" (im Gebiete $x+y\sqrt{3}$) „geschieht auf demselben Wege, wie das Aufsuchen eines grössten gemeinschaftlichen Factors zwischen zwei reellen Grössen".

Wir empfehlen Herrn Lehmann die Zahlen 2 und $1+i\sqrt{3}$ zur Anwendung der „höchst originellen" Methode. No.

A. CAYLEY. Illustration of a theorem in the theory of equations. Mess. (2) XI. 111-113.

Der Verfasser untersucht den Fall, dass die Wurzeln α, β, γ einer cubischen Gleichung einer symmetrischen Bedingung, wie

$$\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha = k,$$

genügen. Als Beispiel wird der Fall

$$x^3-7x+6 = 0,$$

wo die gegebene Relation

$$\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha = -1$$

ist, im Detail durchgeführt. Glr. (O.)

R. TUCKER, J. A. KEALY. Solutions of a question (6241). Ed. Times XXXIV. 24.

Wenn die Wurzeln der Gleichung

$$x^3+\lambda x = (x^2+1)(2\lambda+\mu)^{\frac{1}{2}}$$

alle reell und positiv sind, so kann weder λ noch μ kleiner sein als 9. O.

S. Réalis. Démonstration de propositions énoncées. Nouv. Ann. (2) XX. 408-411.

Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3+px+q=0$$

mögen a, b, c sein; es werden einige Formeln aufgestellt, welche sich auf die Ausdrücke

$$p^2-4qa,\quad p^2-4qb,\quad p^2-4qc$$

beziehen. No.

Rautenberg. Ueber Gleichungen dritten und vierten Grades. Pr. Deutsch-Krone.

Schulgemässe Behandlung einiger elementarer Fragen und Lösungsmethoden. No.

F. Briot. Résolution de l'équation du quatrième degré. Nouv. Ann. (2) XX. 225-227.

Die Lösung von

$$x^4+ax^2+bx+c=0$$

wird mittels

$$x=v+y+z,\quad v^2+y^2+z^2=-\frac{A}{2},\quad vyz=-\frac{B}{8}$$

bewerkstelligt. No.

A. Cayley. A solvible case of the quintic equation. Quart. J. XVIII. 154-157.

Stellt man die Wurzeln der Gleichung

$$x^5-5ax^4+\cdots=0$$

unter der Form

$$x_\alpha=a+B\omega^\alpha+C\omega^{2\alpha}+D\omega^{3\alpha}+E\omega^{4\alpha}$$

dar, wobei ω eine imaginäre fünfte Wurzel der Einheit bedeutet,

und ist dann $E = 0$, so gehört die Gleichung zu den algebraisch lösbaren. Es besteht eine einzige Beziehung zwischen den Coefficienten der Gleichung; D^5 hängt von einer Gleichung dritten Grades ab; B, C sind durch D rational darstellbar. No.

S. R. MINICH. Notizie sulle indagini da esso intraprese e proseguite intorno alla risolubilità generale delle equazioni algebriche; e brevi cenni sull' autocritica degli scritti da lui pubblicati intorno alle principali questioni dell' Estuario Veneto. Ven. Att. Ist. (5) VII. 905-919.

Der Verfasser teilt seine, durch mannigfache Arbeiten aus ganz anderen Gebieten mehrfach unterbrochenen Versuche mit, die algebraischen Gleichungen allgemein zu lösen, bei denen er hauptsächlich die Resolvente einer Gleichung 5ten Grades betrachtet hat. M.

ED. WEYR. Ueber die Bildung von gewissen algebraisch auflösbaren Gleichungen. Cas. X. 107. (Böhmisch.).

Unter Bezugnahme auf Jäger's (Referat im Jahrg. XI. 1879. p. 72) durch gewisse Identitäten bedingte Gleichungen des 5ten, 7ten und 9ten Grades, in welchen blos zwei Parameter auftreten, wird hier eine allgemeine Discussion dieses Problems vorgenommen und manches neue Moment beigebracht. Std.

Lösungen weiterer Aufgaben über specielle Gleichungen von E. PECQUERY, G. HEPPEL, GENESE, C. MORGAN, J. O'REGAN, J. C. SHARP finden sich Nouv. Ann. (2) XX. 376-378, Ed. Times XXXIV. 29, 87, 99-100, 102-103.

O.

V. HIOUX. Racines communes à deux équations algébriques entières. Ann. de l'Éc. Norm. (2) X. 383-391.

Die Bestimmung der genauen Anzahl der gemeinsamen Wurzeln zweier Gleichungen geschieht in der bekannten Weise durch die Untersuchung über das Verschwinden gewisser Determinanten, welche aus den Coefficienten gebildet sind. No.

ESCARY. Sur la résolution d'un système particulier de deux équations simultanées du degré m à deux inconnues. Nouv. Ann. (2) XX. 227-229.

Die Lösung der Gleichungen

$$ax^m + by^m = \frac{a}{x^m} + \frac{b}{y^m} = c$$

vereinfacht sich bei der Einführung der Winkel des Dreiecks mit den Seiten a, b, c. No.

M. LUXENBERG. Ueber die Gleichung $x^y = y^x$. Hoppe Arch. LXVI. 332-334.

Es ist

$$\left[\left(\frac{x+1}{x}\right)^x\right]^{\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}} = \left[\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}\right]^{\left(\frac{x+1}{x}\right)^x}.$$

Zu jeder positiven Zahl a, die grösser als 1 ist (mit Ausnahme von e), existirt eine von ihr verschiedene Zahl b, für welche $a^b = b^a$ wird. No.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

B. PEIRCE. Linear associative algebra. Sylv., Am. J. IV. 99-230.

Das Referat erfolgt im nächsten Jahrgange. My.

S. Gundelfinger. Ueber die Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten.
Kronecker J. XCI. 221-238.

Die Gültigkeitsgrenzen dieser Transformation werden erweitert. Das bekannte Jacobi'sche Verfahren verlangt, dass, wenn $\varDelta$ die Determinante der gegebenen Form

$$f \equiv \Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

ist, die Reihe der Determinanten

$$\varDelta, \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{\alpha\alpha}}, \quad \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{\alpha\alpha}\, \partial a_{\beta\beta}}, \dots a_{\nu\nu}$$

für mindestens eine Permutation $\alpha, \beta, \gamma \dots \nu$ kein verschwindendes Glied besitzt.

Eine übersichtlichere Darstellung dieser Reduction, aber innerhalb derselben Voraussetzung, gab Plücker.

Im Anschluss an den Plücker'schen Grundgedanken geht der Herr Verfasser so zu Wege, dass er (unabhängige Variable vorausgesetzt) zwei Hülfssätze aufstellt, die dann die gewünschte Reduction ohne Weiteres ermöglichen, und von denen der erstere gradezu schon bei Plücker steht.

Dieser sagt aus: „Verschwindet irgend eine der Hauptunterdeterminanten von $\varDelta$, z. B. $\varDelta_{nn}$ nicht, so giebt es immer eine lineare Transformation der Variabeln, durch welche die gegebene Form

$$f \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k$$

übergeht in die andere:

$$\varphi + \alpha_n x_n^2 \equiv \Sigma\Sigma a_{ik} \eta_p \eta_q + \frac{\varDelta}{\varDelta_{nn}} x_n^2 \qquad (p, q = 1, 2, \dots n-1).\text{“}$$

Verfährt man ebenso mit der Form φ von $n-1$ Variabeln, so gelangt man schrittweise zur Lösung des Problems, und die Jacobi'schen Voraussetzungen sind dann evident.

Diese schränkt nun der zweite Hülfssatz bedeutend ein, indem er aussagt: „Verschwindet irgend eine Hauptunterdeterminante, z. B. $\varDelta_{nn}$, dagegen irgend eine Unterdeterminante der Reihe $\varDelta_{n\nu}$, z. B. $\varDelta_{n,n-1}$, nicht, (wie auch $\varDelta$ selbst), so giebt es stets eine lineare

Transformation der Variabeln, durch welche die Form f übergeht in die andere:

$$\psi + \alpha_{n-1}(x_{n-1}^2 - x_n^2)$$
$$\equiv \Sigma\Sigma a_{ik}\zeta_\varrho\zeta_\sigma + \frac{\Delta}{\Delta_{n,n-1}}(x_{n-1}^2 - x_n^2) \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots (n-2)).\text{“}$$

Der abgetrennte Teil ψ kann dann wieder genau wie f behandelt werden, und zwar deshalb, weil die Determinante von ψ, wie auch die von φ, nicht verschwindet, wie man sich leicht überzeugt. Daraus werden Schlüsse gezogen in Bezug auf die Zahl der negativen Quadrate, deren Summe f wird.

Des Weiteren werden alle besonderen Fälle, namentlich, wenn zwischen Variabeln lineare Relationen bestehen, genau berücksichtigt, wobei mannigfache Modificationen obiger Sätze auftreten. My.

W. E. Story. On the theory of rational derivation on a cubic curve. Sylv., Am. J. III. 356-388.

Herr Sylvester hatte (Am. J. III.) diese Theorie zuerst aufgestellt mittels der Darstellung der Coordinaten der Punkte einer ebenen Curve dritter Ordnung als rationaler Functionen der Coordinaten eines festen Anfangspunktes der Curve.

Herr Story wendet diese Sylvester'sche Theorie an auf das Problem: Alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = 0$$

zu finden, wenn eine gegeben ist.

Die Durchführung zeigt die grösste Aehnlichkeit mit der bekannten Verteilung eines Parameters (eines elliptischen Integrals erster Gattung) auf der Curve. In der Tat sind die ganzen in Betracht kommenden Zahlen nichts als die Multipla dieses Parameters. My.

C. Jordan. Observations sur la réduction simultanée de deux formes bilinéaires. C. R. XCII. 1437-1438.

C. JORDAN. Sur la réduction des formes quadratiques. C. R. XCIII. 113-118.

C. JORDAN. Sur l'équivalence des formes quadratiques. C. R. XCIII. 181-185.

C. JORDAN. Sur la représentation d'un nombre ou d'une forme quadratique par une autre forme quadratique. C. R. XCIII. 234-237.

Neue Begründung der Theorie der bilinearen und quadratischen Formen des Herrn Verfassers. Die damals (1875) von ihm aufgestellte war von Herrn Kronecker angefochten worden.

Da eine weitere Fortsetzung dieser Noten in Aussicht steht, möge das Referat bis zum Abschluss derselben verschoben werden.

My.

J. KÖNIG. Ueber endliche Formensysteme in der Theorie der rationalen Functionen. Klein Ann. XVIII. 69-77.

Es seien

$$R_\lambda(u_1, u_2, \dots u_n) = c_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

n rationale von einander unabhängige Functionen von $u_1, u_2, \dots u_n$. Man kann eine Gleichung

$$\psi(u;\, c_1, \dots c_n) = 0$$

herstellen, deren Wurzeln mit denjenigen des obigen „Fundamentalsystems" übereinstimmen, so dass jede Wurzel von $\psi = 0$ als eine Wurzel $u_1, u_2, \dots u_n$ von $R_\lambda - c_\lambda = 0$ auftritt und umgekehrt; ferner dass $\psi = 0$ nur die von einander verschiedenen Wurzeln des Fundamentalsystems liefert. Dann kann jede rationale Function $F(u_1, \dots u_n)$ als Function von Wurzeln der Gleichung $\psi = 0$ angesehen werden. Zwei Functionen F_1, F_2 gehören zu derselben Klasse, wenn dieselbe Substitutionen-Gruppe der Wurzeln von $\psi = 0$ ihre numerischen Werte ungeändert lässt. Jede Function einer Klasse ist durch jede andere und die Coefficienten von ψ, d. h. durch die Functionen des Fundamentalsystems rational darstellbar. Auch aus $k (< n)$ Functionen R_λ kann man einen „rationalen Functionscomplex k^{ter} Dimension" herstellen;

für ihn gilt dieselbe Einteilung und derselbe Fundamentalsatz. Alle rationalen Functionen beliebiger Variabeln, die einer irgend wie gegebenen Bedingung genügen, sind durch eine passend gewählte endliche Anzahl solcher Functionen rational ausdrückbar; speciell findet dies also für das System der Invarianten und Covarianten statt. No.

J. König. Zur Theorie der Resolventen. Klein Ann. XVIII. 78-81.

Es werden einige Sätze über rationale Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung abgeleitet. Der Ausgangspunkt ist der, dass die Veränderungen untersucht werden, welche eintreten, wenn man zwischen den ursprünglich von einander unabhängigen Wurzeln der Gleichung specielle Beziehungen festsetzt. No.

F. Faà de Bruno. Einleitung in die Theorie der binären Formen. Mit Unterstützung von Professor M. Nöther deutsch bearbeitet von Th. Walter. Leipzig. Teubner.

M. Nöther. Beiträge zur Theorie der binären Formen. Erlang. Ber. 1881.

Es ist dies eine, wohl von manchen Seiten gewünschte deutsche Bearbeitung des bekannten Bruno'schen Werkes (cfr. das Referat F. d. M. Bd. VIII. 1876. p. 56, sowie Darboux Bull. X.).

Referent glaubt wohl sagen zu dürfen, dass die Vorzüge des Originals sich erhalten und neue sich ihnen zugesellt haben. Unter diese letzteren sind vor allen zu rechnen: Die wichtigen Ergänzungen von Herrn Nöther (worüber weiter unten), die Fortführung des Literaturverzeichnisses bis auf die neueste Zeit und seine historische Ordnung nebst vielfachen neuen Literaturhinweisungen im Texte, die Berücksichtigung der neueren Arbeiten im Texte, soweit sie sich in den Grenzen des im Buche gebotenen Stoffes halten (so namentlich der des Herrn Bruno selbst, der

Herren Sylvester, Jordan u. A.), die Einfügung der wichtigeren von den dem Original beigefügten Noten in den Text.

Da die Kürzungen, welche das Original hie und da erlitten hat, unwesentlicher Natur sind, so wird es hier genügen, den Inhalt des neu Hinzugefügten zu besprechen.

Die erste wesentliche Neubearbeitung gilt Cap. II. und III. des Originals, die über die Resultanten und Discriminanten der binären Formen handeln, eine Neubearbeitung, wie sie schon damals Herr Noether als wünschenswert für eine deutsche Ausgabe bezeichnete.

Man bestrebt sich in neuerer Zeit immer mehr, den algebraischen Grössen und Formen eine arithmetische Behandlung zu Teil werden zu lassen, weil diese einer strengeren Begründung fähig ist. Sucht man daher die Bedingungen des Zusammenbestehens zweier Gleichungen (in einer Variabeln) $\varphi = 0$, $\psi = 0$, nebst den gemeinsamen Factoren, wenn solche existiren, so verfährt man genau nach der Methode des grössten gemeinsamen Divisors, woraus das Gleichungssystem resultirt:

$$\begin{aligned} \varphi &= S\psi + \psi_1 \\ \psi &= S\psi_1 + \psi_2 \\ &\cdots\cdots \\ \psi_{\mu-1} &= S_\mu \psi_\mu + \psi_{\mu+1}. \end{aligned}$$

Dann ist die Aufgabe im Wesentlichen gelöst, sobald es gelingt, einen beliebigen der Reste ψ in der Form

$$\psi \equiv P\varphi + Q\psi$$

darzustellen, wo P, Q ganze Functionen sind. Dies führt auf ein System linearer Gleichungen mit linearen Unbekannten.

Diese Behandlung ist, soweit dem Referenten bekannt, dem Wesen nach mit derjenigen identisch, die Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen giebt. Weitere Aenderungen betreffen den Abschnitt über die Covarianten (Cap. VI. des Originals). Vor Allem ist die wichtige Entdeckung des Herrn Bruno (cf. F. d. M. XII. 1880.) aufgenommen, die hier kurz recapitulirt werden möge.

Auf die gegebene Form $f(x, y)$ werde die lineare Substitution angewandt:

$$x = p\xi + q\eta, \quad y = p'\xi + q'\eta;$$

dann genügt bekanntlich jede Covariante φ den beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$y\frac{\partial\varphi}{\partial x} = a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \cdots ma_{m-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_m}$$

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial y} = a_m\frac{\partial\varphi}{\partial a_{m-1}} + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ma_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0},$$

oder kürzer

$$y\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \delta = 0, \qquad x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \delta' = 0.$$

Bezeichnet man andererseits die Processe

$$p\frac{\partial}{\partial q} + p'\frac{\partial}{\partial q'}, \qquad q\frac{\partial}{\partial p} + q'\frac{\partial}{\partial p'}$$

mit δ_1, δ_2, so lassen sich die für die Covariante φ' der transformirten Form F giltigen beiden Differentialgleichungen darstellen durch:

$$\delta_1\varphi' = 0, \quad \delta_2\varphi' = 0.$$

Weiter hat Herr Bruno gezeigt, wie man das Cayley'sche Verfahren, aus dem ersten resp. letzten Gliede einer Covariante die übrigen abzuleiten, formal einfacher darstellen kann, nämlich:

$$\varphi = x^\nu e^{\frac{y}{x}\delta'} . C_0 = y^\nu e^{\frac{x}{y}\delta} . C_\nu,$$

wo C_0 der erste, C_ν der letzte Coefficient ist, δ, δ' die obigen Processe, und e^ξ die bekannte Operation bedeutet.

Die besonderen Eigenschaften der Covarianten (§ 17) haben verschiedenartige Zusätze erhalten. Auf die Relationen zwischen den Invarianten einer Covariante und den Invarianten der zugehörigen Form ist genauer eingegangen.

Der Hermite'sche Satz (Original No. 132) ist in der Weise erweitert, dass er heisst: „Sind $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ Covarianten der Form $f(x, y)$ von den Ordnungen ν, $\nu+2$ und eliminirt man x aus den beiden Gleichungen:

$$\psi(x, 1) = 0, \qquad \frac{\varphi(x, 1)}{\psi'(x, 1)} = \zeta,$$

so sind die Coefficienten der Resultante sämmtlich Invarianten von f."

Die §§ 18, 19 über die Anzahl der Grundformen einer gegebenen Form und die simultanen Covarianten bieten mit Rücksicht auf die klassischen Untersuchungen Gordan's und durch Hinweise auf eine moderne von Herrn Sylvester eingeschlagene Richtung mancherlei Neues. Die Darstellung in § 20, der von der Anwendung der Covarianten auf cubische und biquadratische Gleichungen handelt, lehnt sich genauer an die in Clebsch's „Binäre Formen" gegebene an, als dies früher der Fall war. Bei Aufstellung der Invariantenkriterien für die Unterscheidung des Falles vier reeller von dem vier complexer Wurzeln einer Gleichung vierten Grades hat Herr Noether einen wesentlichen Zusatz gemacht, der bisher nicht bemerkt zu sein scheint, und der beide Fälle genau von einander trennen lehrt. Die Theorie der associirten Formen und der typischen Darstellung der Formen (§§ 21, 22) sind durch eine sorgfältige Neubearbeitung dem Verständnis des Lesers näher gerückt.

Der wesentlichste Zusatz von Herrn Noether betrifft wohl die characteristischen Gleichungen für die Resultante und Discriminante (§ 25). Für diese gelten einmal die allgemeinen Invarianten- und Combinantengleichungen, sodann hatte Herr Brioschi ein weiteres System von ihnen eigentümlichen Gleichungen aufgestellt. Herr Noether beweist nun, dass schon eine einzige dieser Brioschi'schen Gleichungen diese beiden Bildungen je eindeutig characterisirt. Der Beweis beruht auf einer nicht ganz einfachen Umformung dieser Gleichungen.

Endlich ist auch der Schlussparagraph (26), über die symbolische Darstellungsform der Covarianten, im Anschluss an Clebsch etwas weiter ausgeführt, um dem Leser den Zugang zu den deutschen Arbeiten über Invariantentheorie zu erleichtern.

Den Tabellen der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung (die unter Verantwortlichkeit des Herrn Bruno stehen) geht eine für den Leser sehr bequeme Erklärung ihrer Construction voraus. Die Tabellen der In- und Covarianten sind dagegen von Herrn Walter neu berechnet worden.

Die binäre Form sechsten Grades ist dabei, abweichend vom Original, bei Seite gelassen worden.

So möge sich denn die deutsche Ausgabe, die auf einem verhältnismässig geringen Raum das ganze, so bedeutend angewachsene Grundmaterial der binären Invariantentheorie bewältigt, ausser den Freunden des Originals recht viele neue erwerben und möge dadurch die Formentheorie in Deutschland einen neuen Aufschwung nehmen. My.

F. Faà de Bruno. Trois notes sur la théorie des formes.
Klein Ann. XVIII. 280-288.

Dem Inhalt nach mit den im vorigen Jahrgang der Fortschritte (insbesondere der Abhandlung im Am. J.) besprochenen Arbeiten identisch. My.

E. B. Christoffel. Bemerkungen zur Invariantentheorie.
Klein Ann. XIX. 280-290.

Eine nach Angabe des Herrn Verfassers aus dem Ende der sechziger Jahre datirende Arbeit. Zwei Hauptmomente characterisiren sie, erstens, dass die (lineare) Transformationstheorie homogener Formen im weiteren Verlaufe mehr von den Eigenschaften der anzuwendenden Substitutionen, als von denen der zu transformirenden Formen abhängt, zweitens, dass hier wohl zuerst das Gauss'sche Princip der Aequivalenz zweier Formen, das schon Herr Gram (Clebsch Ann. VII.) auf die Invariantentheorie anwandte, consequent dazu benutzt wird, den ersten Hauptsatz der Theorie abzuleiten, dass es immer (die Allgemeinheit der Coefficienten in der gegebenen Form vorausgesetzt) eine endliche Zahl von absoluten (rationalen) Invarianten giebt, durch die sich alle anderen rational ausdrücken lassen.

(Das Gauss'sche Princip lautet bekanntlich, dass die notwendige und hinreichende Bedingung der Aequivalenz zweier Formen die ihrer Aequivalenz mit einer dritten ist).

Als besonders wichtig tritt bei der Beweisführung ein Process auf, der vom Herrn Verfasser als systematische Elimination bezeichnet wird. Ist ein System von Gleichungen gegeben:

$$\varphi_1(x) = 0, \ \varphi_2(x) = 0, \ldots \varphi_m(x) = 0,$$

und sucht man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz wenigstens einer gemeinsamen Wurzel x, so setzt man zunächst die Resultante $B(\varphi_1 \varphi_2)$ gleich Null. Dann existirt ein gemeinsamer (grösster) Factor φ_2'; man setze nun die Resultante $B(\varphi_2' \varphi_3) = 0$ etc. Dann sind die geforderten Bedingungen:

$$B(\varphi_1 \varphi_2) = 0, \quad B(\varphi_2' \varphi_3) = 0 \ldots \quad B(\varphi_{m-1}' \varphi_m) = 0,$$

und die Schlussgleichung $\varphi_m'(x) = 0$ liefert die gesuchten Wurzeln x. Für das Aequivalenzproblem zweier homogener Formen hat man Gleichungen der Form

$$b_i = a_i',$$

wo die a_i die Coefficienten der gegebenen, aber transformirten, die b_i dagegen die einer zweiten gesuchten Form sind. Aus diesen sind die Substitutionscoefficienten (in irgend einer Reihenfolge) systematisch zu eliminiren, ein Geschäft, das bekanntlich Aronhold wegen seiner Complicirtheit unterlassen hat, um es durch andere, wenn auch mehr indirecte Processe zu ersetzen.

Für das Aequivalenzproblem selbst (alle Formen mit den Coefficienten b_i aufzusuchen) genügt die Betrachtung der eben dargelegten Resultantenbedingungen; die Bedeutung der Schlussgleichungen liegt wesentlich nur in ihrer Anzahl σ, „der Ordnung der systematischen Elimination." Die Zahl σ hat für gewisse Wertsysteme der gegebenen Coefficienten a_i einen höchsten Wert, und es zeigt sich nach Einführung der Gauss'schen Aequivalenzbedingungen, dass alle weiteren Entwickelungen, somit auch das Endresultat nur unter der einen Bedingung gültig sind, dass σ diesen höchsten Wert annimmt (was z. B. für die cubische ternäre Form

$$x_1^3 + 3x_2^2 x_3$$

nicht der Fall ist).

Die Hauptschwierigkeit des weiteren Verfahrens besteht darin,

von den neu eingeführten Coefficienten einer dritten Form soviel wieder zu eliminiren, als ihrer abhängige Variable sind, und danach die so resultirenden Gleichungen in Bezug auf die unabhängigen Restcoefficienten identisch gleich Null zu setzen.

Das erste Verfahren ist dem von Gauss in seiner Dem. nova altera (IV.) angewandten nachgebildet.

Zum Schluss bemerkt der Herr Verfasser, dass die (seit Gordan) moderne Frage nach der Endlichkeit des Systems der Formen, durch die sich alle anderen als ganze (nicht nur rationale) darstellen lassen, wohl kaum der Transformationstheorie als solcher allein angehören dürfte, sondern in der Formenbildung selbst ihre Wurzeln hat. My.

C. Stéphanos. Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne. C. R. XCIII. 994-997.

Kurzer Auszug aus einer vom Verfasser der Pariser Akademie überreichten Abhandlung.

Die Einleitung beschäftigt sich mit den Combinanten von (linearen) Gruppen binärer Formen überhaupt, sodann der erste Abschnitt specieller mit den Relationen zwischen den Formen einer Involution und ihrer Jacobiana. Dabei ergiebt sich der Satz:

„Ist h_x^m ein Factor der Jacobiana einer Involution m^{ter} Ordnung

$$(a_x^m + k b_x^m),$$

so enthält die Jacobiana einer zweiten solchen Involution

$$(h_x^m + k' \eta_x^m)$$

die Form a_x^m als Factor.“ Der zweite Abschnitt untersucht insbesondere in einer algebraischen Weise die Frage nach den Involutionen vierter Ordnung mit derselben Jacobiana. Ist die Involution dargestellt durch

$$a_x^4 + k b_x^4,$$

so ist sie völlig bestimmt, wenn man ausser ihrer Jacobiana (erster Ueberschiebung) noch ihre dritte Ueberschiebung $(ab)^3 a_x b_x$

kennt, so dass es nur darauf ankommt, diese zu den einzelnen Involutionen (mit derselben Jacobiana) bezüglichen quadratischen Covarianten aufzustellen. Man erhält deren fünf, die wirklich aufgestellt werden als Wurzeln (Factoren) einer Gleichung zehnten Grades. Es zeigt sich, dass das Problem, diese fünf Covarianten zu finden, zugleich das andere löst, diejenigen linearen Substitutionen aufzustellen, mittels deren eine allgemeine binäre Form sechsten Grades in die canonische Form übergeführt wird, in der das zweite und vorletzte Glied fehlen.

Am Schluss wird eine sehr einfache geometrische Interpretation der fünf zu einer gegebenen Jacobiana gehörigen Involutionen vierter Ordnung gegeben mittels der bekannten Configuration der zehn Punkte und Geraden, die den Schnitt einer Ebene mit den Verbindungs-Geraden und Ebenen von fünf beliebigen Raumpunkten bildet. Diese Configuration ist ja ihre reciproke Polare in Bezug auf einen ganz bestimmten Kegelschnitt der Ebene. Die Verbindungslinien, die von einem der fünf Raumpunkte nach den vier anderen gehen, treffen die Ebene in vier Punkten, den Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels, das aus dem ausgezeichneten Kegelschnitt eine der fünf Involutionen vierter Ordnung ausschneidet.

Diese Arbeit verspricht der Ausgangspunkt einer neuen algebraischen Theorie zu werden, die die Anzahl und Natur der binären (ternären etc.) Grundformen erforscht, die zu einer bestimmten Covariante derselben (wenn man von dieser als gegebener Form ausgeht) gehören.

Man vergleiche z. B. die seitdem erschienenen Arbeiten des Herrn Brill und des Referenten, sowie auch den Bericht von Herrn Jordan über obige Arbeit. My.

J. C. Malet. On a class of invariants. Lond., R. S., Proc. XXXIII. 215.

Auszug aus einer Arbeit, die wahrscheinlich in nächster Zeit in den Philos. Trans. erscheinen wird. Sie beschäftigt sich mit

zwei Arten von Functionen der Coefficienten linearer Differentialgleichungen, die invariante Eigenschaften haben.

Cly. (O.).

G. Bernardi. Sopra le proprietà generali degli invarianti e dei covarianti di una e di più forme ternarie. Batt. G. XIX. 136-151, 258-298.

Eine übersichtliche, principiengemässe Zusammenstellung der bekanntesten Eigenschaften der im Titel angegebenen Formen.

My.

C. le Paige. Note sur certains covariants. Belg. Bull. (3) I. 480-499.

F. Folie. Rapport sur cette note. Belg. Bull. (3) I. 461-462.

1) Die Functionaldeterminante von $2k+1$ binären Formen, deren Ordnung grösser als $2k$ ist, ist eine lineare Function von $2k+1$ Formen, deren Coefficienten Summen von Producten linearer Covarianten der Formen zu zwei und zwei sind.

2) Das Quadrat der Functionaldeterminante von $2k$ binären Formen, deren Ordnung grösser als $2k-1$, ist eine quadratische Function dieser Formen, deren Coefficienten Determinanten mit Elementen sind, welche lineare Covarianten der Formen zu zwei und zwei sind.

Mn. (O.).

Julius Petersen. Om binäre Formers Kovarianter. Zeuthen T. (4) IV. 177-190; V. 33-40.

Um die Bildung von Covarianten binärer Formen zu untersuchen, wählt der Verfasser eine Methode, welche in der Form etwas von den sonst üblichen abweicht, indem er durchgängig zum Characterisiren einer Covariante nur den ersten („the source“) oder letzten Coefficienten benutzt. Diese Grössen, welche, für eine Grundform gebildet, beziehungsweise den Differentialgleichungen

$$\Delta_1 u = a_0 \frac{\partial u}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial u}{\partial a_2} + \cdots = 0$$

oder

$$\Delta_2 u = na_1 \frac{\partial u}{\partial a_0} + (n-1)a_2 \frac{\partial u}{\partial a_1} + \cdots = 0$$

genügen, und die in mehreren Beziehungen eine besondere Betrachtung verdienen, nennt er „Halbinvarianten". Aus diesen lassen sich bekanntlich wieder die verschiedenen Coefficienten der Covarianten ableiten, und ebenso lässt sich der Zusammenhang der Formensysteme mittels derselben untersuchen. Namentlich wird gezeigt, dass jede Halbinvariante als Summe von Ueberschiebungen mit a_0 aus Halbinvarianten, deren Grad um eine Einheit niedriger ist, dargestellt werden kann. Daraus folgt wieder der specielle Satz, dass die Functionaldeterminante einer Functionaldeterminante durch niedrigere Formen darstellbar ist.

Gm.

A. Capelli. Sopra un problema di partizione in relazione alla teoria delle forme algebriche. Batt. G. XIX. 87-116.

Der Herr Verfasser geht von der allgemeinsten ganzen rationalen Function f von n Reihen von homogenen Variabeln

$$x_1, x_2, \dots x_n; \quad y_1, y_2 \dots y_n \text{ etc. bis } t_1, t_2, \dots t_n$$

mit den bez. Graden $m', m'', \dots m^{(n)}$ aus und wendet auf sie eine Operation des Schemas $D_{\xi\eta}$ an:

$$\sum_i \eta_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, \dots n).$$

Dadurch entsteht eine unabsehbare Reihe von Covarianten, aus denen er zwei Arten heraushebt.

Erstens die, die in sämmtlichen Variabelnreihen von gleichem Grade wie f selbst sind. Soll dies z. B. für die Reihe der x statt haben, so muss die Operation $D_{x\eta}$ ebenso oft vorkommen, als die umgekehrte $D_{\xi y}$ (bei variirenden η und ξ Reihen). Und ebenso für die anderen Reihen.

Zweitens diejenigen, wo diese Bedingung für alle Variabelnreihen mit Ausnahme einer einzigen, etwa der x, erfüllt ist. Eine solche entsteht z. B. nach Ausführung der Operationen

$$D_{xy}^{k} \quad D_{xz}^{m'-k}.$$

Dann giebt es für diese beiden Covariantenreihen eine endliche Zahl linear unabhängiger, aus denen sich dann aber alle anderen (derselben Reihe) linear zusammensetzen. Diese beiden Zahlen sucht der Verfasser zu bestimmen.

Ist die erste dargestellt durch die Function

$$\pi(m', m'', \ldots m^{(n)}) \equiv \pi(m),$$

so wird die zweite keine andere als

$$\pi(m) - \pi(m-1).$$

Demnach reducirt sich die Frage auf die nach der Bestimmung der Function π. Zu dem Zweck wird die algebraische Aufgabe durch die rein arithmetische ersetzt: Wieviel verschiedene Systeme ganzer positiver Zahlen (an Anzahl n^2) giebt es, die so in Form einer n-reihigen Determinante geschrieben werden können, dass die Summe der Zahlen in der i^{ten} Reihe gleich der Summe der Zahlen in der i^{ten} Colonne und gleich $m^{(i)}$ wird?

Unbeschadet der Allgemeinheit kann man die n Zahlen m als einander gleich, $= m$, annehmen, wodurch sich das Problem wesentlich vereinfacht.

In dieser Form lässt es sich wieder rückwärts algebraisch fassen und durchführen, nämlich so: Sind

$$x_i^j \; (i, j = 1, 2, \ldots n)$$

irgend welche n Veränderliche, so entwickle man die m^{te} Potenz der Determinante derselben. Die Zahl der verschiedenen Glieder dieser Entwicklung ist $= \pi(m)$, oder wie man jetzt genauer schreiben kann, $= \pi(m, n)$. Für $n = 2$ führt dies auf ein bekanntes Resultat. Ist nämlich symbolisch die vorgegebene Form $a_x^m \; b_y^m$, so sind die zuerst genannten Covarianten alle in dem Typus

$$(\mu_1 a_x b_y + \mu_2 a_y b_x)^m$$

enthalten, wo die Ausdrücke $\mu_1^k \; \mu_2^{m-k}$ willkürliche Coefficienten bedeuten.

Wollte man für $n = 3$ ganz analog verfahren (d. h. für eine Form $a_x^m\, b_y^m\, c_z^m$), so hätte man mit Hülfe der sechs Glieder

$$+A_1,\ +A_2,\ +A_3;\quad -A_4,\ -A_5,\ -A_6$$

der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

die m^{te} Potenz des Ausdrucks

$$\Sigma f_i\, A_i$$

zu entwickeln. Die Entwickelung würde genau so viel verschiedene Glieder liefern, als die der einfacheren $(\Sigma f_i)^m$ d. h. $(m+5)$.

In der Tat aber wird die gesuchte Zahl $\pi(m, 3)$ kleiner, und es handelt sich im Weiteren darum, diesen Unterschied aufzufinden. Für den vorliegenden Fall gelingt dies mittels der Entwickelung

$$\left[\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_3} + \frac{\mu_3}{\mu_4} + \frac{\mu_4}{\mu_5} + \frac{\mu_5}{\mu_6} + \frac{\mu_6}{\mu_1}\right]^m.$$

Dann ist der entsprechende Covariantentypus:

$$\left[\frac{\mu_1}{\mu_2} A_1 + \frac{\mu_2}{\mu_3} A_2 + \frac{\mu_3}{\mu_4} A_3 + \frac{\mu_4}{\mu_5} A_4 + \frac{\mu_5}{\mu_6} A_5 + \frac{\mu_6}{\mu_1} A_6\right]^m.$$

Im Allgemeinen ergiebt sich für n Variabelnreihen das merkwürdige Resultat, dass der Coefficient irgend eines Gliedes f_i der bezüglichen Entwickelung

$$[\Sigma \pm a_{x'}\, b_{x''}\, c_{x'''} \dots l_{x^{(n)}}]^m$$

proportional ist dem Ausdruck

$$\frac{\Omega^m \,.\, f_i}{\Omega^n \,.\, f},$$

wo Ω den Process

$$\Sigma \pm \frac{\partial}{\partial x_1'}\ \frac{\partial}{\partial x_2''} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n^{(n)}}$$

angiebt. Wegen der näheren Ausführung muss in Hinsicht auf die grosse Allgemeinheit des Gegenstandes auf die höchst interessante Abhandlung selbst verwiesen werden. My.

Th. Pepin. Sur la classification des formes quadratiques binaires. Rom., Acc. P. d. N. L. XXXIII. 354-392.

Das Referat erfolgt im nächsten Bande. My.

C. le Paige. Sur les formes binaires à plusieurs séries de variables. Belg. Bull. (3) II. 40-53.

F. Folie. Rapport sur ce mémoire. Belg. Bull. (3) II. 5-6.

Der Verfasser wendet direct die symbolische Bezeichnung für die Formen mit mehreren Reihen von Variabeln an, statt ein reducirtes binäres System zu berechnen, wie es Clebsch getan hat. Er kann in Folge der Anwendung dieser Methode die Gruppen von Variabeln verschiedenen Substitutionen unterwerfen. Für den Fall trilinearer Formen stellt er zwei canonische Formen auf, die es ihm leicht machen, diese Formen zu untersuchen. Diese Methode lässt sich auch auf mehrlineare Formen anwenden.

Mn. (O.).

A. Cayley. Specimen of a literal table for binary quantics. Sylv., Am. J. IV. 248-256.

Diese Arbeit tritt nach des Verfassers Angabe etwas verspätet auf, da sie ursprünglich den Zweck hatte, die Berechnung der Covarianten der binären Form fünften Grades zu erleichtern; sie ist indessen noch jetzt für die analoge Berechnung der höheren Formensysteme sehr brauchbar. Sie giebt, rein arithmetisch betrachtet, an, wie oft eine der Zahlen 1 bis 18 (soweit ist die Tabelle vorläufig fortgeführt) als Summe niedrigerer ganzer Zahlen darstellbar ist, z. B. die Zahl 4 als resp. Summe von

$$4,\ 1+3,\ 2+2,\ 1+1+2,\ 1+1+1+1.$$

Für den algebraischen Zweck schreibt aber der Verfasser diese Zusammensetzungen in literaler Form, d. h.: Bedeutet a die Null, b die Eins, c die Zwei etc., so kann man statt obiger Formen

folgende einführen:

$$e,\ bd,\ c^2,\ b^2c,\ b^4.$$

Dann aber lässt sich die Berechnung der Covarianten der binären Formen (innerhalb der Grenzen der Tabelle) folgendermassen ausführen. (Selbstverständlich betrifft diese Berechnung nur den literalen Teil der Covariante; die bezüglichen Zahlenfactoren sind auf andere Weise zu ermitteln). Es möge z. B. die Zusammensetzung der Coefficienten der bekannten Covariante Q einer binären Form dritten Grades aus den Coefficienten dieser Form ermittelt werden. Die Gewichte der Coefficienten von Q sind 3, 4, 5, 6. Ist die gegebene Form $(a, b, c, d)\,(x, y)^3$, so bestehen die Coefficienten von Q aus folgenden Gliedern:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} a^2d & abd & acd & ad^2 \\ abc & ac^2 & b^2d & bcd \\ b^3 & b^2c & bc^2 & c^3 \end{array}\right|,$$

d. h. man entnehme aus der Tafel die Teilungen der Zahlen 3, 4, 5, 6 (also d, e, f, g) und vernachlässige alle symbolischen Producte, die Factoren e, f, g enthalten. Macht man die Restproducte homogen (mittels einer geeigneten Potenz von a), so ergiebt sich obige kleine Tabelle, d. i. die literale Tabelle für Q. Analog gilt die allgemeine Regel. Die Tabelle selbst ist nach der Arbogast'schen Regel unmittelbar abgeleitet. Die Anzahlen, wie oft eine Zahl 1, 2 etc. als Summe dargestellt werden kann, finden sich schon bei Euler, der sie bis zur Teilung von 59 fortgesetzt hat. My.

C. le Paige. Sur l'invariant du dix-huitième ordre des formes binaires du cinquième degré. C. R. XCII. 241-242.

Diese Invariante ist bekanntlich die Resultante der Form und ihrer Canonizante. Es wird gezeigt, dass, wenn sie verschwindet, eine Wurzel der Form immer zugleich ein Doppelelement einer durch die vier anderen Wurzeln bestimmten Invo-

lution ist. Daraus geht die Hermite'sche Factorenform dieser Invariante hervor. My.

J. J. SYLVESTER. Sur les covariants irréductibles du quantic binaire du 8me ordre. C. R. XCIII. 192-196, 365-369.

J. J. SYLVESTER. Demonstration of the impossibility of the binary octavic possessing any groundform of deg-order 10.4. Sylv., Am. J. IV. 62-85.

J. J. SYLVESTER. Tables of the generating functions and groundforms of the binary duodecimic, with some general remarks, and tables of the irreducible syzigies of certain quantics. Sylv., Am. J. IV. 41-62.

Herr von Gall hatte (Clebsch Ann. XVII. 31-52, 139-152, siehe F. d. M. XII. 1880. p. 93) das vollständige Formensystem einer binären Form achter Ordnung f aufgestellt. Dabei ergab sich zwischen seinen Resultaten und den Forderungen der Sylvester'schen Theorie schliesslich nur noch eine Differenz, indem Ersterer eine irreducible Covariante von der Grad-Ordnung [10, 4] erhielt, die nach Herrn Sylvester unmöglich ist.

Letzterer beweist nun in der ersten Note, dass eine solche Covariante stets reducibel sein muss, indem er auf Grund zweier specieller Formen von f die 32 vorhandenen reducibeln Covarianten der angegebenen Grad-Ordnung als linear unabhängig nachweist, andererseits die Zahl der linear unabhängigen Covarianten dieser Art mit Hülfe der Cayley'schen Formel berechnet und gleichfalls 32 erhält.

In der zweiten Note constatirt der Verfasser die Unzulänglichkeit des erhaltenen Resultats wegen einiger Rechenfehler, untersucht aber die Frage auf's Neue, indem er von einer anderen speciellen Form (für die die Invarianten zweiten und dritten Grades verschwinden) ausgeht. Für diese bleiben von den 32 obigen reducibeln Covarianten (10.4) noch zehn übrig. Es wird zunächst gezeigt, dass diese in einer syzygetischen Relation der

Grad-Ordnung [10, 4] nicht auftreten können. Daher wird diese Relation in der Tat eine von niedrigerer Grad-Ordnung etc. wie oben. Der Beweis, dass die zehn erwähnten Covarianten linear unabhängig von einander sind, wird so geführt, dass von den Determinanten einer Matrix mit zehn Horizontal- und elf Verticalreihen (deren Elemente ganze positive Zahlen sind) nachgewiesen wird, sie verschwinden nicht sämmtlich (für den Modul 11). Dies wird soweit reducirt, dass endlich eine drei-reihige Determinante bleibt, deren Wert gleich —35 ist, also den Factor 11 nicht enthält. Demnach sind jene zehn Covarianten in Bezug auf diesen Modul linear unabhängig, also auch überhaupt. Eine weitere Controlle dieses Resultats liegt im Folgenden. Die fragliche von von Gall aufgestellte Covariante ist eine lineare Function obiger zehn Covarianten, also muss eine bestimmte elf-reihige Zahlendeterminante verschwinden. Sylvester hat berechnet, dass sie die Factoren 11, 13, 17 hat, wodurch die Wahrscheinlichkeit für die Genauigkeit seiner Ziffern erheblich gewachsen ist. Die Details dieser umfangreichen Rechnung befinden sich in der erstgenannten Abhandlung im Am. Journal.

In der zweiten Abhandlung werden die von Herrn Franklin berechneten Tabellen der erzeugenden Functionen und Grundformen der binären Form zwölften Grades mitgeteilt und aus ihnen und den früher aufgestellten (den Formen bis zum Grade 10) von Herrn Sylvester Schlüsse gezogen. Die Totalsumme der Grundformen beträgt 9+9, der höchste Grad in den Coefficienten ist 14, in der Variabeln 34. Für letzteren Fall giebt es nur eine Bildung, welche vom vierten Grade in den Coefficienten ist. Die Zahl 34 stimmt vollständig mit der Angabe von C. Jordan überein, wonach dies die obere Ordnungsgrenze für die Grundformen eines Systems von binären Formen, deren keine höher als von der zwölften Ordnung ist, bildet. Das zweite Resultat ist gleichfalls ein besonderer Fall einer allgemeinen Erscheinung, indem in allen Tabellen für die Grundformen einer binären Form n^{ter} Ordnung ($n = 3, 4 \dots 12$ excl. 11) drei resp. vier der Grad der Form ist, die die höchste Ordnung auf-

weist. Ein anderes Gesetz folgt gleichfalls aus dem Anblick der Tabellen selbst, dass die irgend einem Grad in den Coefficienten entsprechende Maximalordnungszahl einer Grundform jedenfalls nicht wächst, wenn der Grad zunimmt. Dies ist das „law of shrinkage" (Einschränkungsgesetz). Es steht in engem Zusammenhang mit der Tatsache, dass ein Teil der Grunddifferentianten (Covariantenquellen) für alle Ordnungen gegebener binärer Formen es bleibt, ein anderer Teil dagegen beim Wachsen dieser Ordnungen irgendwann reducibel wird und es dann bleibt. Zu den ersteren gehören z. B. alle Grunddifferentianten zweiten und dritten Grades, zu den zweiten z. B. die Discriminante einer Cubik, die schon für eine Quartik reducibel wird. Weiter sind die Quellen (Leitglieder, sources) aller Grundformen einer Quintik bei höherer als fünfter Ordnung nur vorübergehende (transient, transitory) Grunddifferentianten.

Ein allgemeines Gesetz über diese Vergänglichkeit der Grunddifferentianten behält sich Herr Sylvester vor. Als Hülfsmittel dazu dient die Aufstellung der zu einer gegebenen Form gehörigen irreducibeln Grund-Syzygien, die schon Cayley in Angriff genommen (und z. B. für die Quintik aufgestellt) hatte. Die Sylvester'sche Methode ist allgemeiner als die Cayley'sche, da sie die endliche Form der Grundformen (cfr. F. d. M. X., XI. 1878, 1879.) nicht voraussetzt. Es werden die Syzygien der Quintik, Sextik, und des Quadrik-Cubik-Systems in Tabellen mitgeteilt. My.

F. Brioschi. Il risultante di due forme binarie l'una cubica e l'altra biquadratica. Chelini, Coll. Math. 221-223.

Sei v die erste, u die zweite Form, so wird die Resultante

$$R = 27(5jA+iB)-(M+45F+54P),$$

wo i, j resp. A die bekannten Invarianten von u resp. v (ohne Zahlenfactoren), B die bilineare Invariante der zweiten Ueberschiebung (von u über die quadratische Covariante von v) und dieser Covariante, endlich M, F, P drei weitere einfache simultane Invarianten von u und v sind. My.

F. Brioschi. Sopra una forma binaria dell' ottavo ordine. Chelini, Coll. Math. 213-219.

Die vierte Ueberschiebung einer binären Form n^{ter} Ordnung f über sich selbst ist von derselben Ordnung wie f nur für den Fall $n = 8$. Herr Brioschi untersucht die Frage, wann in diesem Falle beide Formen (abgesehen von einem constanten Factor) identisch sind, und zwar mit Hülfe der Résultate seiner früheren Arbeit (Clebsch Ann. XI. 401-412, Rend. Ist. Lomb. (2) X. 48-58, siehe F. d. M. IX. 1877. p. 238): „La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre" namentlich des Resultats, dass eine Covariante einer binären Form als ganze Function von y und der Differentialquotienten von y nach ω darstellbar ist, wenn y und $d\omega$ (abgesehen von einer Potenz von f und einem constanten Factor) mit der Hesse'schen Covariante von f, resp. dem Differential der ursprünglichen Variabeln übereinstimmen. Dies führt bei der vorliegenden Frage auf eine Differentialgleichung erster Ordnung in y, die nach einigen einfachen Transformationen auf die Form der von Schwarz (Borchardt J. LXXV. p. 292-335, siehe F. d. M. V. 1873. p. 249) auf ihre algebraischen Integrale hin untersuchten Differentialgleichung dritter Ordnung führt. Für den Fall des Octaedertypus, welcher der gestellten Bedingung entspricht, genügt nur die Hesse'sche Covariante einer Form sechsten Grades, deren vierte Ueberschiebung mit sich selbst identisch verschwindet. Zu demselben Resultate gelangt Herr Brioschi auch direct mit Hülfe einer passenden Normalform von f, für die alle Coefficienten a_i von f $(i = 0, \dots 8)$ ausser a_1, a_4, a_7 gleich Null gesetzt sind. Dann reducirt sich die Forderung auf die eine Bedingung:

$$2a_1 a_7 + 25 a_4^2 = 0.$$

Setzt man noch speciell $a_7 = -1$, $8a_1 = 1$, so erhält man die canonische Form von f (mit der verlangten Eigenschaft)

$$x_1^7 x_2 + 7 x_1^4 x_2^4 - 8 x_1 x_2^7,$$

die sich schon bei Gordan („Binäre Formen mit verschwindenden Covarianten", Math. Ann. XII. p. 147-166, s. F. d. M. IX. 1877. p. 79) vorfindet. My.

C. LE PAIGE. Sur le déterminant fonctionnel d'un nombre quelconque de formes binaires. C. R. XCII. 688-690.

Das Clebsch'sche Verfahren der Umformung einer Functionaldeterminante zweier binärer Formen wird hier erweitert, auf beliebig viele solche Formen angewandt und liefert die beiden Sätze: „Für $2k+1$ Formen, deren Grad (im Allgemeinen ungleich, aber) mindestens $2k$ ist, wird sie eine lineare Function dieser Formen, deren Coefficienten Summen von Producten bilinearer Covarianten derselben sind.“ und: „Ihr Quadrat wird bei $2k$ Formen, deren Grad jedenfalls $2k-1$ übersteigt, eine quadratische Function derselben; die Coefficienten sind jetzt Summen von Producten von bilinearen Covarianten je zweier Formen und von Covarianten zweiter Ordnung der einzelnen Formen.“

My.

G. BATTAGLINI. Sulle forme ternarie bilineari. Rom., Acc. L. (3) V. 24-26.

Eine kurze Angabe der wichtigsten Eigenschaften solcher Formen, im Wesentlichen nach ihrer geometrischen Bedeutung.

Das Verschwinden einer solchen Form repräsentirt die allgemeinste „correlative“ Abhängigkeit zwischen den Punkten (Geraden) zweier Ebenen, daher ist eine Form in Punktcoordinaten immer zugleich verbunden mit der ihr aequivalenten in Liniencoordinaten. Die specielleren Fälle, wenn die Determinante der Form, resp. ihre ersten Minoren verschwinden, werden erörtert. Sodann werden beide Ebenen als sich deckend gedacht. In dieser Ebene hat man zwei Fundamentalkegelschnitte, der eine als Ort der Punkte, deren entsprechende Geraden durch sie gehen, der andere dualistisch dazu. Beide berühren sich zweimal. Die dadurch bestimmte Kegelschnittinvolution gewinnt eine sehr einfache Bedeutung. Die beiden Berührungspunkte der Kegelschnitte nebst ihrem gemeinsamen Pol bilden eine „involutorische Terne“ der Beziehung, d. h. jedem der drei Punkte entspricht ein und

dieselbe Gerade, ob man ihn als Punkt der ersten oder zweiten Ebene auffasst. Analog die beiden Tangenten nebst ihrer Sehne. Von der bezüglichen Gleichung dritten Grades hängen die Ausnahmefälle der Correlation ab. Der Verfasser betrachtet auch noch die Bedeutung der successiven Wiederholung der Correlation, wobei (reciproke) Correlation und Collineation abwechseln.

My.

F. R. Scherrer. Ueber ternäre biquadratische Formen. Pr. Thurgau.

F. R. Scherrer. Ueber ternäre biquadratische Formen. Brioschi Ann. (2) X. 212-224.

Eine Durchführung der von Herrn Reye in seinen bekannten Arbeiten unternommenen Erweiterung des Polarenbegriffs mit Hülfe des Begriffs der Momente eines Massensystems in Bezug auf Gerade, Ebenen etc. für den im Titel angegebenen Fall.

Im ersten Teil werden die Hülfssätze aus dem ternären Gebiet vorausgeschickt, über Darstellung einer ternären Form als Summe von $\binom{n+2}{2}$ Potenzen, über Apolarität einer Curve k^{ter} Klasse und Curve $(n-k)^{\text{ter}}$ Ordnung etc. (cfr. Reye, Crelle's J. LXXII., LXXVIII., LXXXII.).

Demnach wird zuvörderst die binäre biquadratische Form (= 0 gesetzt und als Curve vierter Klasse k^4 gedacht) als Summe von 15 Potenzen dargestellt, wo die bezüglichen linearen Formen willkürlich wählbar, ihre Factoren aber dann eindeutig bestimmt sind.

Jeder Curve zweiter Ordnung entspricht eine bestimmte zu ihr in Bezug auf die k^4 apolare Curve zweiter Klasse. Zerfällt die letztere in einen doppeltzählenden Punkt, so heisst der apolare Kegelschnitt (d. h. seine sämmtlichen Punkte) „dem Punkte associirt“, und seine Gleichung wird aufgestellt. In derselben können die Coordinaten des festen Punktes mit denen des variabeln vertauscht werden. Dies führt zu dem Satze:

„Geht der einem Punkte A associirte Kegelschnitt durch einen Punkt B, so auch umgekehrt der B associirte durch A.“ Die sich selbst associirten Punkte erfüllen eine Curve vierter Ordnung.

Die Zahl der darstellenden Potenzen der k^4 wird sodann auf sechs reducirt, und zwar ist eine solche Darstellung auf dreifach unendlich viele Arten möglich. Für die Darstellung durch fünf Potenzen ergiebt sich als notwendige und hinreichende Bedingung das Verschwinden der bekannten Clebsch'schen Determinante A, sechsten Grades in den Coefficienten von k^4. Dann existirt nämlich eine zur k^4 apolare c_2, und der Verfasser kommt zum Lüroth'schen Satze, dass die Darstellung dann auf unendlich viele Arten möglich ist, indem auf dem zur k^4 apolaren Kegelschnitt einer der fünf Darstellungspunkte beliebig angenommen werden darf. Dieser Kegelschnitt, doppelt gerechnet, ist dann zugleich die obige Curve vierter Ordnung, der Ort der sich selbst associirten Punkte. Verschwinden die ersten Unterdeterminanten von A (aber nur dann), so ist k^4 als Summe von vier (vierten) Potenzen darstellbar, wie gleichfalls schon Lüroth gezeigt hatte.

Der Verfasser wendet sich nunmehr zur allgemeinen k^4 zurück und zeigt, dass ein Sextupel von sie darstellenden Punkten zugleich ein „associirtes“ ist, d. h. dass immer der durch fünf von ihnen bestimmte Kegelschnitt dem sechsten associirt ist. Daher ist einer der sechs Punkte ganz beliebig und ein zweiter auf dem dem ersten associirten Kegelschnitt irgendwie annehmbar.

Mit Hülfe der allgemeinen Hülfssätze des ersten Abschnitts ergiebt sich leicht der elegante Rosanes'sche Satz: „Durch die zwölf Punkte zweier (in Bezug auf k^4) associirten Sextupel geht stets eine Curve dritter Ordnung und diese ist zur k^4 apolar.“

Im dritten und letzten Abschnitt werden noch einige weitere Eigenschaften der den Punkten der Ebene associirten Kegelschnitte abgeleitet; insbesondere wird die Natur der Schnittpunkte der oben erwähnten Curve vierter Ordnung C_4 mit einem solchen Kegelschnitt, und der derselben Curve mit einer gewissen Curve sechster Ordnung, dem Ort der Punkte, denen Geradenpaare

associirt sind, des Näheren erörtert, wobei einige Clebsch'sche Resultate richtig gestellt werden.

Die zweite Arbeit (in den Annali) enthält in grösserer Gedrängtheit denselben Inhalt. My.

A. Cayley. On the 34 concomitants of the ternary cubic. Sylv., Am. J. IV. 1-16.

Bei Zugrundelegung der canonischen Form

$$f \equiv ax^3 + by^3 + cz^3 + 6\,lxyz$$

und mit Hülfe der bekannten Gundelfinger'schen Formeln werden die sämmtlichen Concomitanten, d. h. Grundformen des Systems (f, u_x) berechnet.

Eine Liste der wichtigsten Arbeiten über diesen Gegenstand wird vorausgeschickt. Das System der 34 Concomitanten ist zuerst von Gordan (Clebsch Ann. I. 90-128, s. F. d. M. II. 1869. p. 61) aufgestellt, sodann von Gundelfinger (Clebsch Ann. VI. 16-23, siehe F. d. M. V. 1873. p. 94), der die Gordan'schen Bildungen teilweise durch einfache Combinationen ersetzt. Der Gundelfinger'schen Anordnung schliesst sich die vorliegende Arbeit an.

Eine jede Concomitante besitzt eine bestimmte deg-class-order, etwa *d. c. o.*, wo *d* der Grad in den Coefficienten, *c* der in den Linien, *o* der in den Punktcoordinaten ist. Diese Characteristik wird jeder Bildung in der Tabelle beigefügt.

Diese selbst ordnet sich in drei Gruppen:

1)	Klasse = Ordnung	, an Zahl	10 Formen
2)	Klasse resp. Ordnung = 0,	„ „	4+4 „
3)	Klasse $\gtrless$ Ordnung	, „ „	8+8 „
		in Summa	34 Formen.

Hinzugefügt werden noch sechs besonders wichtige reducible Formen, z. B. die Discriminante. Diese haben alle die Eigenschaft, eine Potenz von „$abc+8l^3$“ als Factor zu besitzen. So ist z. B. die Discriminante gleich

$$abc(abc+8l^3)^3.$$

Stand die Wahl zwischen mehreren (linear-abhängigen) Bildungen derselben deg-class-order frei, so wurde diejenige bevorzugt, die die höchste Potenz eben jenes Ausdrucks $(abc + 8l^3)$ zum Factor hatte. My.

C. le Paige. Sur une propriété des formes trilinéaires. C. R. XCII. 1048-1049.

C. le Paige. Sur la théorie des formes trilinéaires. C. R. XCII. 1103-1105, C. R. XCIII. 264-265, 509-512.

H. Schubert. Die trilineare Verwandtschaft zwischen drei einstufigen Grundgebilden. Ham. Mitt. 1881.

Herr Le Paige bespricht in diesen Noten einige algebraische und geometrische Fundamentaleigenschaften einer trilinearen Form f, resp. der trilinearen Beziehung

$$f(x, y, z) = 0.$$

Zunächst treten drei Covarianten zweiten Grades und zweiter Ordnung hervor:

$$\Delta_x = u_1(x)u_2(x), \text{ analog } \Delta_y = v_1 v_2, \quad \Delta_z = w_1 w_2$$

mit der Eigenschaft, dass, wenn man die Wurzeln von $u_1 = 0$, $v_1 = 0$ (resp. $u_2 = 0$, $v_2 = 0$) für x, y in $f = 0$ einsetzt, z unbestimmt wird etc. Umgekehrt sind sie dadurch bestimmt. Die Discriminante dieser drei Formen ist stets dieselbe. Mittels der Factoren der drei Covarianten nimmt f die canonische Form an:

$$f = \varkappa u_1 v_1 w_1 + \lambda u_2 v_2 w_2,$$

die demnach eine Verallgemeinerung der bekannten canonischen Form der binären cubischen Formen darstellt. Daraus ergeben sich mannigfache Folgerungen.

Des Weiteren sind ausgezeichnet drei lineare Covarianten von f von der Form:

$$\chi = \mu u_1 + \nu u_2$$

(und desgleichen für die v und w).

Das ganze Covariantensystem von f ist ersetzbar durch das System der sechs linearen Covarianten $u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2$. Nunmehr folgen geometrische Eigenschaften von f. Werden die drei Strahlbüschel in den Ecken eines Dreiecks einer Relation $f = 0$ unterworfen, so ergiebt sich als Ort der Schnittpunkte dreier entsprechender Strahlen eine allgemeine ebene Curve dritter Ordnung, die durch die Ecken des Dreiecks geht. Umgekehrt gehört zu einer solchen, einem Dreieck umschriebenen Curve eine ganze Schaar (Büschel) von Beziehungen f. Soll die Discriminante von f verschwinden, so muss der Parameter des Büschels Wurzel einer Gleichung vierten Grades sein, die für die Curven dritter Ordnung von fundamentaler Bedeutung ist. Ihre beiden Invarianten i, j sind identisch mit den bekannten S, T der Curve.

Eine zweite fruchtbare Interpretation erfährt die Beziehung f, wenn man die Schaar von Tripeln in's Auge fasst, die ein Kegelschnittnetz, das durch drei beliebig auf den Seiten eines Dreiecks angenommene Punkte geht, auf diesen ausschneidet. Diese Schaar ist gradezu durch eine Relation $f = 0$ dargestellt. Daran schliesst sich eine einfache Construction einer ebenen Curve dritter Ordnung, von der neun Punkte gegeben sind.

Herr Schubert untersucht in synthetischer Weise die drei erwähnten quadratischen Covarianten und stellt zwischen ihren sechs singulären Elementen und zwei Tripeln von $f = 0$ eine (der bei der projectivischen Beziehung geltenden ähnliche) Doppelverhältnisrelation auf von der Form

$$D_1 D_2 D_3 = 1.$$

Für eine trilineare Beziehung spielt eine besondere „perspective“ eine ähnliche Rolle, wie solche bei der projectivischen Verwandtschaft.

Als Anwendung behandelt Herr Schubert die lineare Construction einer Fläche dritter Ordnung in zwei besonderen Fällen. Vgl. die Note des Herrn Schubert in den Math. Ann. XVII. My.

G. MAISANO. Sistemi completi dei primi 5 gradi della forma ternaria biquadratica e degl' invarianti, covarianti e contravarianti di sesto grado. Batt. G. XIX. 198-237.

Die Aufstellung der Formen erfolgt mit Hülfe der Clebsch-Gordan'schen Principien, insbesondere im Anschluss an die Gordan'sche Arbeit in Clebsch Ann. I., siehe F. d. M. II. 1870. p. 91 ff. Aus einer Form φ: $b_x c_x d_x \dots (bcu)(bdu)(cdu) \dots (bcd)(dce) \dots$ vom Grade $(m-1)$, welche invariantiv ist in Bezug auf eine gegebene Form $f = a_x^n = b_x^n$ etc., erhält Herr Gordan eine andere solche Form ψ vom Grade m durch folgenden Process: „Man ersetze

λ Factoren $b_x, c_x \dots$ durch resp. $(bau)(cau)\dots$
$\varkappa$ „ $(bcu)(bdu)\dots$ „ „ $(bca)(bda)\dots$

und füge den Factor

$$a_x^{n-(\lambda+\varkappa)}$$

hinzu."

Dies bezeichnet Herr Gordan als eine Umformung durch die Moduln λ, $\varkappa$. Sie unterliegen natürlich der Ungleichung $\varkappa+\lambda \leqq n$. Für ein gegebenes Paar $(\lambda, \varkappa)$ giebt es dann eine ganze Reihe von Formen ψ, die aus φ auf obige Weise entstehen. Zieht man so alle möglichen Combinationen in Betracht, so erhält man aus allen Formen des Grades $m-1$ auch alle von dem nächst höheren Grade. Erst gruppirt man die neuen Formen, je nachdem $\lambda+\varkappa = 1$, resp. 2, etc., sodann in jeder einzelnen Gruppe wieder, je nachdem $\varkappa = 0, 1, 2$, etc. Die erstere Anordnung heisst die nach der „Grösse der Modularsysteme". Als wichtigster Hülfssatz dient dann der l. c. von Gordan aufgestellte Satz: „Sämmtliche durch obigen Process aus einem vollen System vom Grade $m-1$ aufgestellten Formen vom Grade m bilden wieder ein volles System." Dabei ist vorausgesetzt, dass man die verschwindenden und reducibeln Formen ausschliesst. Für die vorliegende Aufgabe resultiren 14 Modularsysteme. Das System vom

Grade 0 ist gegeben durch	u_x,	d. i.	1 Form
„ 1 „ „ „	$f = a_x^4$	„	1 „
„ 2 „ „ „	$(abu)^4 = u_a^4, a_x^2 b_x^2 (abu)^2$	„	2 Formen
„ 3 „ „ „	$(abc)^4, u_a^2 a_\alpha^2 a_x^2$ etc.	„	6 „
„ 4 „ „ „	$a_\alpha^2 b_\alpha^2 (ab\alpha)^2 = u_p^2$ etc.	„	11 „
„ 5 „ „ „	$u_p a_p a_x^3$ etc.	„	24 „
		in Summa	45 Formen.

Das Studium der höheren Systeme reducirt sich auf das von 13 der 24 Formen fünften Grades. Für den sechsten Grad resultiren drei Covarianten, zwei Contravarianten, eine Invariante $((\alpha\beta\gamma)^4)$, während die Zwischenformen (Connexe) nicht mehr untersucht sind. Sodann folgt eine grosse Anzahl von Relationen, durch welche in den obigen Systemen nicht enthaltene, besonders wichtige Formen durch die obigen ausgedrückt werden.

Der letzte Abschnitt ist den geometrischen Interpretationen gewidmet. Dabei gruppiren sich die zu betrachtenden Formen von selbst in vier Gruppen, nämlich,

1) die aus der binären Form vierten Grades und,

2) die aus der quadratischen ternären Form abgeleiteten,

3) die, welche aus der cubischen ternären Form entstehen, und

4) die, welche keiner dieser drei Gruppen angehören.

Wegen dieser Interpretationen muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Im Uebrigen mag nur beachtet werden, wie schätzbar diese Arbeit ist, seitdem die biquadratischen ternären Formen durch die neuen Gordan'schen Untersuchungen (in Clebsch Ann.) ein grosses Interesse gewonnen haben.

My.

G. Battaglini. Sulle cubiche ternarie sizigetiche.
Chelini, Coll. Math. 27-51.

Diese Arbeit enthält eine Darstellung und Weiterführung der syzygetischen Büschel von ebenen Curven dritter Ordnung in

der Weise, dass der binäre Gesichtspunkt noch mehr, als dies gewöhnlich geschieht, in den Vordergrund tritt.

Der Stoff wird in drei Abschnitte gruppirt. Im ersten wird zunächst das zu einer solchen gegebenen Curve f gehörige syzygetische Büschel in der Art gefunden, dass man eine weitere Curve f' sucht, deren Schnittpunkte mit jeder beliebigen Geraden der Ebene zu denen mit f conjugirt (harmonisch, apolar) sind. Diese Curven f' bilden das Büschel, dessen Identität mit dem bekannten leicht nachgewiesen wird.

Daran schliesst sich eine Recapitulation der bekannten Eigenschaften der vier Wendepunktdreiseite von f (und zugleich des Büschels f, f') im Anschluss an die canonische Form von f,

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\varkappa x_1 x_2 x_3 = \varphi + \varkappa\psi = 0.$$

Dann sind bekanntlich die vier Dreiseite einerseits das Coordinatendreiseit, andererseits die drei Curven des Büschels

$$\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon\psi = 0 \qquad (\varepsilon = \sqrt[3]{1}).$$

Diesen drei „Ternen“ werden neun ausgezeichnete Kegelschnitte (nebst den zu ihnen dualistischen) an die Seite gestellt. Für jede Ecke eines der drei Dreiseite bilden die neun Seiten derselben die neun Polaren in Bezug auf diese neun Kegelschnitte (und reciprok). Mithin vermittelt ein jeder derselben (resp. sein dualistischer) diese Reciprocität zwischen Ecken und Seiten der drei Wendedreiseite und damit auch die ursprüngliche Reciprocität zwischen den gemeinsamen Wendepunkten des Büschels und ihren harmonischen Polaren.

Des Weiteren sind je zwei der drei „Ternen“ in Bezug auf jeden der Kegelschnitte zu einander conjugirt, die dritte zu sich selbst.

Die Kegelschnitte selbst teilen sich ganz analog in drei „Ternen“. Die drei Individuen einer Terne sind je zu einander apolar (conjugirt, harmonisch) etc. Diese Eigenschaften gelten natürlich von je drei der vier Wendedreiseite, so dass 36 dieser ausgezeichneten Kegelschnitte auftreten. Nimmt man eines der

vier Dreiseite zum Fundamentaldreieck, so haben nur vier der 36 Kegelschnitte reelle Coefficienten.

Der zweite Abschnitt ist der Theorie einer Curve f und ihrer „associirten“ F gewidmet, d. h. derjenigen, deren Polarkegelschnittgewebe zu dem Polarkegelschnittnetz von f conjugirt ist. Der berühmte Satz, dass die Hesse'sche, resp. Cayley'sche Curve von f die Cayley'sche, resp. Hesse'sche von F ist, leitet sich hier einfach mit Hülfe des Satzes ab, dass ein zu einem Kegelschnitt conjugirtes (apolares) Linienpaar zugleich ein in Bezug auf ihn conjugirtes sein muss.

Dann werden zwei „associirte“ Systeme näher untersucht, d. h. zwei syzygetische Büschel, deren Individuen zu einander associirt sind. Zwei solche Systeme haben die vier Wendepunktsdreiseite (Ternen) gemeinsam. Bezieht man sie daher auf ein solches, so nehmen sie beide die canonische Form an:

$$\varphi + \varkappa\psi = 0, \qquad \varphi + K\psi = 0,$$

und je zwei associirte sind durch die Relation verbunden:

$$„\varkappa K = -\frac{1}{2}“.$$

Eine Wendetangente von f geht immer durch die bezügliche Spitze der associirten Curve F. Die Beziehung zwischen f und ihrer Hesse'schen Curve H und umgekehrt wird an das bekannte Wendeseitquadrupel (das von irgend einem Wendepunkte von f ausgeht) angeknüpft. Ist dieses durch $g_\lambda^4 = 0$ dargestellt, so sind f und H durch die Relation

$$g_{\mu^3\nu} = 0$$

verbunden, wo μ, ν den Strahlen des Wendepunktbüschels entsprechen, die Wendetangenten von f, resp. H sind.

Im dritten Abschnitt werden einige Erweiterungen Clebsch'scher Sätze mitgeteilt, die diejenige Curve f_l des Büschels (f, f') betreffen, welche Ort der Punkte ist, deren Polarkegelschnitte (in Bezug auf f und f') apolar sind. My.

Lösungen von weiteren Aufgaben über specielle Formen von J. J. Sylvester, H. Stabenow, W. J. C. Sharp finden sich Ed. Times XXXIV. 108-109, 110-111.

O.

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

L. Kronecker. Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen.
Berl. Monatsber. 1881. 535-600.

L. Kronecker. Auszug aus einem Briefe an E. Schering.
Gött. Nachr. 1881. 271-279.

Die erste dieser Arbeiten knüpft an die Abhandlungen des Verfassers vom Februar 1873 und Februar 1878 an. Es handelt sich um die Lösung der Aufgabe, zu zwei ganzen Functionen $f(x)$, $f_1(x)$ der Grade n, $n-n_1$ zwei Multiplicatoren $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ zu bestimmen, für welche der Grad ϱ von

$$(C) \qquad f_1(x)\,\Psi(x)-f(x)\,\Phi(x) = F(x)$$

kleiner als n wird. Eine erste allgemeine Methode der Lösung ergiebt sich aus der Kettenbruch-Entwickelung von $f_1:f$; die hierbei auftretenden Näherungswerte seien $\varphi_\lambda:\psi_\lambda$, wo

$$\varphi_{k+1}\psi_k-\psi_{k+1}\varphi_k = 1$$

ist, und

$$f_1\psi_k-f\varphi_k = f_{k+1}$$

heissen soll. Die allgemeinste an Stelle von Ψ der Gleichung (C) genügende Function ν^{ten} Grades ist eine beliebige durch ψ_k teilbare ganze Function $\Psi = \theta.\psi_k$, für welche der Grad des Quotienten kleiner als jeder der beiden Abstände von ν zu den beiden Grenzen $n_k - 1$ und n_{k+1} ist, zwischen denen sie liegt, wenn

n_k den Grad von ψ_k angiebt. Ferner wird

$$\Phi = \theta . \varphi_k, \; F = \theta . f_{k+1},$$

und θ ist also von einem Grade

$$< \frac{1}{2}(n_{k+1} - n_k).$$

Hierbei ergiebt sich der bisher noch nicht bemerkte Umstand, dass die Cauchy'sche Aufgabe, einen Bruch $F : \Psi$ aus den n Werten $u_1, u_2, \ldots u_n$ zu bestimmen, welche derselbe für die n Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ von $f(x) = 0$ annimmt, nicht unter allen Umständen lösbar ist.

Weiter kann die Lösung von (C) auch so versucht werden, dass die $\nu + 1$ Coefficienten von

$$\psi(x) = \Sigma \beta_p x^p$$

als Unbekannte zu bestimmen sind, während die Grössen

$$c_k = \sum_{h=1}^{n} \xi_h^k \frac{f_1(\xi_h)}{f'(\xi_h)}$$

als bekannt gelten. Definirt man die c_k durch

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = \sum_0^{\infty} c_k x^{-k-1},$$

so braucht man die Wurzeln von $f(x) = 0$ nicht als von einander verschieden anzusehen. Die Lösung giebt Ψ, Φ, F als Determinanten; dieselbe ist aber keine vollständige, insofern die Ausdrücke für Ψ, Φ, F zwar als hinreichend, aber noch nicht als notwendig dargetan sind. Eine neue Untersuchung führt die Frage auf die allgemeinste Lösung von

$$\text{(D)} \quad \Sigma \beta_p c_{p+q} = 0 \qquad (p = 0, 1, \ldots \nu; \; q = 0, 1 \ldots \nu - 1)$$

zurück, d. h. auf die Bildung der allgemeinsten für die 2ν Grössen $c_0, c_1, \ldots c_{2\nu-1}$ bestehenden „linearen Recursionsformel“, welche von Anfang an und mindestens ν-mal hintereinander Geltung hat, und deren „Ordnung“ daher höchstens gleich ν ist. Hierzu werden einige für die Theorie der linearen Gleichungen fundamentale Determinantensätze abgeleitet, und speciell wird die Theorie der Jacobi'schen Determinanten $| a_{p,q} |$, für welche

$$a_{p,q} = a_{p+q}$$

ist, einer eingehenden Behandlung unterworfen. Es stellt sich heraus, dass die allgemeinsten über die $c_0, c_1, \dots c_{2\nu-1}$ zu machenden Voraussetzungen folgende sind: Erstens ist

$$|c_{i+k}| \qquad (i, k = 0, 1, \dots \lambda-1)$$

von Null verschieden, und zweitens besteht für die ersten $\mu+\nu$ Glieder der Reihe c, aber auch nur für diese, eine lineare Recursionsformel λ^{ter} Ordnung. Es wird nun gezeigt, wie aus dieser „primitiven" Recursionsformel alle diejenigen „derivirten", welche ν-mal hintereinander gelten, durch lineare Verbindungen abgeleitet werden können. Das Bestehen einer primitiven linearen Recursionsformel λ^{ter} Ordnung ist characteristisch für die Coefficienten der Entwickelung eines Bruches, welcher in seiner reducirten Form einen Nenner λ^{ten} Grades hat, und es kann für eine ganz beliebige Reihe von 2ν Grössen c der einfachste Bruch bestimmt werden, dessen Entwickelung nach fallenden Potenzen von x die c als Coefficienten liefert. Fügt man zu der Determinante

$$|c_{\varkappa+\lambda}x - c_{\varkappa+\lambda+1}| \qquad (\varkappa, \lambda = 0, 1, \dots m-1)$$

als erste Zeile und als erste Colonne die Glieder

$$U, -c_0, -c_1, \dots -c_{m-1}$$

hinzu, wobei U eine unbestimmte Grösse sein soll, und setzt die neue Determinante gleich $-C^{(m)}(x)+UD^{(m)}(x)$, dann folgt aus den oben erwähnten Determinantenuntersuchungen

$$\text{(F)} \qquad C^{(m)}(x)D^{(m-1)}(x) - C^{(m-1)}(x)D^{(m)}(x) = |c_{i+k}|^2$$
$$(i, k = 0, 1, \dots m-1).$$

Ferner wird

$$\Psi = D^{(\lambda)}(x)E^{(\mu-\lambda)}(x), \quad \Phi = C^{(\lambda)}(x)E^{(\mu-\lambda)}(x),$$
$$F = f(x).E^{(\mu-\lambda)}(x).\sum_t |c_{p+q}|x^{-t-1},$$

wobei

$$p = 0, 1, \dots \lambda; \quad q = 0, 1, \dots \lambda-1, t; \quad t = \mu+\nu-\lambda+1, \dots$$

wird, während $E^{(\mu-\lambda)}(x)$ eine beliebige ganze Function vom Grade $\mu-\lambda$ bedeutet.

Die Vergleichung beider Lösungsmethoden führt zu bemerkenswerten Resultaten. So ergiebt sich, dass $n_1, n_2, n_3, \dots$ die Ordnungszahlen derjenigen Determinanten

$$|c_0|, \quad \begin{vmatrix} c_0, & c_1 \\ c_1, & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_0, & c_1, & c_2 \\ c_1, & c_2, & c_3 \\ c_2, & c_3, & c_4 \end{vmatrix}, \ldots$$

sind, welche von Null verschiedene Werte haben. Ferner wird erstens gezeigt, dass für die c primitive lineare Recursionsformeln nur von den Ordnungen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ existiren, und zweitens, dass aus jeder primitiven Recursionsformel der Ordnung n_k abgeleitete der Ordnungen n_k+1, $n_k+2, \ldots$ gebildet werden können, so lange diese Ordnungen kleiner als $\frac{1}{2}(n_k+n_{k+1})$ bleiben; jede dieser Recursionsformeln der Ordnungen n_k, n_k+1, $n_k+2, \ldots$ gilt bis zum $(n_k+n_{k+1}-1)^{\text{ten}}$ Gliede der Reihe $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Die Aufstellung aller linearen Recursionsformeln der beliebigen Grössen c kann man auch direct erledigen, ohne die Auffassung derselben als Entwickelungscoefficienten zu Hülfe zu nehmen.

Schliesslich folgen einige Betrachtungen über Functionen, welche bei ihrer Verwandelung in Kettenbrüche dieselben Teilnenner nur in verschiedener Reihenfolge liefern, und zwar speciell über diejenigen, welche reciproke Entwickelungen ergeben.

Der „Auszug" knüpft an die Arbeit des Herrn K. Heun (Vgl. Abschn. VII. Cap. 2) an und giebt eine Einleitung in die oben besprochene Abhandlung. No.

H. G. Zeuthen. Bestemmelse af störste folles Faktor til Polynomier ved Determinanter. Zeuthen T. (4) V. 45-55, 109-124.

Diese Arbeit knüpft unmittelbar an eine frühere Abhandlung von 1874 an (Zeuthen T. (3) IV. 165-171, s. F. d. M. VI. p. 82) und ist wesentlich durch ein „Mémoire sur l'élimination" von Lemonnier (s. F. d. M. XI. 1879. p. 100) veranlasst. In dieser ist die Bedingung dafür, dass zwei Gleichungen p Wurzeln gemeinsam haben, durch p Gleichungen und eine Ungleichheit ausgedrückt. Eine ähnliche Bedingung war in der erwähnten Arbeit des Verfassers durch ein System von Determinantengleichungen dargestellt. Die neue Abhandlung enthält nicht nur den Nachweis,

dass die Bedingungen in der von Lemonnier gegebenen Form sich aus den Determinantengleichungen herleiten lassen, sondern auch eine einfachere Darstellung des Factors der beiden Polynomen. Endlich wird zum Teil nach Lemonnier, aber mit Vervollständigung seiner Regeln und Beweise die Bildung einer Reihe von Polynomen gezeigt, welche bei der Anwendung von Sturm's Theorem benutzt werden können. Gm.

L. Saltel. Contribution à la théorie de la substitution des systèmes d'équations. Application de cette théorie à la recherche de l'équation et des points multiples d'un lieu défini par k équations contenant $k-1$ paramètres variables. Nouv. Ann. (2) XX. 546-565.

Behandlung von Eliminationsproblemen mit Rücksicht auf die bei den Substitutionen eingeführten fremden Lösungen.

No.

A. Grandi. Un teorema sulla rappresentazione analitica delle sostituzioni sopra un numero primo di elementi. Batt. G. XIX. 238-245.

Ist p eine Primzahl und sind a, b nicht congruent 0 mod. p, dann kann

$$\theta(r) \equiv r^{p-s} + ar^{\frac{p-s+1}{2}} + br \qquad (\text{mod. } p)$$

nur dann eine Substitution repräsentiren, wenn die Primzahl

$$p < 4(s-1)d+1$$

ist, wobei d den grössten gemeinsamen Teiler von $p-1$ und $\frac{1}{2}(p-s-1)$ bedeutet. Liegt p unter dieser Grenze, aber über $2(s-1)d+1$, dann muss

$$b \equiv \frac{b-1}{2}(s-1)a^2 \qquad (\text{mod. } p)$$

sein, damit $\theta(r)$ der Ausdruck einer Substitution sei. Für $s=2$ kommt man auf einen Satz von Brioschi (F. d. M. XI. 1879. 102).

No.

DE POLIGNAC. Sur la représentation analytique des substitutions. S. M. F. Bull. IX. 59-67.

Soll $|x\ \psi(x)|$ der analytische Ausdruck einer Substitution des Primzahlgrades p sein, und bedeutet

$$\psi(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{p-2} x^{p-2} \equiv a_0 + \varphi(x) \quad (\text{mod. } p)$$

das darstellende Polynomen, welches bekanntlich (mod. p) nur bis zum Grade $p-2$ aufsteigen darf, so kann man aus den Congruenzen

$$\varphi(1) \equiv r_1, \quad \varphi(2) \equiv r_2, \ldots \quad \varphi(p-1) \equiv r_{p-1} \qquad (\text{mod. } p),$$

in denen die $r_1, r_2, \ldots$ bis auf ihre Reihenfolge mit den Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ übereinstimmen, die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_{p-2}$ berechnen. Man erhält die Formen

$$a_\varkappa \equiv A_{k,1} r_1 + A_{k,2} r_2 + \cdots + A_{\varkappa, p-1} r_{p-1}$$
$$A_{\varkappa,\lambda} \equiv (-1)^\varkappa - \lambda^{p-1-\varkappa} \equiv (-1)^\varkappa - \frac{1}{\lambda^\varkappa} \qquad (\text{mod. } p).$$

Hieraus folgt z. B. wiederum nach mod. p

$$A_{2\varkappa,1} \equiv 0, \quad A_{2\varkappa+1,1} \equiv -2;$$
$$a_{p-2} \equiv -[2r_1 + 3r_2 + \cdots + (p-1) r_{p-2}];$$
$$A_{2\varkappa,\lambda} \equiv A_{2\varkappa,p-\lambda}, \quad A_{2\varkappa+1,\lambda} + A_{2\varkappa+1,p-\lambda} \equiv -2.$$

No.

J. GIERSTER. Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades. Diss. Leipzig. B. G. Teubner. Klein Ann. XVIII. 319-365.

Nach der Definition der Gruppe G und der Aufstellung ihrer drei verschiedenen Arten von Substitutionen wird die Gruppe in einer imaginären Gestalt gegeben, durch welche die Darstellung der Substitutionen sehr vereinfacht wird. Hiernach gelingt es, die mit einer gegebenen Substitution vertauschbaren Substitutionen der Gruppe G aufzustellen und die Anzahl der Substitutionen jeder der drei verschiedenen Arten zu bestimmen. Nach diesen Voruntersuchungen ergeben sich sofort die cyklischen, halbmetacyklischen und Doppelpyramiden-Gruppen, welche die Gruppe G

der Modulargleichungen als Untergruppen enthält; dieselben werden danach klassificirt, ob sie durch Substitutionen von G in einander transformirt werden können oder nicht. Es folgt dann die Behandlung der Tetraeder-, Octaeder- und Ikosaeder-Gruppen. Am Schlusse des ersten Abschnittes werden einige Sätze über das Enthaltensein der einen Untergruppe in einer anderen gegeben.

Im zweiten Abschnitte wird der Beweis für die Vollständigkeit der gelieferten Aufzählung von Untergruppen geführt. Das Princip des Beweises wurde zuerst von Herrn C. Jordan verwendet; es beruht in der Aufstellung gewisser diophantischer Beziehungen für die Ordnung etwa vorhandener Untergruppen.

No.

T. P. Kirkman. On the solution of the 15-puzzle. Ed Times XXXV. 29-30

Zusammenhang der Theorie dieses Spieles mit derjenigen der Substitutionen, speciell der alternirenden Gruppe. No.

A. Seidler. Ueber das Versetzspiel „Boz Puzzle.“ Cas. X. 84. (Böhmisch.).

Enthält eine mathematische kurze Discussion dieses grade modern gewordenen Spieles mit Bezugnahme auf die Publication Piarron's hierüber. Std.

Th. Muir. A list of writings on determinants. Quart. J. XVIII. 110-149.

Das Unternehmen des Herrn Muir würde verdienstlicher sein, als es ist, wenn die Liste der Schriften über Determinanten vollständig wäre. Eine einfache Vergleichung mit diesem Jahrbuche hätte die Lücken vermeiden lassen, welche sich in jener Zusammenstellung finden, soweit sie sich auf die Literatur von 1868 ab beziehen. Es sind deren nicht wenige. No.

R. Baltzer. Theorie und Anwendung der Determinanten. Fünfte verb. u. verm. Aufl. Leipzig. S. Hirzel.

Auch diese fünfte Auflage des Werkes liefert in einer Reihe von Zusätzen, welche den neuesten Veröffentlichungen der Herren Fürstenau, Gordan, Kronecker u. s. w. entnommen sind, die Resultate der Determinanten-Untersuchungen der letzten Jahre, so dass sie an Vollständigkeit und Uebersichtlichkeit durchaus auf der Höhe der früheren Auflagen des bekannten Buches steht.

No.

L. Gegenbauer. Ueber Determinanten höheren Ranges. Wien. Denkschr. XLIII. 15-32.

Eine Determinante m^{ten} Ranges und n^{ter} Ordnung wird aus n^m Grössen der Form

$$a_{i_1, i_2, \dots i_m}, \qquad (i_\lambda = 1, 2, \dots n)$$

gebildet. Als Definition wird eine Erweiterung der Kronecker-schen Summendarstellung gewählt. Hieraus ergeben sich viele Sätze über den Wert von Determinanten mit gleichen Elementenreihen; bei denselben tritt der principielle Unterschied zwischen Determinanten graden und ungraden Ranges auf. Die Erweiterung des Laplace'schen Zerlegungssatzes sowie der Multiplicationsregel wird geliefert. Bei letzterer sei erwähnt, dass das Product zweier Determinanten n^{ter} Ordnung, deren eine den Rang p, deren andere den Rang q besitzt, als Determinante derselben Ordnung vom Range $p+q-2$ darstellbar ist. Schliesslich werden einige Anwendungen auf Formen m^{ter} Ordnung von n Veränderlichen gegeben, welche sich hauptsächlich auf Invarianten-Eigenschaften der aus den Coefficienten gebildeten Determinanten beziehen.

No.

W. Zajaczkowski. Theorie der Determinanten von p Dimensionen. Warschau. (Polnisch).

Die Schrift enthält eine Darstellung der wichtigsten Sätze der genannten Theorie in möglichster Einfachheit und Allgemein-

heit. Herr Zajaczkowski berichtigt manche Fehler der früheren Bearbeiter dieser Theorie. Herr Scott z. B. behauptet, dass das Product zweier Determinanten vom Range p und q sich als eine Determinante vom Range $p+q-1$ oder $p+q-2$ darstellen lässt. Nun ist der erste Teil dieses Satzes immer richtig, der zweite aber nur dann, wenn eine der beiden Zahlen p und q eine grade Zahl ist. Weiter ist in dieser Arbeit der zwischen Determinanten graden und ungraden Ranges stattfindende Unterschied klar dargelegt; es zeigt sich, dass mehrere Eigenschaften der ersten Determinanten-Art für die zweite nicht giltig sind. Am Ende zeigt der Verfasser eine Anwendung auf die Theorie der algebraischen Formen und beweist einen allgemeinen Satz, den Herr Aronhold für den 3ten Grad früher bewiesen hat (Crelle J. LXII.).

Dn.

F. Mertens. Eine geometrische Anwendung der Multiplicationsregel der Determinanten. Prag. Ber. 1880. 207-210.

Es wird der Radius eines Kugelkreises berechnet, welcher drei gegebene Kugelkreise berührt.

No.

A. Cayley. A kind of Leibniz's theorem for determinants. Lond., M. S., Proc. XII. 212-213.

Bemerkung zu einer Note des Herrn Teixeira.

No.

H. Hovestadt. Beweis eines Weierstrass'schen Satzes. Schlömilch Z. XXVI. 392-393.

Der Satz bezieht sich auf die vielfachen Wurzeln der gleich Null gesetzten, aus der Form $s\varphi-\psi$ gebildeten Determinante, wobei φ und ψ quadratische Formen bedeuten, von denen die eine definit ist.

No.

Ed. Weyr. Verification der Multiplicationsformel für Determinanten. Prag. Ber. 1880. 55-56.

Die Verification beruht darauf, dass die einzelnen Colonnen des componirten Systems allmälig in diejenigen eines der Determinanten-Factoren umgewandelt werden. No.

C. le Paige. Sur la règle de multiplication des déterminants. S. M. F. Bull. IX. 67-69.

Die hier gegebenen Formeln beruhen auf dem gleichen Principe der Ableitung, wie diejenigen der obigen Arbeit des Herrn Weyr. No.

Th. Muir. On professor Cayley's theorem regarding a bordered skew symmetric determinant. Quart. J. XVIII. 46-50.

Die englische Terminologie bezeichnet Determinanten, für welche $a_{ik} = -a_{ki}$ ist, als „Pfaff'sche Determinanten". Herr Cayley hat gezeigt, dass, wenn man eine solche Determinante um eine beliebige Rand-Zeile und Colonne vergrössert, das Product zweier Pfaff'scher Determinanten entsteht (Crelle 55, S. 277). Herr Muir giebt hierfür einen neuen einfachen Beweis.

No.

Th. Muir. On new and recently discovered properties of certain symmetric determinants. Quart. J. XVIII. 166-177.

Es werden für Determinanten, bei denen $a_{ik} = \pm a_{ki}$, für solche, bei denen $a_{ik} = a_{i-1,\, k+1}$ ist, für Kettenbruch-Determinanten u. s. w. Sätze aufgestellt, die meistens darauf hinauskommen, dass durch Addition von Parallelreihen Factoren der Determinanten entdeckt werden. No.

Th. Muir. On skew determinants. Phil. Mag. 1881.

Von Brioschi ist in Crelle's J. 1855 bewiesen worden, dass sich eine Determinante von grader Ordnung als Pfaff'sche Determinante darstellen lässt. Hier wird gezeigt, dass diese Eigenschaft für alle Determinanten gilt, und zwar ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

gleich der Pfaff'schen Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(\alpha_2-\beta_1) & \frac{1}{2}(\alpha_3-\gamma_1) & \frac{1}{2}(\alpha_3+\gamma_1) & \frac{1}{2}(\alpha_2+\beta_1) & \alpha_1 \\ & \frac{1}{2}(\beta_3-\gamma_2) & \frac{1}{2}(\beta_3+\gamma_2) & \beta_2 & \frac{1}{2}(\beta_1+\alpha_2) \\ & & \gamma_3 & \frac{1}{2}(\gamma_2+\beta_3) & \frac{1}{2}(\gamma_1+\alpha_3) \\ & & & \frac{1}{2}(\beta_3-\gamma_2) & \frac{1}{2}(\alpha_3-\gamma_1) \\ & & & & \frac{1}{2}(\alpha_2-\beta_1) \end{vmatrix}.$$

Csy. (O.).

TH. MUIR. On the multiplication of the $(n-1)^{\text{th}}$ power of a symmetric determinant of the nth order by the second power of any determinant of the same order. Sylv., Am. J. IV. 273-275.

Der hier gegebene Satz liefert die Verallgemeinerung eines Hesse'schen Theorems. Für $n = 3$ erhalten wir: Bezeichnet man mit Δ eine beliebige Determinante $|a_{\lambda\mu}|$ dritter Ordnung, mit Δ_{uv} dieselbe Determinante umrändert durch u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3; 0, so wird

$$\begin{vmatrix} \Delta_{xx} & \Delta_{xy} & \Delta_{xz} \\ \Delta_{yx} & \Delta_{yy} & \Delta_{yz} \\ \Delta_{zx} & \Delta_{zy} & \Delta_{zz} \end{vmatrix} = -\Delta^2 . \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}^2 .$$

No.

TH. MUIR. Note on a special symmetrical determinant. Anal. VIII. 169-171.

Die erste der betrachteten Determinanten entsteht durch Subtraction von S_3 von jedem Element der Diagonale der Form, welche aus der Zusammensetzung von Reihen der Formen

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \end{vmatrix}$$

hervorgeht, wobei

$$S_3 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

Der Wert der Determinante ist, wie gezeigt wird,

$$S_3 (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2).$$

Allgemeiner wird gezeigt, dass, wenn man zwei Reihen von n Buchstaben hat, der Wert der ähnlich gebildeten Determinante

$$-(-1)^n S_n^{n-2} (a_1^2 + b_1^2 + \cdots)(a_2^2 + b_2^2 + \cdots)$$

ist. Wird speciell $a_1 = a_2 = a$ etc., so ist

$$\begin{vmatrix} 2a^2 - \Sigma a^2, & 2ab & , \dots \\ 2ab & , 2b^2 - \Sigma a^2, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = -(-1)^n \{\Sigma a^2\}^n.$$

Jn. (O.).

J. N. HAZZIDAKIS. Ueber eine Eigenschaft der Unterdeterminanten einer symmetrischen Determinante. Kronecker J. XCI. 238-248.

Ist Δ eine symmetrische Determinante, deren Elemente rationale ganze Functionen einer Veränderlichen ω sind, und bezeichnet man mit

$$\Delta_{11};\ \Delta_{11,22};\ \Delta_{11,22,33};\ \dots$$

die durch ihre Indices characterisirten Unterdeterminanten von Δ, so ist die Reihe Δ; Δ_{11}; $\Delta_{11,22}$; ... eine Sturm'sche Reihe für $\Delta = 0$ im Intervall $\omega = a$, $\omega = b$ unter den Bedingungen: 1) keine der Functionen der Reihe ist identisch gleich Null; 2) die Summe

$$\sum_{\mu,\nu} a'_{\mu\nu} \Delta_{1\mu} \Delta_{1\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \dots n)$$

verschwindet nirgends im Intervall $\omega = a$, $\omega = b$. Hierbei sind die a' die Ableitungen der a nach ω. Es wird eine Anwendung auf die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A_{11}-\omega, & A_{12}, & \dots & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}-\omega, & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \dots & A_{nn}-\omega \end{vmatrix}$$

gemacht. No.

C. LE PAIGE. Sur les déterminants hémisymétriques d'ordre pair. Prag. Ber. 1880. 125-127.

Die Unterdeterminanten $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grades einer hemisymmetrischen Determinante des Grades $2n$ sind durch die Quadratwurzel dieser Determinante teilbar. No.

TH. MUIR. On a property of persymmetric determinants. Mess. (2) XI. 65-77.

Es wird bewiesen, dass die persymmetrische Determinante, die aus $a_1, a_2, a_3 \dots a_{2n-1}$ gebildet wird, gleich ist der persymmetrischen Determinante, die man aus

a_1, $(a_1, a_2 \between m, 1)$, $(a_1, a_2, a_3 \between m, 1)^2, \dots (a_1, a_2, a_3 \dots a_{2n-1} \between m, 1)^{2n-2}$

bilden kann. Glr. (O.).

F. J. STUDNIČKA. Ueber eine neue Determinanteneigenschaft. Prag. Ber. 1880. 50-55.

Die Eigenschaft kommt auf die Berechnung einer Determinante heraus, bei der alle Elemente in der Hauptdiagonale den Wert -1, ausserhalb derselben den Wert $+1$ besitzen.

No.

TH. MUIR. On the resolution of a certain determinant into quadratic factors. Mess. (2) XI. 105-108.

Es wird bewiesen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1, & a_2+b_2, & a_3+b_3, & a_4+b_4, & a_5+b_5 \\ a_5+b_2, & a_1+b_3, & a_2+b_4, & a_3+b_5, & a_4+b_1 \\ a_4+b_3, & a_5+b_4, & a_1+b_5, & a_2+b_1, & a_3+b_2 \\ a_3+b_4, & a_4+b_5, & a_5+b_1, & a_1+b_2, & a_2+b_3 \\ a_2+b_5, & a_3+b_1, & a_4+b_2, & a_5+b_3, & a_1+b_4 \end{vmatrix}$$

teilbar ist durch

$$(a_1-\omega a_2+\omega^2 a_3 \cdots +\omega^{n-1} a_n)(a_1+\omega^{-1} a_2+\omega^{-2} a_3 \cdots +\omega^{-n+1} a_n)-$$
$$(b_1+\omega b_2+\omega^2 b_3 \cdots +\omega^{n-1} b_n)(b_1+\omega^{-1} b_2+\omega^{-2} b_3+\cdots \omega^{-n+1} b_n).$$

ω ist eine der imaginären 5ten Wurzeln der Einheit. Ein ähnlicher Satz hat allgemeinere Bedeutung. Glr. (O.).

K. Weihrauch. Ueber doppelt-orthosymmetrische Determinanten. Schlömilch Z. XXVI. 64-70.

Der Satz, dass

$$C \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 \cdots & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot \cdots & \cdot \\ a_1 & a_2 \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha_k^i\right) \qquad (\alpha_k^n = 1)$$

ist, wird in einfachster Weise mit Hülfe eines Satzes von Fürstenau bewiesen; die rechte Seite wird derart umgeformt, dass sie als Summe der Coefficienten in der Gleichung der n^{ten} Wurzelpotenzen von

$$a_0 y^{n-1} + a_1 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

erscheint, so dass umgekehrt C zur Herstellung jener Gleichung benutzt werden kann. Die Formel, welche durch jene Umwandlung erlangt war, wird direct bewiesen und verallgemeinert.

No.

K. Weihrauch. Ueber doppelt-orthosymmetrische Determinanten. Schlömilch Z. XXVI. 132-133.

Die Determinante C der eben besprochenen Arbeit wird für

$$a_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \quad (k+1)^2, \quad \cos(ak), \quad \sin(ak)$$

bestimmt. No.

A. PUCHTA. Ein neuer Satz aus der Theorie der Determinanten. Wien. Denkschr. XLIII. 277-282.

Der soeben besprochene Zerlegungssatz für doppelt-orthosymmetrische Determinanten wird in der Weise verallgemeinert, dass jedes Element einer solchen Determinante m^{ter} Ordnung durch ein neues doppelt-orthosymmetrisches System μ^{ter} Ordnung ersetzt wird. Die entstehende Determinante der Ordnung $m.\mu$ ist gleichfalls in ähnlicher Weise zerlegbar, und auf die neue Determinante lässt sich dasselbe Verfahren wiederum anwenden. No.

R. F. SCOTT. Mathematical notes. Mess. (2) X. 142-149.

I. Der Verfasser giebt einen Satz über eine Determinante n^{ter} Ordnung, der eine Verallgemeinerung des Satzes:

$$\begin{vmatrix} \sin(a+f) & \sin(b+f) & \sin(c+f), & \cos f, & \sin f \\ \sin(a+g) & \sin(b+g) & \sin(c+g), & \cos g, & \sin g \\ \sin(a+h) & \sin(b+h) & \sin(c+h), & \cos h, & \sin h \end{vmatrix}$$

$$= \sin(g-h)\,\sin(h-f)\,\sin(f-g)\,\sin(a+b+c+f+g+h)$$

ist. Es folgen Sätze über Determinanten von Covarianten und andere Determinantensätze. Glr. (O.).

W. KRETKOWSKI. Ueber die Transformationen gewisser Polynome zweiten Grades. Krak. Denkschr. 1881. (Polnisch.).

Das (bilineare) Polynomen

$$(1) \qquad u_{1,2} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{\mu,\nu}\, z_\mu\, y_\nu$$

und das Polynomen ($n-ary$ quadric- (Cayley))

$$(2) \qquad u_{1,1} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{\mu,\nu}\, z_\mu z_\nu.$$

$$a_{\nu,\mu} = a_{\mu,\nu}; \qquad \mu,\nu = 1, 2, \ldots n$$

können die folgende Form annehmen:

Das Polynomen (1):

$$u = -\frac{1}{A}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & D_{z_1} u \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & D_{z_n} u \\ D_{y_1} u & \dots & D_{y_n} u & 0 \end{vmatrix} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

oder:

$$u = -\frac{1}{A^{n-2}}\begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n}, & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n}, & z_n \\ y_1 & \dots & y_n, & 0 \end{vmatrix} \qquad (n = 2, 3, \dots).$$

Das Polynomen (2) aber:

$$u = -\frac{1}{4A}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n}, & D_{z_1} u \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n}, & D_{z_n} u \\ D_{z_1} u & \dots & D_{z_n} u, & 0 \end{vmatrix} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

oder:

$$u = -\frac{1}{A^{n-2}}\begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} & z_n \\ z_1 & \dots & z_n & 0 \end{vmatrix} \qquad (n = 2, 3 \dots),$$

wo

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$A_{\mu,\nu} = (-1)^{\mu+\nu}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,\nu-1}, & a_{1,\nu+1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu-1,1} & \dots & a_{\mu-1,\nu-1}, & a_{\mu-1,\nu+1} & \dots & a_{\mu-1,\nu} \\ a_{\mu+1,1} & \dots & a_{\mu+1,\nu-1}, & a_{\mu+1,\nu+1} & \dots & a_{\mu+1,\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,\nu-1}, & a_{n,\nu+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$(\mu, \nu = 1, 2, \dots n).$

Dn.

F. J. Studnička. Ueber independente Darstellung höherer Varianten und Retrovarianten einer Gleichung. Cas. X. 208. (Böhmisch.).

Unter Zugrundelegung des Cayley'schen Ausdrucks

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \widehat{)}(x, 1)^n = 0$$

erhält man für die Variante n^{ten} Grades V_n den independenten Ausdruck

$$V_n = \begin{vmatrix} a_1^2 - a_0\, a_2, & 1 & , 0 & , \ldots, & 0 \\ a_1^3 - a_0^2\, a_3, & 3a_1 & , 1 & , \ldots, & 0 \\ a_1^4 - a_0^3\, a_4, & 6a_1^2 & , 4a_1 & , \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n - a_0^{n-1} a_n, & (n)_2\, a_1^{n-2}, & (n)_3\, a_1^{n-3}, & \ldots, & n a_1 \end{vmatrix},$$

und daher analog für die Retrovariante V'_n

$$V'_n = \begin{vmatrix} a_{n-1}^2 - a_n\, a_{n-2}, & 1 & , \ldots, & 0 \\ a_{n-1}^3 - a_n^2\, a_{n-3}, & 3a_{n-1}, & , \ldots, & 0 \\ a_{n-1}^4 - a_n^3\, a_{n-4}, & 6a_{n-1}^2, & , \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1}^n - a_n^{n-1} a_0 & , (n)_2\, a_{n-1}^{n-2}, & \ldots, & n a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Bei dieser Gelegenheit wird ein „lapsus calami“ in Matthiessen's „Grundzüge der antiken und modernen Algebra der literalen Gleichungen“ S. 31 corrigirt. Std.

D. M. Merino. Sobre una propriedad de las determinantes de tercer grado. Cron. cient. IV. 133-137.

A. del Re. Relazione tra due determinanti. Batt. G. XIX. 116-117.

Es sei

$$P_n = |\, a_\lambda^\varkappa \,| \quad (\lambda = 1, 2, \ldots n;\ \varkappa = 0, 1, \ldots n-1),$$

und

$$D = \frac{\partial P_{n+1}}{\partial a_{n+1}^k};$$

dann ist

$$D = P_n\, \Sigma(a_1\, a_2 \ldots a_{n-k}).$$

No.

R. F. Scott. On some forms of compound determinants.
Mess. (2) XI. 96-98.

Der Verfasser betrachtet Determinanten, die aus Combinationen von drei verschiedenen Determinanten entstehen.

Glr. (O.)

R. F. Scott. On some alternating functions of n variables.
Mess. (2) XI. 98-103.

Die Arbeit bezieht sich auf Determinanten, welche die Wurzeln, die Coefficienten und die Summen der Wurzelpotenzen einer Gleichung enthalten. Die Sätze sind zum Teil bekannt.

Glr. (O.)

W. Kapteyn. Note sur une classe de fonctions symétriques. Hoppe Arch LXVII. 102-104.

Es wird

$$S = \sum_{\lambda=1}^{q} \frac{y_\lambda^m}{z_\lambda}$$

bestimmt, wo $y_1, y_2, \dots y_q$ die Wurzeln einer binomischen Gleichung und die z_λ die Ausdrücke

$$A_0 + A_1 y_\lambda + A_2 y_\lambda^2 + \cdots + A_{q-1} y_\lambda^{q-1}$$

bedeuten. No.

Dritter Abschnitt.

Zahlentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

P. G. LEJEUNE-DIRICHLET. Lezioni sulla teoria dei numeri, pubblicate e corredate da R. Dedekind, tradotte dalla terza edizione da A. Faifofer. Venezia. 8°.

T. F. LÖFGREN. Talets teori i enlighet med nyare åsigter. Linköping. Diss. Upsala. 8°.

M. L.

J. J. SYLVESTER. On Tchebycheff's theorem of the totality of the prime numbers comprised within given limits. Sylv., Am. J. IV. 230-247.

Reproduction der von Serret (Cours d'algèbre supérieure II. 230-233) gegebenen Darstellung der Untersuchungen von Tchebyscheff; im Anschluss daran ein Versuch engerer Grenzbestimmung für die gesuchte Anzahl. Riemann's bezügliche Arbeit (vergl. Ges. Werke 136-144) bleibt unberücksichtigt.

Sn.

J. Perrot. Sur l'infinité de la suite des nombres premiers. Darb. Bull. (2) V. 183-184.

Für die Anzahl der unter einer gegebenen Zahl liegenden Zahlen, welche durch keine Quadratzahl teilbar sind, wird eine untere Grenze gegeben und hieraus ein neuer Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlreihe erschlossen. Sn.

C. Tuxen. Bidrag til Lären om Primtallene. Zeuthen T. (4) V. 16-25.

Das hier gegebene Verfahren zur Construction einer Tafel der Primzahlen beruht darauf, dass, wenn man zuerst die Periode der Zahlen $O_1, O_2, \ldots$, welche mit $P = 2.3.5.\ldots p$ relativ prim sind, berechnet hat, man die in den ersten q Perioden derselben mit q teilbaren Zahlen auf folgende Weise findet:

Es sei $\frac{M}{N}$ der vorletzte Näherungswert des Kettenbruchs für $\frac{q}{P}$. Berechnet man demnächst $\varrho_q = (qN - PM)\,M$, so wird, wenn $\varrho_q . O_i \equiv \mu \pmod{q}$ ist, auch $O_i + \mu P \equiv 0 \pmod{q}$.

Gm.

F. Thaarup. Undersógelse af, om et givet Tal er et Primtal. Zeuthen T. (4) V. 77-85.

Um zu untersuchen, ob eine gegebene ungrade Zahl eine Primzahl ist oder nicht, sucht der Verfasser dieselbe auf die Form $n = x^2 - y^2$ zu bringen. Ist n eine Primzahl, so ist dieses nur auf eine Weise möglich, sonst giebt es mehrere Darstellungen, indem

$$n_1\, n_2 = \left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{n_1 - n_2}{2}\right)^2.$$

Ist also n eine teilbare Zahl, so liegt x zwischen $\frac{1}{2}(n+1)$ und $\sqrt{n}$. Diese Grenzen werden bedeutend verengert, indem man teils direct die Teilbarkeit mit den ersten Primzahlen untersucht, teils versucht, ob vielleicht kleine Werte von y die Gleichung befrie-

digen. Eine fernere Reduction der Grenzen kann man erhalten, wenn man n mit einer bekannten Zahl $f = a^2 - b^2$ multiplicirt, und dann

$$fn = (x^2 - y^2)(a^2 - b^2) = (ax - by)^2 - (bx - ay)^2 = X^2 - Y^2$$

untersucht, und namentlich die Probe macht mit kleinen Werten von Y. Eine genaue Betrachtung der Endziffer von n macht eine rein mechanische Ausscheidung so vieler Werte von x möglich, dass nur noch bei wenigen eine directe Probe nötig ist. Die Methode wird an der Primzahl 9738017 erläutert.

Gm.

Franz Walla. Einige Eigenschaften der Zahlen, welche zum Product der ersten n Primzahlen prim und kleiner als dasselbe sind. Hoppe Arch. LXVI. 353-358.

Die Zahlen seien

$$x_1, x_2, \dots x_{\varphi_n},$$

ihr Product P_n. Es ist die Hälfte der Glieder

$$x_1, x_2, \dots x_{\frac{1}{2}\varphi_n}$$

von der Form $4n+1$, die andere Hälfte von der Form $4n+3$. Die Reihe

$$\frac{1}{2}P_n - 2x_1, \quad \frac{1}{2}P_n - 2x_2, \cdots \quad \frac{1}{2}P_n - 2x_{\frac{1}{2}\varphi_n}$$

ist, abgesehen von den Vorzeichen, eine Permutation der vorigen Reihe u. s. f.

Sn.

B. Boncompagni. Presentazione di due brani di lettere. Rom., Acc. P. d. N. L. XXXIV. 63-64. 135.

Herr Delacuvellerie hat den Satz aufgestellt, $4p^2+1$ sei Summe dreier Quadrate, wenn p Primzahl und grösser als 3. Herr Catalan teilt denselben mit, unter Vorbehalt der genaueren Prüfung, und merkt an, wenn überhaupt, so gelte der Satz auch für den Fall, dass p keine Primzahl, und wenn $p = 2$ sei.

Herr Catalan giebt einige weitere Sätze: Ist $a-b$ ein Vielfaches von 3, so ist $a^{2m} + b^{2m}$ Summe dreier Quadrate. Ist $2xy$

eine Quadratzahl und $a-b$ ein Vielfaches von $x+y$, so ist a^2+b^2 Summe dreier Quadrate. Ein dritter Brief enthält die Notiz, dass jede Potenz von 3 Summe dreier Quadrate sei.

Sn.

Th. Harmuth. Ueber die Darstellbarkeit der Primzahlen durch die Form a^2+b^2. Hoppe Arch. LXVII. 215-219.

Es soll ohne Ausrechnung entschieden werden, ob eine vorgelegte Zahl von der Form a^2+b^2 Primzahl sei oder nicht.

Sn.

Th. Harmuth. Zum Beweise des Satzes, dass jede Primzahl $p=4n+1$ Summe zweier Quadrate ist. Hoppe Arch. LXVI. 327-328.

Es wird gezeigt, dass sich Vielfache von p finden lassen, welche Summen zweier Quadrate sind. Sn.

K. Küpper. Einfache Beweise einiger Lehrsätze über Primzahlen. Cas. X. 10. (Böhmisch.).

Enthält im ersten Abschnitt Untersuchungen über den irrationalen Ausdruck

$$\frac{\sqrt{A}+J}{D}>1$$

und den periodischen Kettenbruch für $\sqrt{A}$, im zweiten Abschnitt Untersuchungen über die Primzahl

$$p=m^2+kn^2,$$

wo m und n teilerfremd sind. Std.

S. Réalis. Exercices de calcul algébrique. Nouv. Ann. (2) XX. 501-506.

P sei die Summe zweier Quadrate. $9P^n$ wird auf directem Wege als Summe dreier Quadrate dargestellt, welche unter ein-

ander und zu P relativ prim sind. Weitere algebraische Uebungsaufgaben unter Einführung des Imaginären u. dgl. Sn.

C. Henry. Décomposition des nombres $f^{12}-9g^{12}$ et du double de ces nombres en deux cubes rationnels. Nouv. Ann. (2) XX. 417-420.

Diese Zerlegung gelingt mit Hülfe einer von Herrn Lucas früher gegebenen Identität. Sn.

F. Hočevar. Zur Lehre der Teilbarkeit der ganzen Zahlen. Pr. Innsbruck.

Man teile eine im System der Basis a gegebene Zahl in n-ziffrige Zahlen und bilde die Summen der sodann an den graden und ungraden Stellen befindlichen. Ist die Differenz der beiden Summen durch einen Divisor von a^n+1 teilbar, so ist es auch die ursprüngliche Zahl. Sn.

Weill. Théorème d'arithmétique. S. M. F. Bull. IX. 172.

Ist

$$N=\alpha+\beta+\cdots+pq+p_1q_1+\cdots+rst,$$

so ist $N!$ teilbar durch das Product

$$\alpha!\,\beta!\ldots(p!)^q q!\,(p_1!)^{q_1}q_1!\ldots(r)^{st}(s!)^t t!$$

Sn.

Weill. Théorème d'arithmétique. C. R. XCII. 1066-1067.

Dasselbe Theorem bewiesen mit Hülfe der Combinationsrechnung. Sn.

J. J. Sylvester. Sur les diviseurs des fonctions des périodes des racines primitives de l'unité. C. R. XCII. 1084-1086.

Herr Sylvester vermisst in Herrn Bachmann's Lehre von der Kreisteilung einen Satz, welcher sich in äusserst geringer Umformung als ein wesentlicher Teil der Theorie der idealen Zahlen auf Seite 264-265 dieses Buches findet. Angesichts seiner vereinzelten Anmerkungen zur Theorie der Potenzreste bleibt der Zweifel, ob er je Herrn Kummer's Originalabhandlungen gelesen.

Sn.

J. J. Sylvester. Instantaneous proof of a theorem of Lagrange on the divisors of the form $Ax^2+By^2+Cz^2$, with a postscript on the divisors of the functions which multisect the primitive roots of unity. Sylv., Am. J. III. 390-392.

Vereinfachung des Beweises für den Fermat'schen Lehrsatz von der Darstellbarkeit jeder Zahl als Summe von vier Quadraten (vergl. Legendre, Théorie des nombres. Ed. 1830. I. 211-213. Serret, Cours d'algèbre supérieure II. 94-99). Die Nachschrift wiederholt die bereits im vorstehenden Referat erwähnten Notizen zur Theorie der Potenzreste.

Sn.

O. H. Mitchell. On binomial congruences; comprising an extension of Fermat's and Wilson's theorems, and a theorem of which both are special cases. Sylv., Am. J. III. 294-316.

O. H. Mitchell. Some theorems in numbers. Sylv., Am. J. IV. 25-39.

Studien über die Anzahl der Zahlen, welche kleiner als eine gegebene Zahl k sind und nur aus gewissen von den in k enthaltenen Primzahlen bestehen. Erweiterung aller Sätze, welche sonst nur für $\varphi(k)$ geläufig sind.

Sn.

De Rocquigny. Sur une forme du symbole $\varphi(N)$. Mondes (2) LIV. 160-162.

J. Perrot. Sur la sommation des nombres φ. Darb. Bull. (2) V. 37-40.

Das Verhältnis $\frac{\Sigma\varphi(N)}{\Sigma N}$ nähert sich mit wachsendem N einer festen Grenze. Es ist $\sum_{h=0}^{h=N}\varphi(h)$ annähernd gleich $\frac{3N^2}{\pi^2}$.

Sn.

J. Thomae. Das Reciprocitätsgesetz. Schlömilch Z. XXVI. 134-135.

Eine von A. Voigt in Stuttgart (gestorben 1877) gefundene Abkürzung des dritten Gauss'schen Beweises wird mitgeteilt.

Sn.

D. Marchand. Problème des restes. Mondes (2) LIV. 437-441.

L. Gegenbauer. Ueber das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol. Wien. Ber. LXXXIV. 1089-1101.

Der Herr Verfasser macht im Anschluss an eine frühere Arbeit (Wien. Ber. 1880, vergl. F. d. M. XII. 1880. 125) darauf aufmerksam, dass Herr Kronecker zuerst das Legendre'sche Zeichen mit Hülfe von Kettenbruchentwickelungen bestimmt habe, und giebt zur Bestimmung dieses Symbols aus den Vorzeichen gewisser Zahlenreihen wiederum einige neue Regeln, in Bezug auf welche die früher mitgeteilten specielle Fälle sind.

Sn.

A. Cayley. The binomial equation $x^p-1=0$; quinquisection. Lond. M. S., Proc. XII. 15-16.

Den früheren Untersuchungen über die Kreisteilungsgleichungen für die Fälle, wo die Anzahl der Perioden gleich drei oder vier war (vergl. Proc. L. M. S. XI. 4-17, F. d. M. XII. 1880. 128) analog, wird hier die Fünfteilung discutirt. Sn.

A. E. PELLET. Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier. C. R XCIII. 1065-1066.

1. Es sei P das Product der Wurzeln einer nach dem Primzahlmodul p irreductiblen Congruenz ν^{ten} Grades $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$, n der Exponent, zu welchem P mod. p gehört; dann gehört $F(x)$ mod. p zum Exponenten Nn, wo N eine ganze Zahl bezeichnet, und die Zahlen n und $\frac{p^\nu - 1}{(p-1)N}$ relativ prim sind.

2. Ist q ein Primfactor von n, aber kein Teiler von $\frac{p-1}{n}$, so ist $F(x^q)$ mod. p irreductibel; ist $\frac{p-1}{n}$ durch q teilbar, so zerfällt $F(x^q)$ in q Primfactoren ν^{ten} Grades, welche mod. p irreductibel sind. Daraus folgt, dass $F(x^\lambda)$ mod. p irreductibel sein muss, wenn bei gradem ν nur solche Primfactoren des n in λ enthalten sind, welche $\frac{p-1}{n}$ nicht teilen; bei ungradem ν darf λ, wenn p von der Form $4m-1$ ist, den Factor 2 nur einmal enthalten.

3. Es sei $F_1(x) \equiv 0 \pmod{p}$ eine irreductible Congruenz ν_1^{ten} Grades, ν_1 prim zu ν; i und i_1 seien resp. Wurzeln der Congruenzen $F(x) \equiv 0$ und $F_1(x) \equiv 0 \pmod{p}$; $I = i.i_1$. Dann ist I Wurzel einer irreductiblen Congruenz $\nu\nu_1^{\text{ten}}$ Grades $G(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Bezeichnet q_1 einen Primfactor von N, welcher $p-1$ nicht teilt, so ist $G(x^{q_1})$ mod. p irreductibel, falls q_1 kein Teiler von $\frac{p^\nu - 1}{N}$ ist; im Gegenfalle ist $G(x^{q_1})$ in q_1 irreductible Factoren $\nu\nu_1^{\text{ten}}$ Grades zerlegbar. Daraus folgt, dass $G(x^\lambda)$ mod. p irreductibel ist, sobald λ nur solche Primfactoren des N enthält, welche die Zahlen $p-1$ und $\frac{p^\nu - 1}{N}$ nicht teilen; die Primfactoren des λ dürfen zu beliebigen Potenzen erhoben sein.

Sn.

A. E. PELLET. Méthode nouvelle pour diviser le cercle en parties égales. C. R. XCIII. 838-840.

θ sei primitive Wurzel der Gleichung $x^p - 1 = 0$, g primitive Congruenzwurzel der Primzahl p, q Teiler von $p-1$, $p-1 = q.\omega$ und

$$s_i = \sum_{i_1=0}^{i_1=\omega-1} \theta^{g^{i+i_1 q}}.$$

Dann erhält man für s_i^k

$$\Sigma\, \theta^{g^i (g^{i_1 q} + g^{i_2 q} + \dots + g^{i_k q})},$$

wo die Summe über alle ω^k Combinationen zu erstrecken ist, welche man erhält, wenn man den Grössen $i_1 \dots i_k$ die Werte $0, 1 \dots p-1$ beilegt. Es seien nun ωN_k die Anzahl der Summen $g^{i_1 q} + g^{i_2 q} + \dots + g^{i_k q}$, welche durch p teilbar sind, und $\omega N_{j,k}$ die Anzahl derjenigen, welche der Congruenz

$$x^\omega - g^{j\omega} \equiv 0 \pmod{p}$$

genügen. Dann gilt die Relation

$$N_k + N_{k,0} + \dots + N_{k,q-1} = \omega^{k-1},$$

und wenn

$$S_i = \omega N_k + N_{k,0}\, s_i + \dots + N_{k,q-1}\, s_{i+q-1}$$

gesetzt wird, so folgt

$$\sum_{i=0}^{i=q-1} s_i^k = p N_k - \omega^{k-1} = S_k.$$

Ist q Primzahl, so lassen sich die $N_{k,j}$ mit Hülfe von $\frac{(q-1)^2}{4} + 1$ positiven ganzen Zahlen ausdrücken, welche für $q = 2, 3$ unter den $N_{2,j}$ zu wählen sind. Für höhere Werte des q lassen sich die S_k nach der Lehre von den symmetrischen Functionen als ganze Functionen der $S_1, S_2 \dots S_q$ darstellen. So erhält man, wenn $k > q$, eine Gleichung zwischen den $\frac{(q-1)^2}{4} + 1$ Hülfsgrössen, mithin zur Bestimmung dieser letzteren eine hinlängliche Anzahl von Gleichungen, und schliesslich die Coefficienten der Gleichungen q^{ten} Grades, deren Wurzeln die s_i sind.

Es folgen fernere Andeutungen über die Fälle, wenn q andere Werte hat, und ein Hinweis auf gewisse Versuche zum Beweis des Fermat'schen Lehrsatzes, deren Unzulänglichkeit P. Pepin vor

Kurzem wieder hervorgehoben hat. (C. R. XCI. 366-368. F. d. M. XII. 1880. 134.) Sn.

G. Dostor. Relations entre certaines sommes de carrés. Hoppe Arch. LXVII. 265-269.

Sehr einfache Formeln. Sn.

De Rocquigny. Sommes des puissances des nombres premiers et non supérieurs à N. Mondes (2) LVI 340-341.

A. Minine. Nouveaux théorèmes de la théorie des nombres. Moscou. Imprimerie de E. Liessner e J. Romahn.

Anzahl und Summe aller Zahlen, welche kleiner als P und relativ prim zu N sind. Sn.

H. Ahlborn. Ueber Berechnung von Summen von grössten Ganzen auf geometrischem Wege nach der von Eisenstein zuerst angewandten Methode. Pr. Hamburg.

Eisenstein's Methode findet sich Crelle's J. XXVIII. 246. Die bewiesenen Formeln sind zuerst von Herrn Stern (Crelle's J. LIX. 146ff.) und Herrn Zeller (Gött. Nachr. 1879. 243-268, vergl. F. d. M. XI. 1879. 143-144) gegeben worden. Ferner wird an einigen Beispielen gezeigt, wie auf demselben Wege die Anzahl der innerhalb einer gegebenen, geschlossenen Figur liegenden Gitterpunkte sich ermitteln lässt. Sn.

C. Henry. Sur un procédé particulier de division rapide. Nouv. Ann. (2) XX. 213-215.

Verwandelt man einen Bruch von der Form $\frac{1}{10a-1}$ in einen Decimalbruch, so ist jede Decimalstelle der a^{te} Teil der vorhergehenden. Es wird auf eine Arbeit von Cauchy (C. R. XI. 853,

1841) hingewiesen, welche obigen Satz in einem interessanten Zusammenhang zu allgemeineren enthält. Sn.

W. A. Whitworth, Genese. Solutions of a question (6357). Ed. Times XXXIV. 51.

Die Zahl 34 lässt sich auf 169 Arten als Summe von verschiedenen Zahlen darstellen. Die allgemeine Frage wird nicht gelöst. O.

J. J. Sylvester. On a point in the theory of vulgar fractions. Sylv., Am. J. III. 332-336, 388-390.

Ueber die Auflösung echter Brüche in Reihen von der Form

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\cdots$$

(Sorites). Besondere Behandlung des Falles

$$u_{x+1}=u_x^2-u_x+1.$$

Sn.

G. B. Airy. On a systematic interruption in the order of numerical values of vulgar fractions when arranged in a series of consecutive magnitudes. Phil. Mag. 1881.

Csy.

Weitere Beweise von Lehrsätzen und Lösungen von Aufgaben aus der Zahlentheorie von S. Réalis, A. Geneix-Martin, Moret-Blanc, G. Heppel, S. Tebay, C. Leudesdorf, W. H. Walenn, C. Harkema, G. Eastwood finden sich Nouv. Ann. (2) XX. 177-178, 280-281, 330-332, 335-336, 375-376; Ed. Times XXXIV. 95-96, 97-98, 106-107.

O.

S. ROBERTS, J. J. SYLVESTER. Solution of a question (6243). Ed. Times XXXIV. 21-22.

Es wird bewiesen, dass, wenn $2f^2+g^2$ eine Primzahl und f eine ungrade Zahl ist, sich

$$fy^2+2gxy-2fx^2 = \pm 1$$

in ganzen Zahlen auflösen lässt. O.

C. M. PIUMA. Intorno all' equazione $x^2+y^2 = z^2$. Batt. G. XIX. 311-316.

Bemerkungen über die Primfactoren der Lösungen.

Sn.

TH. PEPIN. Mémoire sur l'équation indéterminée

$$x^3+y^3 = Az^3.$$

Rom., Acc. P. d. N. L. XXXIV. 73-131.

Die Zahl der Fälle, in denen die Unlösbarkeit der obigen diophantischen Gleichung nachgewiesen werden kann, findet sich hier wiederum stattlich vermehrt. Im Verlauf der Untersuchungen werden die Sätze gewonnen: Das Doppelte einer Triagonalzahl ist Summe zweier Cuben. Jedes Product zweier Zahlen, deren Summe oder Differenz ein Cubus ist, zerfällt in die Summe zweier Cuben. Sn.

MORET-BLANC. Questions d'analyse indéterminée proposées par M. Ed. Lucas. (Nouv. Ann. (2) XIV. 509) Nouv. Ann. (2) XX. 150-160.

Herleitung neuer Lösungen der beiden diophantischen Gleichungen

$$\frac{x^5+y^5}{x+y} = z^2,$$

$$x^4-5x^2y^2+5y^4 = z^2$$

aus bereits bekannten. Ferner: Alle ganzzahligen rechtwinkligen Dreiecke zu finden, für welche das einfache oder verdoppelte

Quadrat der Hypotenuse vermehrt oder vermindert um das einfache oder doppelte der Dreiecksfläche einer Quadratzahl gleich sei.

Sn.

DESBOVES. Correspondance. Nouv. Ann. (2) XX. 173-175.

Bemerkungen über die Lösungen der diophantischen Gleichung

$$ax^3 + by^3 + dxyz = cz^3.$$

Sn.

MORET-BLANC. Questions d'analyse indéterminée proposées par M. Edouard Lucas. Nouv. Ann. (2) XX. 201-213.

1. Ist (x, y, z) eine ganzzahlige Lösung der diophantischen Gleichung

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 + 3Dxyz = 0,$$

so erhält man eine neue Lösung mittels der Gleichungen

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0,$$

$$AXx^2 + BYy^2 + CZz^2 = 0.$$

2. Bezeichnen (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) verschiedene Lösungen obiger Gleichung, so erhält man eine Lösung mit Hülfe der Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$AXxx_1 + BYyy_1 + CZzz_1 = 0.$$

3. Die biquadratische Gleichung $x^4 - 5y^4 = 1$ hat ausser der Lösung $x = 3$, $y = 2$ keine weitere in ganzen Zahlen. 4. Der Unterschied zweier auf einander folgender Cuben ist nie eine Biquadratzahl. 5. Alle ganzzahligen Lösungen der arithmetischen Progressionen

$$x^2,\ 2y^2,\ 3z^2,\ 4u^2 \text{ und } x^2,\ 3y^2,\ 5z^2,\ 7u^2$$

zu finden. 6. Alle Werte von x zu finden, so dass die Summe der fünften Potenzen der x ersten Zahlen eine Quadratzahl ist.

Sn.

Lösungen weiterer Aufgaben über unbestimmte Gleichungen von F. Pisani, M. Rocchetti, Moret-Blanc, A. Droz, L. W. Jones finden sich Nouv. Ann. (2) XX 373-374, 425-427, 431-432; Ed. Times XXXIV. 114.

O.

Th. Harmuth. Ueber magische Quadrate und ähnliche Zahlenfiguren. Hoppe Arch. LXVI. 286-314.

Den Ausdruck „magisches Quadrat" fasst der Verfasser in einem engeren Sinne, als dies gewöhnlich geschieht. Denkt man sich nämlich n^2 Zahlen in der Form einer Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n,1} \dots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

geschrieben, so heisst dieses Quadrat sonst immer dann ein magisches, wenn folgende Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{i,p} = \sum_{k=1}^{k=n} a_{p,k} = \sum_{l=1}^{l=n} a_{l,l} = \sum_{m=1}^{m=n} a_{m,n+1-m}\,.$$

Hier fallen die letzten beiden Bedingungen fort, wodurch sich natürlich das Problem etwas vereinfacht. Der Verfasser giebt mehrere Methoden für die Lösung dieser zahlentheoretischen Aufgabe, von denen einige anscheinend neu sind; leider ist jedoch die ungemein reichhaltige Literatur (vgl. des Referenten „Hist. Studien über magische Quadrate") gar nicht berücksichtigt worden. Ausserdem werden auch magische Rechtecke und magische Cuben in Betracht gezogen.

Gr.

A. Schiappa Monteiro. Solução da questão proposta No. 17. Teixeira J. III. 81-86. (Portugiesisch.).

Es wird die Anzahl der Permutationen bestimmt, die man in einem magischen Quadrat von n^2 Zahlen vornehmen kann, ohne dass die Eigenschaft des magischen Quadrates aufhört.

Tx. (O.).

Th. Harmuth. Ueber magische Rechtecke mit ungraden Seitenzahlen. Hoppe Arch. LXVI. 413-447.

Diese Ausdehnung des altberühmten Problems der magischen Quadrate auf Rechtecke ist neu und verdienstlich. Sind die Masszahlen der Rechtecksseiten nicht teilerfremd, so lässt sich stets eine Lösung erbringen, sobald man dasjenige magische Quadrat kennt, dessen Seitenmasszahl den gemeinschaftlichen Factor für jene früheren „Argumente" abgiebt. Sind jene Argumente aber relative Primzahlen, so muss, wie hier gezeigt wird, die Methode dem speciellen Falle angepasst werden. Gr.

Th. Harmuth. Ueber magische Parallelepipeda. Hoppe Arch. LXVII. 238-253.

Ebenso, wie den magischen Quadraten die magischen Rechtecke, stehen den magischen Würfeln die magischen Parallelepipeda gegenüber. Es ist von Interesse, zu untersuchen, unter welchen Umständen die Lösung für ein zwei-dimensionales Gebilde unmittelbar einer Ausdehnung auf den Raum fähig ist. Die verschiedenen Fälle werden hier eingehend discutirt, und so ergiebt sich der interessante Satz, dass, wenn Obiges eintreten soll, wenigstens eine der drei Seitenmasszahlen des Parallelepipedons von der Form $4m$ sein muss. Gr.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

H. Poincaré. Sur la représentation des nombres par les formes. C. R. XCII. 777-779.

Dem vorliegenden Auszuge aus einer grösseren Abhandlung entnehmen wir folgendes: Unter $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ werden die Wurzeln von

$$x^m - A_{m-1}x^{m-1} + \cdots = 0$$

verstanden. Es wird die Form

$$F(x_1, x_2, \dots x_m) = \Pi(x_1 + \alpha_i x_2 + \alpha_i^2 x_3 + \cdots + \alpha_i^{m-1} x_m)$$

betrachtet; für eine gegebene Zahl N sollen ganze Zahlen $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ gesucht werden, welche

$$F(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_m) = N$$

liefern. Die Aufgabe kommt darauf hinaus, alle complexen idealen Zahlen der Norm N zu bestimmen. Bei der Behandlung derselben wird die Bildung der idealen Zahlen und ihrer Potenzen, die Multiplication derselben u. s. w. besprochen. No.

TH. PEPIN. Sur les diviseurs de certaines fonctions homogènes du troisième ordre à deux variables. C. R. XCII. 173-175.

Die Haupteigenschaft der quadratischen binären Formen, dass ihre Teiler arithmetische Progressionen bilden, welche nach Sylvester auch seinen „cyklotomischen Functionen" zukommt, ist nach Herrn Pepin auch einer ganzen Reihe von cubischen binären Formen gemein. Diese sind sämmtlich lineare ganze (ganzzahlige) Combinationen der beiden Formen:

$$x(x^2-9y^2), \quad y(x^2-y^2).$$

Elf verschiedene Klassen werden nach der Art ihrer Divisoren unterschieden und im Einzelnen aufgezählt. My.

L. CHARVE. De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives. C. R. XCII. 782-783.

Es wird eine Definition reducirter Formen geliefert, bei welcher allen äquivalenten Formen eine und auch nur eine Reducirte zugeordnet erscheint. No.

A. CAYLEY. Solution of a Senate-Houseproblem. Mess. (2) XI. 23-25.

Ist

$$a+b+c = 0 \text{ und } x+y+z = 0,$$

so ist auch

$$4(ax+by+cz)^3-3(ax+by+cz)(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$-2(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y)-54\,abcxyz=0.$$

Glr. (O.).

Capitel 3.

Kettenbrüche.

G. Humbert. Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques. (Suite). S. M. F. Bull. IX. 24-30.

Vergl. d. Jahrbuch Bd. XII. 1880. p. 334. Die Polynome

$$P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$$

genügen einer linearen Differentialgleichung von der Ordnung $n+1$, worin der Coefficient einer beliebigen Ableitung $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$ eine ganze Function von x vom Grade μ ist. St.

H. J. S. Smith. De fractionibus quibusdam continuis. Chelini, Coll. Math. 117-144.

Für

$$P_1=(q_1\,q_2\ldots q_i q_i\ldots q_2\,q_1),\quad P_2=(q_2\,q_3\ldots q_i q_i\ldots q_3\,q_2),$$
$$R=(q_1\,q_2\ldots q_i q_i\ldots q_3\,q_2),$$

wo die in den Klammern stehenden Ausdrücke Euler'sche Kettenbruch-Algorithmen (Diagonalglieder von Kettenbruchdeterminanten) bedeuten, besteht die Relation

$$P_1\,P_2-R^2=1,$$

welche hier zum Ausgangspunkte für weiter gehende Untersuchungen dient. Insbesondere wird mit Hülfe eines von Herrn Sylvester aufgestellten Satzes die Form jener periodischen Kettenbrüche bestimmt, für welche analog die Gleichungen

$$P_1\,P_2-2R^2=1,\quad P_1\,P_2-3R^2=1\ldots$$

gültig sind. Die Ergebnisse werden verwendet zur Eruirung gewisser zahlentheoretischer Wahrheiten, bezüglich auf die Darstellung gewisser ganzer Zahlen in der Form $(\alpha^2 + m\beta^2)$. Es wird dabei angeknüpft an die bekannte Inauguraldissertation von Goepel (Crelle's J. 45. Bd.). Von Einzelresultaten mögen, um eine Probe von dem Charakter der ganzen Untersuchung zu geben, die nachstehenden angeführt sein: Wenn $a.b = 3x^2 + 1$, so ist auch $a = m^2 + 3n^2$ und $b = p^2 + 3q^2$; jede Zahl lässt sich darstellen in einer der beiden Formen

$$x^2 + y^2 + 3(u^2 + v^2),\quad x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 6v^2.$$

Zu gewissen Theoremen Jacobi's und Dirichlet's werden vielfache interessante Beziehungen gewonnen. Gr.

Lösungen weiterer Aufgaben über Kettenbrüche von Wolstenholme, Pratt, R. Tucker, J. O'Regan finden sich Ed. Times XXXIV. 65-66, 69-70.

O.

Vierter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

A. G. Melon. Sur les combinaisons complètes; nombre des combinaisons complètes de *m* lettre *n* à *n*.
C. R. XCII. 125-127.

Der Verfasser leitet etwas umständlich den elementaren Satz ab, dass es

$$(m+n-1)_n = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!}$$

Combinationen von m Buchstaben zu je n mit Wiederholung (combinaison complète) giebt, indem er nachweist, dass m Gruppen auftreten, die nur einen Buchstaben enthalten, $m\frac{(m-1)}{1.2}(n-1)$ Gruppen die zwei Buchstaben enthalten, u. s. w., und indem er dann die so entstehenden n Zahlen addirt. Diese Addition vollführt er durch Multiplikation zweier binomischer Entwickelungen.

Ls.

G. B. Marsano. Sul numero delle combinazioni di data classe, fatte con una certa moltitudine degli intieri successivi ed aventi ciascuna una somma non maggiore di un limite assegnato. Batt. G. XIX. 156-171.

Unter Bezugnahme auf eine von demselben Verfasser im Jahre 1870 veröffentlichte Abhandlung: „Sulle legge delle derivate

generali delle funzioni di funzioni di più variabili indipendenti e sulla teoria delle forme di partizione dei numeri interi", und auf die derselben angefügten Tabellen wird zunächst ein Zahlenbeispiel gelöst, sodann aber die Aufgabe dahin verallgemeinert, dass sowohl die Grenzen der Summe, wie die Klassenzahl der Combination unbestimmt bleiben und nur durch Buchstaben angedeutet werden. Es werden endlich die Formeln für den Fall, dass die Elemente zur dritten Klasse combinirt werden sollen, welche Aufgabe bereits in anderer Weise von C. M. Piuma gelöst worden ist, vollständig entwickelt. Ls.

Th. Muir. Additional note on a problem of arrangement. Edinb. Proc. X. 187-190.

Die Arbeit ist die Fortsetzung einer früheren Arbeit in Proc. of Edinb. 1876, 1877, die sich auf ein Problem in Tait's „Memoir of Knots etc." bezog. Das Problem heisst: „Zu finden die Anzahl der möglichen Anordnungen von n Elementen, die den Bedingungen unterworfen sind, dass das erste nicht an der ersten und letzten Stelle, das zweite nicht an der zweiten und ersten Stelle, das dritte nicht an der dritten oder zweiten Stelle ist u. s. f.". Die Lösung des Problems wird reducirt auf die Lösung einer Differenzengleichung

$$U_n = \varphi(U_{n-1}, U_{n-2}, \dots U_0).$$

Der Verfasser löst hier die Differenzengleichung, indem er die erzeugende Function u in Form eines unbestimmten Integrals aufstellt:

$$u = \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{-\left(x + \frac{1}{x}\right)} \int e^{x + \frac{1}{x}} \frac{x^2\, dx}{(x+1)^2}.$$

Er fügt hinzu, dass das Resultat dasselbe ist, welches Cayley in den Proc. of Edinb. 1876-1877 veröffentlicht hat. Cly. (O.).

C. Henry. Sur le calcul des dérangements. Nouv. Ann. (2) XX. 5 9.

Es handelt sich um die Aufgabe, welche von Jos. Bertrand

gestellt worden ist: Wie gross ist die Anzahl der Dérangements bei der Darstellung aller Permutationen von n Elementen?

Diese Anzahl wird mit D_n bezeichnet. Offenbar ist

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 1;$$

es wird dann gezeigt, dass

$$D_3 = 3\,D_2 + (1+2)\,P_2,$$
$$D_4 = 4\,D_3 + (1+2+3)\,P_3;$$

und allgemein

$$D_{n+1} = (n+1)\,D_n + \frac{n(n+1)}{2}\,P_n;$$

und weiter

$$D_n = \frac{P_n[n(n-1)]}{4} = \frac{P_n C_n^2}{2}.$$

Dieselbe Formel wird auch direct abgeleitet. Ls

FR. HOČEVAR. Ueber das Combiniren zu einer bestimmten Summe. Pr. Innsbruck.

In der vorliegenden Arbeit werden sowohl für Combinationen mit, als auch ohne Wiederholungen je drei Recursionsformeln und ausserdem independente Formeln für die vier niedrigsten Klassen abgeleitet; ferner kommt der Fall zur Betrachtung, dass die Anzahl der Elemente, aus welchen die Combinationen gebildet werden sollen, von vornherein bestimmt, beziehungsweise beschränkt ist. Ls.

D. ANDRÉ. Sur les permutations alternées. Résal J. (3) VII. 167-184.

Der Verfasser bezeichnet n Elemente mit $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_n$ und bildet die sämmtlichen Permutationen. Er bildet die $(n-1)$ Differenzen, welche entstehen, wenn man den Index jedes Elements von dem Index des folgenden abzieht, und nennt diejenigen Formen, bei welchen diese Differenzen der ganzen Reihe nach abwechselnd positiv und negativ sind, alternirende Permutationen (Permutations alternées). Da jede solche Form alternirend bleibt,

wenn sie in umgekehrter Reihenfolge geschrieben wird, so ergiebt sich unmittelbar, dass die Anzahl der alternirenden Permutationen durch 2 teilbar ist. Diese Anzahl wird für n Elemente durch $2A_n$ bezeichnet. Da es für weniger als drei Elemente keine alternirenden Permutationen geben kann, so haben die Bezeichnungen $A_0\ A_1\ A_2$ keinen Sinn; die Zeichen werden jedoch benutzt und es wird ihnen die Bedeutung gleich 1 beigelegt. Es wird die Recursionsformel abgeleitet:

$$2A_{n+1} = C_n^0 A_0 A_n + C_n^1 A_1 A_{n-1} + C_n^2 A_2 A_{n-2} + \cdots + C_n^n A_n A_0$$

und gezeigt, dass die erzeugende Function des Bruches $\frac{A_n}{n!}$

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = A_0 + A_1 \frac{x}{1} + A_2 \frac{x^2}{1.2} + A_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

ist. Daraus werden unter Hinweisung auf die Arbeiten von Catalan die Reihen von $tg\,x$ und $\sec x$ nach steigenden Potenzen von x, sowie verschiedene andere Reihen und deren Beziehungen zu den elliptischen Functionen abgeleitet.

Zum Schluss folgen weitere Formeln zur leichteren Berechnung der Zahlenwerte für A_n. Ls.

E. Carpmael. Some solutions of Kirkman's 15 school-girl-problem. Lond. M. S., Proc. XII. 148-159.

Eine ausführliche Behandlung des bekannten Problems:

Fünfzehn Schulkinder gehen sieben Tage in fünf Reihen hintereinander, je drei in einer Reihe; sie sollen so geordnet werden, dass an keinem nachfolgenden Tage zwei Kinder, welche bereits in einer Reihe zusammen gewesen sind, wieder in eine Reihe kommen. Ls.

A. de Polignac. Note sur la marche du cavalier dans un échiquier. S. M. F., Bull. IX. 17-24.

Der Verfasser behandelt den regelmässigen Rösselsprung für ein Schachbrett von 64 und von 36 Feldern und geht dann über

zu den Schachbrettern von $(6+4n)^2$ und denen von $(8+4n)^2$ Feldern.

Es ist nicht tunlich, die Abhandlung auszugsweise wiederzugeben; wir müssen daher die Leser, welche sich für den Gegenstand interessiren, auf die Arbeit selbst verweisen.

Ls.

E. Laquière. Note sur le nombre des marches rentrantes, que l'on peut obtenir en remplissant successivement les deux demi-échiquiers rectangulaires ayant pour frontière commune l'une des médianes de l'échiquier total. S. M. F., Bull. IX. 11-17.

Diese Note bezieht sich auf eine frühere Veröffentlichung desselben Verfassers (Bull. S. M. F. VIII. 82-103, 132-158, siehe F. d. M. XII. 1880. p. 154); sie erwähnt rühmlich der Arbeiten von Herrn Flye Sainte-Marie über denselben Gegenstand, und behandelt eingehend die in der Ueberschrift angegebene Frage.

Ls.

H. MacColl. A note on Professor C. S. Peirce's probability notation. Lond. M. S., Proc. XII. 102.

Diese Note besagt, dass die Coincidenz in der Bezeichnungsweise von McColl und Professor Peirce als eine rein zufällige zu betrachten sei, da jener die Arbeit von Professor Peirce noch gar nicht kannte, als er seine Wahrscheinlichkeitsbezeichnung der Londoner mathematischen Gesellschaft vorlegte. Ls.

E. B. Elliott. Generalization of Prévost and Lhuilier's theorem in chances. Ed. Times XXXV. 36.

Ein Sack enthält eine gegebene oder unbekannte Anzahl von Kugeln, von denen wir nur wissen, dass jede Kugel eine von n Farben hat. Alle möglichen Combinationen dieser Farben werden a priori als gleich wahrscheinlich angenommen. Von

diesen Kugeln werden $\Sigma(p)$ Kugeln gezogen; man findet, es sind $p_1, p_2, \dots p_n$ von den verschiedenen Farben $1, 2, \dots n$. Diese Kugeln werden nicht in den Sack zurückgelegt, und es werden fernere $\Sigma(w)$ Kugeln gezogen. Die Wahrscheinlichkeit dass von diesen $w_1, w_2, \dots w_n$ von den Farben $1, 2, \dots n$ sind, ist gleich

$$\frac{\{\Sigma(w)\}!\ \Pi[(p+w)!]\ \{\Sigma(p)+n-1\}!}{\Pi(w!)\ \Pi(p!)\ \{\Sigma(p+w)+n-1\}!}.$$

Beschränkt man sich auf zwei Farben, so hat man das Theorem von Prévost und Lhuilier.

Es wird der Nachweis geführt, dass sich die Wahrscheinlichkeit wie vorstehend ergiebt. Ls.

E. Czuber. Das Petersburger Problem. Hoppe Arch. LXVII. 1-28.

Auf Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung findet man, dass der Einsatz bei dem bekannten „Petersburger Problem“ unendlich gross sein muss; trotzdem wird kein vernünftiger Mensch geneigt sein, bei demselben eine irgendwie nennenswerte Summe zu riskiren. Von verschiedenen Mathematikern sind Versuche gemacht worden, diesen Widerspruch zu lösen. Die Lösung von Daniel Bernoulli, von Laplace wieder aufgenommen, welche sich auf die Hypothese von dem moralischen Wert einer Geldsumme und von der moralischen Hoffnung stützt, hat die weiteste Anerkennung gefunden.

Ueber die einschlagenden Arbeiten wird von dem Verfasser eingehend berichtet, und sodann wird auch von ihm eine Lösung versucht. Bei derselben geht er von folgenden Anschauungen aus:

1) Die mathematische Erwartung ist der Grenzwert, welchem der im Durchschnitt auf einen Versuch entfallende Gewinn mit wachsender Anzahl der Versuche zustrebt; sie hat daher für den einzelnen Versuch nur eine theoretische Bedeutung.

2) In jedem geordneten Spiel steht bei jedem Teilnehmer der Hoffnung auf Gewinn immer die Gefahr eines Verlustes entgegen; beide können nur durch eine in sehr grosser Zahl ausgeführte Wiederholung des Spiels einander genähert werden. Bei

dem einzelnen Versuch nimmt mit dem Kleinerwerden der Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, oder dem Wachsen des Gewinnes die Gefahr zu und die Hoffnung ab; gleichzeitig verringert sich die Möglichkeit durch Wiederholung des Spiels, einen Ausgleich zwischen Gewinn und Verlust herbeizuführen.

3) Die Annahme eines Spiels oder einer Wette ist um so unvernünftiger zu nennen, je geringer die Wahrscheinlichkeit, dass man den Einsatz wieder heimbringt.

Die Richtigkeit dieser Sätze dürfte schwerlich zu bestreiten sein, und es lässt sich auch nicht in Abrede stellen, dass die Darstellung des Verfassers sehr für seine Lösung einnimmt. Dennoch glauben wir kaum, dass dieselbe als gelungen zu betrachten ist, denn das Ergebnis derselben ist ein wesentlich negatives, indem der Verfasser erklärt, dass die Abwägung der Gefahr gegen die Hoffnung wesentlich subjectiver Natur sei und sich der ziffermässigen Berechnung entziehe. Ls.

E. Laquière. Démonstrations élémentaires des lois fondamentales de probabilité des écarts dans les méthodes expérimentales. S. M. F., Bull. IX. 69-89.

Der Verfasser giebt eine elementare Ableitung für die Theorie der Beobachtungsfehler und für das Fehlergesetz $y = e^{-x^2}$. Dieselbe geht von den Combinationsmöglichkeiten elementarer Abweichungen $\Delta\delta$ aus, wobei angenommen wird, dass der auftretende Fehler δ als die Resultante von m Elementarfehlern $\Delta\delta$ anzusehen ist; von diesen haben m_1 das positive, m_2 das negative Vorzeichen. Dann wird $\delta = n\Delta\delta$, wo $n = m_1 - m_2$, und es ergiebt sich die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler in den Grenzen δ und $\delta + \Delta\delta$ liegt, gleich

$$y = P(\delta) = \frac{1}{1.2\ldots m_1 . 1.2\ldots m_2}.$$

Lässt man nun m_1 um eine Einheit wachsen, m_2 um eine Einheit abnehmen, so bleibt m unverändert, es ändert sich aber n um 2 und δ um $2\Delta\delta$. Es folgt

$$y+2\varDelta y = P(\delta+2\varDelta\delta) = P(\delta)\frac{m_2}{m_1+1}$$

und, indem man $\varDelta$ bis zur Grenze abnehmen lässt,

$$y+2dy = P(\delta+2d\delta) = P(\delta)\frac{m_2}{m_1+1} = y\frac{m-n}{m+n+2}$$

$$dy = -y\frac{n+1}{m+n+2}.$$

Für n und m werden die Werte $\frac{\delta}{d\delta}$ und $\frac{K^2}{(d\delta)^2}$ eingeführt, und, indem man deren höhere Potenzen vernachlässigt, ergiebt sich

$$dy = -y\delta d\delta,$$

aus welcher Gleichung durch Integration das Weitere folgt. Es wird ferner der Satz von Bernoulli, der Näherungsgrad des arithmetischen Mittels, die Bestimmung des Masses der Genauigkeit, der durchschnittliche Fehler, der mittlere Fehler erläutert und abgeleitet. Ls.

C. W. Merrifield. Considerations respecting the translation of series of observations into continuous formulae. Lond. M. S., Proc. XII. 4-14.

Dieser sehr lesenswerte Aufsatz behandelt verschiedene Fragen. Zunächst weist der Verfasser darauf hin, dass man sehr häufig Beobachtungsreihen durch stetige Functionen ausgedrückt hat, obgleich die beobachteten Phänomene ihrer Natur nach solche sind, dass die stetige Aenderung derselben ausgeschlossen ist. Als Beispiel werden die Bevölkerungszahlen eines Landes angeführt, welche als stetige Functionen der Zeit dargestellt worden sind. Hieraus ergiebt sich sofort, dass es verkehrt sein würde, die Näherung der Formel mit der Beobachtungsreihe zu weit zu treiben. Auch hier giebt der Verfasser passende Beispiele.

Bei der Frage mit den wievielten Differenzen die hier erforderlichen Interpolationen gemacht werden sollten, werden die Beobachtungsreihen unterschieden, je nachdem

1) zahlreiche, einander nahestehende Ordinaten oder

2) nur wenige Ordinaten vorhanden und diese durch grössere Intervalle getrennt sind.

Im ersten Fall, und vorausgesetzt, dass nach der Natur des Phänomens die Aenderung der Ordinaten eine stetige sein muss, darf man die Näherung nach der Ansicht des Verfassers beliebig weit treiben, während im zweiten Fall jeder Versuch, aus den Beobachtungen ein allgemeines Gesetz abzuleiten, als höchst gewagt erscheinen muss, wenn nicht ausser den Beobachtungen noch andere Quellen, welche über das Phänomen Aufschluss geben, zu Gebote stehen. Schliesslich bespricht der Verfasser die Unbestimmtheit des ganzen Problems, so lange Nichts über die analytische Form der zu wählenden Function bekannt oder gegeben ist. Ls.

E. McClintock. A new general method of interpolation. Sylv., Am. J. II. 307-314. 1879.

Nach Anführung der bekannten Interpolationsformeln von Lagrange und Newton wird die Formel des Verfassers entwickelt, welche folgende Gestalt hat. Es seien $x_1 \dots x_k$ die gegebenen Argumente, $\varphi(x_1) \dots \varphi(x_k)$ die zugehörigen Functionswerte, ferner sollen die Hülfsgrössen $\varphi_1\ \varphi_2 \dots$ nach der Formel

$$\varphi_{m+1}(x_n) = \frac{\varphi_m(x_n) - \varphi_m(x_{m+1})}{x_n - x_{m+1}}$$

gebildet werden, wo

$$m = 0, 1, 2 \dots, \text{ und } \varphi_0 = \varphi,$$

dann wird

$$\varphi(x) = \varphi(x_1) + (x-x_1)\varphi_1(x_2) + (x-x_1)(x-x_2)\varphi_2(x_3)$$
$$+ (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\varphi_3(x_4) + \cdots,$$

wo das Bildungsgesetz evident ist. Als Anhang ist eine Note über den Beweis gewisser Interpolationsformeln beigefügt. B.

C. Szily. Sur la formule d'interpolation de M. Pictet. Almeida J. IX. 303-306.

C. L. Landré. Over de functie φ van de methode der kleinste kwadraten. Nieuw Arch. VII. 214-219.

Einige Betrachtungen über die Function $\varphi(\Delta)$, welche die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers Δ vorstellt. Der Verfasser weist auf einige Unrichtigkeiten in dem Betrachtungskreise vieler diesen Gegenstand behandelnden Schriftsteller hin und ersetzt sie durch eine strengere Ableitung. G.

O. Stone. On the determination of the error and rate of a clock by the method of least squares. Urania. 1881. Dublin.

Es werden die Normalgleichungen für die in der Ueberschrift angegebene Aufgabe abgeleitet und durch ein Zahlenbeispiel erläutert. Ls.

A. E. Steinthal. The method of least squares applied to conditioned observations. Mess. (2) X. 186-190.

Die Methode der kleinsten Quadrate, wie sie in verschiedenen Abhandlungen gegeben worden ist, wurde in systematischer Form von Encke im Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1834, 1835, 1836 dargestellt. Die Methode der Behandlung der bedingten Gleichungen wird dort in vollständiger Form so weit gegeben, als es sich um die Auffindung der Werte der Unbekannten handelt. Dagegen fehlten Regeln über die Aufsuchung der wahrscheinlichen Fehler der Resultate. Der Verfasser dehnt die von Gauss für den Fall bedingungsloser Beobachtungen gegebene Methode auf den Fall aus, wo gewisse genaue Gleichungen erfüllt werden müssen. Glr. (O.).

G. Lorenzoni. Sull' andamento del pendolo di Frodsham N. 1604, posseduto dal r. osservatorio astronomico di Padova. Ven. Atti Ist. (5) VII. 279-309.

Seit 1877 besitzt die Sternwarte in Padua eine Uhr aus der

Werkstätte von Frodsham in London. Das erste Exemplar wies Unregelmässigkeiten auf, so dass der Verfertiger es zurücknahm und durch einen seiner eigenen Leute ein zweites in Padua aufstellen liess. Herr Lorenzoni benützte jede Gelegenheit, um bei heiterem Wetter den Gang des Pendels mit der wirklichen Zeit zu vergleichen und auf diese seine Wahrnehmungen gewissermassen eine Individualtheorie des neuen Instrumentes zu begründen. Die Untersuchung besteht in einer gründlichen Durchführung der durch die Methode der kleinsten Quadrate gebotenen Rechnungen und wird als Beispiel allen denen von Nutzen sein, welchen eine ähnliche Prüfung von Pendeluhren obliegt. Auch vergleicht der Verfasser seine Ergebnisse mit jenen, die von einer Reihe anderer Astronomen in analogen Fällen erhalten wurden, und gelangt so dazu, seine Uhr für eine nahezu ganz genau gehende zu erklären. Bei 16,9° C. Lufttemperatur und 758^{mm} Barometerdruck vollziehen sich die Schwingungen des Pendels so gut wie gleichmässig.

Gr.

E. L. de Forest. Law of facility of errors in two dimensions. Anal. VIII. 4-9, 41-48, 73-82.

E. L. de Forest. On the elementary theory of errors. Anal. VIII. 137-148.

Fortsetzung der früheren Arbeiten s. F. d. M. XII. 1880. p. 154 und 155.

Jn. (O.).

E. Cesaro. Démonstration élémentaire et généralisation de quelques théorèmes de M. Berger. Math. I. 99-102.

Einer der Sätze heisst: „Für $n = \infty$ ist das Mittel der Summe der Divisoren einer ganzen Zahl $\frac{1}{6}\pi^2 n$ und die der reciproken Werte der Divisoren $\frac{1}{6}\pi^2$." Der Verfasser giebt in elementarer Weise ein allgemeines Princip, mit dessen Hülfe man die Werte einer grossen Zahl analoger Summen finden kann.

Mn. (O.).

S. Newcomb. Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers. Sylv., Am. J. IV. 39-41.

Anknüpfend an die Erfahrung, dass bei dem häufigen Gebrauch von Logarithmen-Tafeln die ersten Seiten weit mehr benutzt werden, als die letzten, weil die erste characteristische Zahlziffer weit häufiger 1 ist als irgend eine andere, und weil die Häufigkeit bis zur 9 abnimmt, wirft der Verfasser die Frage auf, ob das Gegenteil für die Logarithmen gelte, und ob bei einer Tafel von Antilogarithmen der letzte Teil mehr benutzt werde, als der erste. Er sucht nachzuweisen, dass dies nicht der Fall ist, dass vielmehr die Zahlen mit einer solchen Wahrscheinlichkeit auftreten, dass alle Mantissen ihrer Logarithmen gleich wahrscheinlich sind.

Er giebt dann die Wahrscheinlichkeiten für die Häufigkeit der einzelnen Zahlen in den beiden ersten characteristischen Ziffern, und macht darauf aufmerksam, dass aus denselben erkannt werden könne, ob eine grössere Reihe von unter einander stehenden von einander unabhängigen numerischen Resultaten aus natürlichen Zahlen oder Logarithmen bestehe.

Ls.

R. Hoppe. Wahrscheinlicher Grad der Homogeneität einer Mischung. Hoppe Arch. LXVII. 98-102.

Sind in einem Raum beliebige Quanta mehrerer verschiedener Stoffe ohne Cohärenz und gegenseitige Einwirkung ihrer Teile eingeschlossen, so pflegt man, ohne sich irgend eines Grundes bewusst zu sein, sofort anzunehmen, dass, wenn die Teile lange genug in mannigfaltige Bewegung versetzt werden, eine Gleichmässigkeit der Mischung bis auf jeden Grad der Annäherung erfolgen müsse. Der Autor untersucht, welche Berechtigung diese Annahme hat, auf Grund der Wahrscheinlichkeitstheorie. Er geht davon aus, dass der Endzustand, dem ein Gemenge durch die Bewegung zugeführt wird, in der völligen Zufälligkeit der Anordnung seiner Teile besteht; es handelt sich

um die Beziehung dieses gesetzlosen Zustandes zur Homogeneität der Mischung. Da die Teile keine Wirkung auf einander ausüben, so wird ein einzelner der Stoffe betrachtet.

In dem Raum $= 1$ seien n gleiche Atome eingeschlossen. Alle Lagen eines jeden seien gleich wahrscheinlich. Innerhalb jenes Raumes denken wir uns einen kleineren Raum $= a$ abgegrenzt, in welchem sich in einem Augenblick k Atome befinden. Die Aufgabe kommt darauf hinaus, zu bestimmen, um welche Grösse wahrscheinlich k von seinem wahrscheinlichen oder mittleren Wert differirt.

Auf diesem Wege gelangt der Verfasser zu einigen höchst interessanten Folgerungen, welche dartun, dass die erwähnte Annahme, insofern sie über das Gebiet der Erfahrung hinausgeht und als eine allgemein gültige Wahrheit angesehen werden will, nur sehr bedingungsweise zugelassen werden darf.

Ls.

Lösungen weiterer Aufgaben über Bestimmung von mittleren Werten durch Seitz, D. Edwardes, J. A. Kealy, A. Martin, J. O'Regan, W. H. H. Hudson, C. J. Monro finden sich Ed. Times XXXIV. 42-43, 70-71, 87-88, 92-93, 101.

O.

S. Spitzer. Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, so wie der Invaliden-Pensionen, Heiratsausstattungen und Krankenkassen. (Zweite Auflage). Wien. Carl Gerold's Sohn.

Dieses Buch dient den Vorlesungen des Verfassers über das Versicherungswesen an der Handels-Akademie zu Wien zur Grundlage; es behandelt den Gegenstand in durchaus elementarer Weise. Dieser Umstand dürfte vielleicht als die Ursache anzusehen sein, dass jede einzelne Frage abgesondert für sich behandelt wird, ohne dass der Verfasser sich auf einen höheren Standpunkt stellt, um von demselben aus einen Einblick zu geben

in diejenigen Gebiete, welche in dem Buche nicht speciell abgehandelt werden. Der sechste Abschnitt handelt von den Invalidenpensionen, wodurch eine Lücke der meisten Lehrbücher ähnlicher Art, welche sich auf die eigentliche Lebensversicherung zu beschränken pflegen, ausgefüllt wird. Ls.

F. F. Hamburg. Kritische Untersuchung über Militairdienstversicherung. Jena. Gust. Fischer.

F. Fischer. Die mathematischen Grundlagen der Militairdienstversicherung. Hamb. Mitt. No. 1.

Es wird nachgewiesen, dass das statistische Beobachtungsmaterial, welches erforderlich ist, um die Prämien für die Militärdienstversicherung zu berechnen, welche die pekuniäre Unterstützung der zum Militärdienst eingestellten Personen durch im Voraus festgesetzte Versicherungssummen bezweckt, nicht vorhanden ist, und dass die zu diesem Zweck gegründeten Versicherungsanstalten, welche bei ihren Rechnungen die Voraussetzungen machen, es werden unter den versicherten Personen dieselben Sterblichkeits- und Einstellungsverhältnisse auftreten, wie unter der allgemeinen Bevölkerung, sich später ausser Stande sehen werden, die in Aussicht genommenen Verpflichtungen zu erfüllen. Diese Voraussetzungen seien nur zulässig, falls die Militärdienstversicherung für jeden Knaben von seiner Geburt an obligatorisch wäre. Der Verfasser leitet sodann die Formeln ab, nach denen die Prämien für eine solche zwangsweise Militärdienstversicherung zu berechnen wären. Es mögen bedeuten

$z_1\, z_2\, z_3$ die Wahrscheinlichkeiten im I. II. III. Gestellungsjahr in das Militär eingestellt zu werden,

$q_1\, q_2\, q_3$ die Wahrscheinlichkeiten zurückgestellt zu werden,

$k_1\, k_2\, k_3$ die Wahrscheinlichkeiten in die Ersatz-Reserve gestellt oder ausgemustert oder ausgeschlossen zu werden,

ϱ die auf ein Jahr discontirte Einheit,

${}^n\mathfrak{P}(x)$ die einmalige Netto-Prämie der Erlebungs-Versicherung,

$P_n(x)$ die einmalige Netto-Prämie der temporären Ablebungs-Versicherung,

$R_n(x)$ den Wert der n-maligen temporären Leibrente,

${}^n\mathfrak{p}(x)$ die jährliche Netto-Prämie der Militärdienst-Versicherung ohne Rückgewähr,

${}^n\mathfrak{pr}(x)$ die jährliche Netto-Prämie der Militärdienst-Versicherung mit Rückgewähr,

${}^n\mathfrak{br}(x) = \alpha\ {}^n\mathfrak{pr}(x)$ die jährliche Brutto-Prämie der Militärdienst-Versicherung mit Rückgewähr.

Der Verfasser findet:

$${}^n\mathfrak{p}(x) =$$
$$\frac{\frac{1}{4}\frac{\varrho^4-1}{\varrho-1}\{\mathfrak{z}_1\,{}^n\mathfrak{P}(x)+\mathfrak{z}_2\,{}^{n+1}\mathfrak{P}(x)+\mathfrak{z}_3\,{}^{n+2}\mathfrak{P}(x)\}-\frac{1}{3}\{\mathfrak{z}_1 P_1(x+n)+\mathfrak{z}_2 P_1(x+n+1)+\mathfrak{z}_3 P_1(x+n+2}{R_{n+1}(x)}$$

näherungsweise

$${}^n\mathfrak{p}(x) = \frac{\Sigma\mathfrak{z}\varrho^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{\varrho^4-1}{\varrho-1}\,{}^n\mathfrak{P}(x)-\frac{1}{3}P_1(x+n)\right\}}{R_{n+1}(x)}$$

und ferner

$${}^n\mathfrak{pr}(x) = \frac{R_{n+1}(x)\ {}^n\mathfrak{p}(x)}{R_{n+1}(x)-\alpha\psi(xn)},$$

wobei

$$\psi(xn) = (n-1)P_n(x)-\sum_{y=1}^{y=n-1}P_y(x)+(n-1)k_1\,{}^n\mathfrak{P}(x)$$
$$+n\{k_2\,{}^{n+1}\mathfrak{P}(x)+k_3\,{}^{n+2}\mathfrak{P}(x)\}+n\{q_1P_1(x+n)+q_2P_1(x+n+1)\}.$$

Ls.

Th. Wittstein. Das mathematische Gesetz der Sterblichkeit. Hannover. W. Riemschneider.

Es ist dies ein höchst interessanter Versuch, das Gesetz der menschlichen Sterblichkeit, und zwar für die ganze Lebensdauer, durch eine Function des Alters auszudrücken. Zwar sind solche Functionen auch bereits früher aufgestellt worden, doch haben sich dieselben nicht als zutreffend bewährt, und daher haben sich neuere Versuche dieser Art darauf beschränkt, das Sterb-

lichkeitsgesetz entweder für die Periode der Kindheit, oder für die übrige Lebenszeit mit Ausnahme der Kindheit analytisch auszudrücken.

Wittstein nimmt die Sterbenswahrscheinlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person vom Alter x im Laufe eines Jahres sterbe, welche er mit $w(x)$ bezeichnet, zum Ausgangspunkt seiner Betrachtungen. Er untersucht aber auch die Eigenschaften der Curve der successiven Lebenden, wobei $L(x)$ als Ordinate, das Alter x als Abscisse betrachtet wird. Er findet, dass der Wert von $\frac{1}{w(x)}$, welcher die Zahl der Lebenden anzeigt, von denen in Jahresfrist einer stirbt, identisch ist mit der Subtangente der Curve der Lebenden. Der Verfasser setzt nun das höchste Alter der Sterblichkeitstafel, welches noch Lebende enthält, $= M$ und zeigt, dass die Gleichung

$$w(x) = \frac{1}{1+(M-x)}$$

der Hypothese von Moivre (Hypothese der geradlinigen Absterbeordnung) entsprechen würde, aber nur für die Zeit etwa vom 21sten Jahr an. Dieser Bedingung genügt aber auch

$$w(x) = \frac{1}{1+a(M-x)} \text{ und } w(x) = \frac{1}{1+a(M-x)^n},$$

was Wittstein als den Anfang der Reihen-Entwickelung von

$$w(x) = a^{-(M-x)^n}$$

betrachtet. Es wird dann gezeigt, wie die Constanten a, M, n aus den Beobachtungswerten vorläufig bestimmt werden können. Soll die Formel aber auch die Zeit der Kindheit mit umfassen, so muss sie durch ein weiteres Glied ergänzt werden. Der Verfasser findet für dasselbe $\frac{1}{m} a^{-(mx)^n}$, und somit wird seine Function

$$w(x) = a^{-(M-x)^n} + \frac{1}{m} a^{-(mx)^n}.$$

Im Weiteren zeigt derselbe, wie die Constanten, welche in dieser Formel vorkommen, aus den Beobachtungswerten bestimmt werden, und wie die Formel selbst bei einer nur vorläufigen Be-

stimmung der Constanten eine recht gute Annäherung an die Beobachtungswerte giebt. Die genaue Berechnung der Constanten kann nur mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate erfolgen.

Ls.

W. Küttner. Zur mathematischen Statistik. Schlömilch Z. XXVI. 297-313.

Den Weg anzugeben, der mit Hülfe der Bevölkerungsstatistik dazu führt, die Gesetze zu ermitteln, nach denen sich bei einer Generation männlicher Personen die Eheschliessungen vollziehen, bezeichnet der Verfasser als den Zweck der vorliegenden Abhandlung.

Im Allgemeinen wird sich dies Gesetz als Function der Lebenswahrscheinlichkeiten zweier Ehegatten, und als Wahrscheinlichkeit für eine männliche unverheiratete Person im Alter x bis $x+dx$ zum n^{ten} Male eine y- bis $(y+dy)$-jährige weibliche Person zu ehelichen, darstellen lassen. Diese letztere wird aus der entsprechenden Wahrscheinlichkeit für die Altersgrenzen x und $x+1$ bez. $y-\frac{1}{2}$ und $y+\frac{1}{2}$ abzuleiten sein.

Heisst die n^{te} Ehe eines Mannes eine Ehe n^{ter} Ordnung, analog ein Wittwer aus n^{ter} Ehe ein Wittwer n^{ter} Ordnung, so besteht die zu lösende Aufgabe in der Ermittelung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Wittwer $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sich im Alter x bis $x+1$ mit einer $\left(y-\frac{1}{2}\right)$- bis $\left(y+\frac{1}{2}\right)$-jährigen weiblichen Person zum n^{ten} Mal verheiratet, wobei unter einem Wittwer 0ter Ordnung ein bisher noch Unverehelichter verstanden wird. Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich zerlegen

1) in die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Wittwer $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung im Alter x bis $x+1$ überhaupt zum n^{ten} Male verheiratet,
$$= {}^{n}P_{x}, \text{ und}$$

2) in die Wahrscheinlichkeit, eine $\left(y-\frac{1}{2}\right)$- bis $\left(y+\frac{1}{2}\right)$-jährige weibliche Person zu heiraten, wenn die n-malige Heirat im

Alter x bis $x+1$ gewiss wäre,

$$= Q_y.$$

Diese beiden Wahrscheinlichkeiten werden durch ihre wahrscheinlichsten Werte ${}^n p_x$ und q_y ersetzt.

Der Verfasser drückt diese Werte ${}^n p_x$ und q_y durch die aus statistischen Erhebungen ermittelten Gesammtheiten von Lebenden etc. aus, unter Bezugnahme auf die Zeuner'sche Darstellungsweise mittels der Raumcoordination, und stellt die Formulare der Register auf, welche die Statistik aus den Zählkarten der Standesämter und den Haushaltungslisten der Volkszählungen auszufüllen hat, um die für die Rechnung erforderlichen Unterlagen zu liefern. Ls.

L. Walras. Die mathematische Theorie der Preisbestimmung der wirtschaftlichen Güter. Stuttgart. F. Encke.

Das vorliegende Buch enthält die Uebersetzung von vier Denkschriften, welche bereits in den Jahren 1876 und 1877 in französischer Sprache von dem Verfasser zu Lausanne veröffentlicht worden sind; diese aber sind als ein Auszug aus dessen „Éléments d'économie politique“ zu betrachten, von denen der erste Band 1874 begonnen, 1877 beendet worden, während zwei fernere Bände in Aussicht gestellt sind. Es handelt sich um die Darstellung des gesammten Gebietes der reinen Volkswirtschaft auf mathematischer Grundlage, welche, wie uns scheint, von Walras mit grossem Glück versucht worden ist.

Ausgehend von dem Zustand der absolut freien Concurrenz auf dem Gebiete des Tausches und der Production werden die zwei Probleme gestellt und gelöst:

1) Gegeben die Quanta der Waaren, gesucht das System der Gleichungen, deren Wurzeln die Preise dieser Waaren sind.

2) Gegeben die Quanta der productiven Dienste, gesucht das System der Gleichungen, deren Wurzeln sind 1) die Quanta der Producte, 2) die Preise der Producte, 3) die Preise der productiven Dienste. In diesen beiden Aufgaben fasst der Verfasser

die mathematische Theorie des Tausches und die mathematische Theorie der Production zusammen. Zu ihrer Lösung genügen ihm zwei Voraussetzungen, deren Richtigkeit gern zugestanden wird.

1) Bei jedem Tausch ist das Angebot einer Waare gegen eine andere, gleich der Nachfrage dieser anderen multiplicirt mit ihrem Preis in der ersteren, und

2) Es wird ein Jeder streben, sich durch den Tausch ein Maximum des Genusses zu verschaffen.

Die vierte der Denkschriften betitelt der Verfasser: Gleichungen der Capitalisirung und des Credits. Sie handelt vom Voll-Einkommen und Rein-Einkommen, vom Zinsfuss, von den Gleichungen der Capitalisirung und dem Aenderungsgesetz der Preise beim wirtschaftlichen Fortschritt. Ls.

Lösungen weiterer Aufgaben über Wahrscheinlichkeit von C. J. Monro, Seitz, G. F. Walker, D. Eastwood, H. McColl, J. E. W. Steggall, J. W. Russell, E. Blackwood, A. L. Watherston, G. S. Carr, T. P. Kirkman, H. Fortey, W. B. Grove, J. H. Fry, Matz, Evans finden sich Ed. Times XXXIV. 26-27, 40-41, 43-45, 50 69, 76-77, 80-81, 84, 85, 113-114, 116-117, 119.

O.

Seitz. Solution of a question (6169). Ed. Times XXXIV. 33-34.

P, Q, R seien drei willkürlich angenommene Punkte innerhalb einer Kugel mit dem Mittelpunkt *O*. Dann ist das mittlere Volumen des Tetraeders *OPQR* gleich $\frac{9\pi r^3}{1024}$.

O.

C. J. Monro. Solution of a question (6005). Ed. Times XXXIV. 22.

Wenn drei Längen, deren Grenzen für alle drei dieselben sind,

willkürlich gewählt werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass man ein beliebiges Dreieck aus ihnen bilden kann, $\frac{1}{2}$ und die, dass man ein stumpfwinkliges bilden kann, $\frac{1}{4}\pi$.

O.

Lösungen weiterer Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeit von SEITZ, G. F. WALKER, MATZ finden sich **Ed. Times XXXIV. 59-60, 107, 111-112.**

O.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

J. L. W. V. Jensen. Nogle Sätninger og Beviser fra de uendelige Räkkers og Produkters Theori. Zeuthen T. (4) V. 65-77.

In diesem Aufsatze wird eine Reihe von Hauptsätzen aus der Theorie der unendlichen Reihen im Zusammenhang dargelegt. Die Sätze sind zwar meistens bekannt, treten aber bisweilen in etwas geänderter Form hervor. Als Beispiel kann der folgende dienen. Die Summe $\Sigma u_n v_n$ convergirt, falls $\Sigma \text{ mod.} (u_n - u_{n+1})$ convergirt und Σv_n zwischen endlichen Grenzen oscillirt und $\lim. u_n = 0$ ist. Ist dagegen $\lim. u_n$ von Null verschieden, so wird $\Sigma u_n v_n$ oscillirend zwischen endlichen Grenzen. Die allgemeine Frage, ob

$$\lim_{\varepsilon=0}. (u_0 + u_1 + u_2 \dots) = v_0 + v_1 + v_2 \dots \qquad (\text{wo } v_m = \lim_{\varepsilon=0}. u_m)$$

ist, wird bejahend beantwortet, falls für ein gewisses von ε unabhängiges n und alle grösseren Werte von n $\text{mod.} \dfrac{u_n}{u_{n+1}} > \gamma > 1$ ist. Von diesem Satze macht der Verfasser verschiedene Anwendungen, z. B. zum Beweise des Satzes von der Vertauschung der Summationsordnung bei unendlichen Doppelsummen. Ferner betrachtet er unendliche Producte und namentlich zeigt er hier,

dass $\Pi(1+u_n)$ zwar convergirt, wenn Σu_n unbedingt convergent ist, dagegen ist die blosse Convergenz von Σu_n weder eine hinreichende noch notwendige Bedingung der Convergenz von $\Pi(1+u_n)$. Die Beweise sind durchgängig ganz einfach und beruhen meist auf geschickten Umformungen der vorgelegten Reihen.

Gm.

G. Kohn. Beiträge zur Theorie der Convergenz unendlicher Reihen. Hoppe Arch. LXVII. 63-96.

Ist u_x eine für $x \geqq 1$ eindeutige, stetige und positive Function von x, welche derartig fällt, dass $\lim_{x=\infty} u_x = 0$ wird, ist ferner $f(x)$ eine eindeutige, positive und für endliche Werte von x endliche Function, welche mit x in's Unendliche wächst, so besagt der am Anfange des Aufsatzes abgeleitete Satz: „Divergirt die Reihe

$$U = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

so divergirt auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{f(n+1)-f(n)\}\, u_{f(n)};$$

convergirt aber U, so ist dies auch der Fall mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{f(n+1)-f(n)\}\, u_{f(n+1)}.\text{“}$$

Eine Reihe specieller Fälle wird hieran angeknüpft. Als Hauptergebnis der Arbeit sei hier folgende allgemeine Regel angeführt: „Hat die eben characterisirte Function $f(x)$ die Eigenschaft, dass von einem bestimmten Werte von n an beständig

$$f(n+1)-f(n) > 1$$

bleibt, so convergirt die Reihe U, sobald

$$\lim_{n=\infty} \frac{\{f(n+1)-f(n)\}\, u_{f(n)}}{u_n} < 1,$$

divergirt dagegen, wenn

$$\lim_{n=\infty} \frac{\{f(n+1)-f(n)\}\, u_{f(n+1)}}{u_n} > 1$$

ist; bleibt dagegen von einem bestimmten Werte von n an beständig

$$f(n+1)-f(n) < 1,$$

so convergirt oder divergirt die Reihe U, je nachdem

$$\lim_{n=\infty} \frac{\{f(n+1)-f(n)\}\,u_{f(n)}}{u_n} > 1 \text{ oder } < 1$$

wird.“ T.

O. Schlömilch. Ueber simultan convergirende und divergirende Reihen. Schlömilch Z. XXVI. 63-64.

Um eine beliebige Menge von Reihenpaaren herzuleiten, die ebenso, wie das von Cauchy (Cours d'analyse algébrique p. 153) angegebene, nämlich

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots \quad \text{und} \quad u_1+2u_2+4u_4+8u_8+\cdots,$$

die Eigenschaft gleichzeitiger Convergenz und Divergenz besitzen, stellt der Verfasser mit Hülfe einfacher Betrachtungen aus der Integralrechnung folgendes Princip auf: Bezeichnet $\varphi(x)$ eine endlich bleibende eindeutige Function, welche von $x=a$ bis $x=\infty$ stetig abnimmt, ohne negativ zu werden, wählt man ferner eine Function $f(y)$ so, dass $f(\infty)=\infty$ wird, und dass

$$\psi(y)=\varphi[f(y)]\cdot f(y),$$

wenn b der Gleichung $f(b)=a$ genügt, von $y=b$ bis $y=\infty$ ebenfalls stetig abnimmt, ohne negativ zu werden, so convergiren oder divergiren die Reihen

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\varphi(a+2)+\cdots$$
$$\psi(b)+\psi(b+1)+\psi(b+2)+\cdots$$

gleichzeitig. Für $a=1$ und $x=2^y$ erhält man den erwähnten Cauchy'schen Satz. Ferner werden die speciellen Fälle hervorgehoben:

$$a=1,\ x=k^y \text{ und } a=1,\ x=y^2$$

oder allgemeiner

$$a=1,\ x=y^x$$

(cf. Schlömilch Alg. Analysis 6. Aufl. p. 108).

Die mit Hülfe dieses Princips erhaltenen Theoreme lassen sich, wie der Verfasser schliesslich bemerkt, hinterher meistens auch elementar leicht beweisen. T.

D. ANDRÉ. Solution d'un problème général sur les séries. C. R. XCII. 697-698.

Ist

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots$$

eine convergente und

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

eine recurrente Reihe, so handelt es sich um die Summation der Reihe

$$F(x) = u_0 v_0 + u_1 v_1 x + u_2 v_2 x^2 + u_3 v_3 x^3 + \cdots,$$

deren Convergenz vorausgesetzt wird. Von diesem allgemeinen Problem hat der Verfasser früher (C. R. LXXXVI. 1017 ff. und LXXXVII. 973 ff., cf. F. d. M. X. 1878. p. 181 f.; C. R. LXXXVIII. 740 f., cfr. F. d. M. XI. 1879. p. 171 f.) mehrere specielle Fälle untersucht. Es ist ihm jetzt gelungen, dasselbe in seiner ganzen Allgemeinheit zu lösen. Das ohne Beweis mitgeteilte Resultat ist folgendes: Es sei

$$v_n = \sum_{(r)} \xi_r(n) r^n,$$

wo r irgend eine Wurzel der erzeugenden Gleichung der recurrenten Reihe, ϱ der Grad ihrer Vielfachheit,

$$\xi_r(n) = P_{r,0} + P_{r,1} \cdot n + \cdots + P_{r,\varrho-1} n^{\varrho-1}$$

und die Summation über alle Wurzeln r der erzeugenden Gleichung zu erstrecken ist; dann ist

$$F(x) = \sum_{(r)} \Phi_r(x),$$

wenn

$$\Phi_r(x) = \sum_{i=0}^{\varrho-1} Q_{r,i} r^i x^i f^{(i)}(rx)$$

ist, worin $f^{(i)}$ die i^{te} Ableitung von f, und $Q_{r,i}$ gewisse Grössen bedeuten, deren Berechnung angedeutet wird. T.

B. HANSTED. Nogle Bemärkninger om Bestemmelsen af Koefficienterne i m^{te} Potens af en Potensräkke. Zeuthen T. (4) V. 12-16.

Es sei u eine convergente Potenzreihe. Um die Coefficienten

in der Reihe für $v = u^m$ zu berechnen, benutzt der Verfasser die Differentialgleichung

$$u\frac{dv}{dx} = mv\frac{du}{d\varphi}.$$

Gm.

J. S. Hayes. A demonstration of Maclaurin's theorem. Anal. VIII. 149-154.

Der Verfasser will Convergenzbedingungen aufstellen, die vom Rest unabhängig sind. Jn. (O.).

A. W. Whitcom. On the expansion of $\Phi(x+h)$. Sylv., Am. J. III. 344-356.

Den Ausgangspunkt bildet folgender Satz: Ist $\varphi(x)$ eine in dem Intervall x bis $x+mh$ nebst ihrer Ableitung endliche und stetige Function von x, wo m durchaus positiv und entweder constant oder eine Function von x und h ist, die sich für $h=0$ auf eine Constante reducirt, so ist

$$\varphi(x+mh) = \varphi(x)+mh\,\varphi'(x+\theta'h),$$

wo θ' eine zwischen 0 und m liegende Grösse ist. Hieraus wird, vorausgesetzt dass ausser $\varphi(x)$ auch sämmtliche Ableitungen bis zur n^{ten} in dem Intervalle x bis $x+h$ endlich und stetig sind, zunächst das System von Gleichungen

$$\text{(A)}\quad\begin{cases}\varphi(x+h) = \varphi(x)+h\varphi'(x+\theta_1 h) & 0<\theta_1<1\\ \varphi'(x+\theta_1 h) = \varphi'(x)+\theta_1 h\varphi'(x+\theta_2 h) & 0<\theta_2<\theta_1\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ \varphi^{n-1}(x+\theta_{n-1}h) = \varphi^{n-1}(x)+\theta_{n-1}h\,\varphi^n(x+\theta_n h) & 0<\theta_n<\theta_{n-1}\end{cases}$$

abgeleitet und aus der ersten dieser Formeln der Taylor'sche Satz:

$$\text{(B)}\qquad \varphi(x+h) = \varphi(x)+\frac{h}{1}\varphi'(x)+\frac{h^2}{2!}\varphi''(x)+\cdots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{n-1}(x)+\frac{h^n}{n!}\varphi^n(x+\theta h).$$

Zweck des Aufsatzes ist, die hierin auftretenden Functionen $\theta, \theta_1, \theta_2, \dots$ von x und h zu berechnen. Die hierfür verwendete Methode besteht in partiellen Differentiationen nach h und nach-

herigem Verschwindenlassen von h. Auf diesem Wege ergiebt sich in Folge der aus (B) abzuleitenden Gleichung

$$\varphi^n(x+\theta h) = \varphi^n(x) + \frac{h}{n+1}\varphi^{n+1}(x) + \frac{h^2}{(n+1)(n+2)}\varphi^{n+2}(x) + \cdots$$
$$+ \frac{h^{m-n-1}}{(n+1)(n+2)\ldots(m-1)}\varphi^{m-1}(x) + \frac{h^{m-n}}{(n+1)(n+2)\ldots m} R$$

folgende Darstellung für θ:

$$\theta = P_0 + \frac{h}{1}P_1 + \frac{h^2}{2!}P_2 + \cdots + \frac{h^n}{n!}P_n + \cdots,$$

worin

$$P_0 = \frac{1}{n+1}$$

ist, und $P_1, P_2, \ldots$ rational aus $n, \varphi^{n+1}(x), \varphi^{n+2}(x), \ldots$ zusammengesetzt sind, und zwar in P_i die Ableitungen bis zur $(n+i+1)^{\text{ten}}$ auftreten. So ist z. B.

$$P_1 = \frac{2(n+1)-(n+2)}{2(n+1)^2(n+2)} \cdot \frac{\varphi^{n+2}(x)}{\varphi^{n+1}(x)},$$
$$P_2 = \frac{2.3.(n+1)^2-(n+2)(n+3)}{3(n+1)^3(n+2)(n+3)} \cdot \frac{\varphi^{n+3}(x)}{\varphi^{n+1}(x)}$$
$$- \frac{2(n+1)-(n+2)}{(n+1)^3(n+2)}\left[\frac{\varphi^{n+2}(x)}{\varphi^{n+1}(x)}\right]^2.$$

In ganz ähnlicher Weise giebt dasselbe Verfahren, auf die Gleichungen (A) angewendet, die expliciten Darstellungen für $\theta_1\ \theta_2 \ldots$ Die für θ_n resultirende Potenzreihe von h beginnt mit $\frac{1}{2^n}$; die übrigen Coefficienten sind ebenfalls rationale Functionen von $\varphi''(x), \varphi'''(x), \ldots$

Schliesslich wird noch auf einem zweiten Wege der Taylor'sche Satz und die Darstellung von θ hergeleitet, indem damit begonnen wird, dass man aus dem System (A)

$$\varphi'(x+\theta_1 h),\ \varphi''(x+\theta_2 h), \ldots,\ \varphi^{n-1}(x+\theta_{n-1}h)$$

eliminirt und dann die für $\theta_1, \theta_2, \ldots$ gewonnenen Darstellungen benutzt. T.

P. Mansion. Démonstration élémentaire du théorème de Taylor par les fonctions d'une variable imaginaire. Math. I. 3-6.

Es sei

$$z = x+yi \text{ und } Fz = \varphi(x,y)+i\psi(x,y)$$

eine Function von z, stetig für alle betrachteten Werte von x, y und also den Bedingungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad F'z = \frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

genügend. $y = \chi x$ sei ferner eine Curve, stetig von $\begin{matrix} x = x_0 \\ y = y_0 \end{matrix}$ bis $\begin{matrix} x = X \\ y = Y \end{matrix}$. Dann hat man

$$F(X+Yi)-F(x_0+y_0 i) = FZ-Fz_0 = \lim \overset{Z}{\underset{z_0}{S}} F'z\Delta z$$

als Grenze der Summen, genommen längs der Curve $y = \chi x$.

Setzt man

$$Fz = fZ-\left[fz+\frac{Z-z}{1}f'z+\frac{(Z-z)^2}{1.2}f''z+\cdots+\frac{(Z-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}z\right]$$

in die vorhergehende Formel, so findet man den Satz von Taylor oder vielmehr von Cauchy:

$$FZ = fz_0+\frac{Z-z_0}{1}f'z_0+\frac{(Z-z_0)^2}{1.2}f''z_0+\cdots+\frac{(Z-z_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{n-1}z_0+R_n,$$

$$R_n = \int_{z_0}^{Z} \frac{(Z-z)^{n-1}f^n(z)dz}{1.2\ldots(n-1)}.$$

Aus dieser Form für den Rest kann man die von Darboux (Liouville J. (3) II. 291-294) und Falk (Mém. de Ups. 1877) herleiten. Dies kann auch direct geschehen, indem man sich auf den Satz von Rolle in der Weise stützt, dass das letzte Princip genügt, um die Theorie aller elementaren Functionen aufzustellen.

Mn. (O.)

E. McClintock. On certain expansion theorems. Sylv, Am. J. IV. 16-25.

An die Spitze des Aufsatzes wird folgendes Theorem gestellt: Sind fy und φy zwei nach Potenzen von y entwickelbare

Functionen, von denen die letztere für $y = 0$ nicht verschwindet, und wird eine neue Veränderliche x durch die Gleichung $y = x\varphi y$ eingeführt, so lässt sich fy in folgender Weise als Potenzreihe von x darstellen:

$$fy = [fy]_{y=0} + \frac{x}{1}[\varphi y . f'y]_{y=0} + \frac{x^2}{2!}\left[\frac{d}{dy}\{(\varphi y)^2 . f'y\}\right]_{y=0} + \cdots$$
$$+ \frac{x^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\{(\varphi y)^n . f'y\}\right]_{y=0} + \cdots.$$

Der Beweis ergiebt sich in höchst einfacher Weise, indem

$$fy = a_0 + \frac{a_1}{1}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \cdots$$

angesetzt und darauf die leicht zu beweisende Identität:

$$\left[\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left\{(\varphi y)^n \cdot \frac{d(x^m)}{dy}\right\}\right]_{y=0} = \frac{0}{n!}, \text{ jenachdem } m \gtreqless n,$$

angewendet wird. Diese Formel bildet ein Mittelglied zwischen der Lagrange'schen Umkehrungsformel und den Bürmann'schen Reihen. Der Verfasser hält sie aber für weit fundamentaler, weil ihre Form und ihr Beweis ungleich einfacher ist als bei diesen. Allerdings hat Lagrange selbst einen speciellen Fall seiner Formel hervorgehoben, der im wesentlichen mit dieser Formel übereinstimmt; jedoch tritt dieselbe bei ihm, wie der Verfasser bemerkt, weder in der obigen einfachen Form auf, noch bemerkt Lagrange, dass sie mit den einfachsten Mitteln, wie oben gezeigt, bewiesen werden kann.

Um den fundamentalen Character seiner Formel hervortreten zu lassen, zeigt der Verfasser zunächst, wie man aus ihr sofort das Lagrange'sche und die Bürmann'schen Theoreme ableiten kann, das erstere

$$F(u) = F(z) + \frac{x}{1} \cdot \psi z . F'z + \frac{x^2}{1.2}\frac{d}{dz}\{(\psi z)^2 F'z\}$$
$$+ \frac{x^3}{3!}\frac{d^2}{dz^2}\{(\psi z)^3 F'z\} + \cdots$$

durch die Einführung zweier Variabeln u, z an Stelle von y durch die Gleichung $y = u - z$ und Bürmann's erstes Theorem (der Verfasser unterscheidet deren drei):

$$F(t) = [F(t)]_{y=0} + x\left[\frac{y}{x}\,\frac{df(t)}{dy}\right]_{y=0} + \cdots$$

für $y = x\varphi y$, indem x als Function einer anderen Variablen t aufgefasst wird. Sodann zeigt er, in wie leichter Weise andere Zusätze aus ihm hergeleitet werden können, die gewöhnlich mit Hülfe jener Theoreme gewonnen werden, nämlich das Laplace'sche Theorem:

$$Fv = F\psi z + x . \chi\psi z\,\frac{df\psi z}{dz} + \cdots$$

für $v = \psi(z + x\chi v)$, indem man

$$v = \psi(z+y),\ \varphi y = \chi v = \chi\psi(z+y) \text{ und } fy = Fv$$

setzt, und das zweite Bürmann'sche Theorem, das die explicite Entwickelung einer Function Fu nach einer anderen ψu giebt:

$$Fu = [Fu]_{u=a} + \frac{\psi u}{1}\cdot\left[\frac{u-a}{\psi u}\cdot F'u\right]_{u=a}$$
$$+ \frac{(\psi u)^2}{1.2}\left[\frac{d}{du}\left\{\left(\frac{u-a}{\psi u}\right)^2 F'u\right\}\right]_{u=a} + \frac{(\psi u)^3}{1.2.3}\left[\frac{d^2}{du^2}\left\{\left(\frac{u-a}{\psi u}\right)^3 f'u\right\}\right]_{u=a} + \cdots$$

für $\psi a = 0$, indem man

$$y = u - a,\ fy = Fu,\ x = \frac{u-a}{\varphi(u-a)} = \psi u$$

setzt, und endlich ein von Wronski angegebenes Entwickelungstheorem, das von Cayley (Quart. J. XII. p. 221) behandelt worden ist.

Im II. Abschnitt leitet der Verfasser nach einer Kritik der Brauchbarkeit der Bürmann'schen Formeln folgende Regel zur Entwickelung einer Function nach einer anderen, die allgemeiner und daher brauchbarer ist, als das zweite Theorem von Bürmann, aus seiner Fundamentalformel her: Um Fu nach Potenzen von fu zu entwickeln, bestimme man eine Function ψu so, dass fu durch $\psi^{-1}u - a$ teilbar wird, dann ist

$$Fu = F\psi a + \frac{u}{1}\cdot\left[\frac{y-a}{f\psi y}\cdot\frac{dF\psi y}{dy}\right]_{y=a}$$
$$+ \frac{(fu)^2}{1.2}\left[\frac{d}{dy}\left\{\left(\frac{y-a}{f\psi y}\right)^2\frac{dF\psi y}{dy}\right\}\right]_{y=a} + \cdots;$$

ist z. B. $fu = u^6 - au^2$, so setze man $\psi u = u^{\frac{1}{4}}$.

Abschnitt III. enthält eine Anwendung der Fundamental-

formel auf das Problem der Umkehrung der Reihe:

$$x = y + ay^2 + by^3 + \cdots;$$

das erhaltene Resultat ist dasselbe, was gewöhnlich aus der Lagrange'schen Formel gewonnen wird. Hieran knüpft der Verfasser eine Bemerkung zu dem Zwecke, die hierbei notwendige, sehr mühsame Coefficientenbestimmung etwas zu vereinfachen, indem er dieselbe reducirt auf die bei Umkehrung der Reihe

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \alpha y + \beta y^2 + \cdots$$

erforderliche, bei welcher sie sich einfacher stellt. Im IV. Abschnitt endlich weist der Verfasser darauf hin, dass man mit den zum Beweise seines Satzes verwendeten Hilfsmitteln das Lagrange'sche und das Laplace'sche Theorem direct herleiten kann, und führt dies für das letztere näher aus. T.

J. C. Glashan. Simple and uniform method of obtaining Taylor's, Cayley's and Lagrange's series.
Sylv., Am. J. IV. 277-281.

Im I. Bande derselben Zeitschrift p. 287f. (cf. F. d. M. X. 1878. p. 180f.) hat der Verfasser das Taylor'sche Theorem und eine Verallgemeinerung desselben abgeleitet, die er für neu gehalten hatte, welche aber, wie er inzwischen bemerkt hat, schon vor längerer Zeit von Cayley (Quart. J.) gegeben worden ist. Er setzt in dieser Abhandlung die zur Ableitung benutzte Methode nochmals ausführlicher und ohne Anwendung symbolischer Bezeichnungen auseinander. Sie besteht im Wesentlichen auf der wiederholten Anwendung der identischen Relation:

$$\int_0^a \frac{df(x+a)}{da}\, da = f(x+a) - f(x) = \int_0^a f'(x+a)\, da.$$

Dieselbe Methode wird dann auch angewendet zum Beweise der Lagrange'schen Umkehrungsformel, und daran die Bemerkung geknüpft, dass dieselbe, ebenso wie die Taylor'sche Reihe, auch durch teilweise Integration erhalten werden kann, wobei der Rest

in der Form eines bestimmten Integrals auftritt, die leicht auf die von Zolotareff gegebene (cf. F. d. M. VIII. 1876. p. 135.) reducirt werden kann. T.

F. G. Teixeira. Sur le développement des fonctions implicites en une série. Résal J. (3) VII. 277-283.

Die Lagrange'sche Umkehrungsformel liefert die Entwickelung einer Function $u = f(y)$ in eine Potenzreihe von x, wenn y durch eine Relation $y = t + x\varphi(y)$ mit x verknüpft ist. Der Verfasser stellt sich die Aufgabe, diese Formel zu verallgemeinern, indem er die zwischen x und y bestehende Gleichung in der Form

$$y = t + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + \cdots + x^n\varphi_n(y)$$

annimmt. Durch ein Inductionsverfahren wird ein Ausdruck für $\frac{d^iu}{dx^i}$ bei beliebigem i gewonnen, wodurch das Problem mit Hülfe der Maclaurin'schen Formel sofort gelöst wird. Das Resultat lautet:

$$u = f(t) + \frac{x}{1} f'(t).\varphi_1(t) + \frac{x^2}{2!}\left[\frac{d}{dt}\{f'(t).\varphi_1(t)^2\} + 2f'(t).\varphi_2(t)\right] + \cdots$$
$$+ x^i \Sigma \frac{1}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!} \frac{d^b}{dt^b}\{f'(t).\varphi_1(t)^\alpha.\varphi_2(t)^\beta \ldots \varphi_n(t)^\lambda\} + \cdots,$$

worin die Summe über alle ganzzahligen positiven Werte $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ zu erstrecken ist, welche der Gleichung

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \cdots + n\lambda = i$$

genügen, und wo

$$b = -1 + \alpha + \beta + \cdots + \lambda$$

ist. T.

G. Halphén. Sur une série d'Abel. C. R. XCIII. 1003-1005.

Es handelt sich um Aufstellung der Bedingungen, unter denen die Abel'sche Reihe

$$f(x) = f(0) + xf'(\beta) + \frac{x(x-2\beta)}{2!} f''(2\beta) + \cdots$$
$$+ \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(n\beta) + \cdots$$

(Oeuvres d'Abel, nouv. éd. II. p. 73) giltig ist. Damit dies der Fall sei, ist, wie ohne Beweis mitgeteilt wird, notwendig und hinreichend, dass es Grössen α giebt, für welche $\lim_{n=\infty} \alpha^n f^n(x)$ endlich ist. Dann wird $f(x)$ durch die Reihe stets dargestellt, wenn der Modul von $\beta < ua$ ist, wo a der grösste der Moduln der Grössen α, und u die positive Wurzel der Gleichung $ue^{1+u} = 1$ ist. Diese letztere Bedingung ist aber keine stets notwendige; die Punkte, welche diejenigen Werte repräsentiren, für welche die obige Darstellung gültig ist, bilden vielmehr das Innere einer gewissen Curve, deren Gestalt von $f(x)$ abhängt, und welche jedenfalls den Kreis mit dem Radius ua ganz in sich enthält.

Daran schliesst der Verfasser einige interessante specielle Fälle, darunter namentlich solche, in denen die Reihe in grösseren Bereichen convergirt, als sie die Function $f(x)$ darstellt.

T.

F. C. Lukas. Ueber neuere Formen von höheren Reihen. Hoppe Arch. LXVII. 327-330.

Bildet man aus einer Reihe von Zahlen $a_0\ a_1\ a_2 \dots$ ebenso, wie gewöhnlich durch Subtraction der auf einander folgenden Glieder, durch Addition einerseits und Division und Multiplication derselben andererseits successive neue Reihen, so ergeben sich für das allgemeine Glied a_n in allen diesen Fällen Formeln, ganz analog derjenigen, welche das allgemeine Glied einer höheren arithmetischen Reihe durch die Anfangsglieder der ursprünglichen Reihe, der Reihe der ersten, zweiten, ... Differenzen ausdrücken lehrt. Anwendungen, aus denen die Nützlichkeit dieser Formeln ersichtlich würde, werden nicht gegeben. T.

C. Jordan. Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples. S. M. F. Bull. IX. 113-115.

Es wird der Beweis des von Eisenstein (Crelle J. XXXV.) aufgestellten Satzes vereinfacht und verallgemeinert: Die Reihe

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\nu_1^2+\nu_2^2+\cdots+\nu_n^2)^\mu},$$

die Summationen auf alle ganzzahligen Werte $x_1 \dots x_n$ bezogen, von denen $\nu_1 \dots \nu_n$ lineare Functionen sind, convergirt oder divergirt, je nachdem $2\mu > n$ oder $2\mu \leqq n$ ist, vorausgesetzt, dass die Determinante der Functionen $\nu_1 \dots \nu_n$ nicht verschwindet.

T.

J. Boussinesq. Coup d'oeil sur la théorie des séries trigonométriques les plus usuelles, et sur une raison naturelle de leur convergence, applicable aux autres développements de fonctions arbitraires employés en physique mathématique. Résal J. (3) VII. 147-161.

Den ersten Teil der Abhandlung bildet ein nur knapp ausgeführter Beweis für die Entwickelbarkeit einer Function in eine Fourier'sche Reihe, der von dem Dirichlet'schen sich insofern unterscheidet, als sich die vorausgeschickte Hülfsbetrachtung auf das Integral

$$\frac{1}{a}\int_{x-a}^{x+a}\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\,du$$

und nicht auf

$$\frac{1}{a}\int_{x-a}^{x+a}\frac{1}{2\sin\frac{\pi u}{2a}}.\sin\frac{(2n+1)\pi u}{2a}\,du$$

bezieht. Daran schliesst sich die Behandlung specieller Fälle. Im zweiten Teil sucht der Verfasser aus allgemeinen physikalischen Gründen die Convergenz dieser und anderer in der mathematischen Physik auftretenden Reihenentwickelungen a priori plausibel zu machen.

T.

A. Harnack. Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihen, nebst Berichtigung. Klein Ann. IX. 235-279, 524-528.

Der hier vorgetragene Beweis des Satzes, dass jede trigono-

metrische Reihe, die eine integrirbare Function definirt, eine Fourier'sche Reihe sei, beruht zum Teil auf einem (wie der Herr Verfasser nachträglich selbst bemerkt) bisher nicht allgemein erwiesenen Satze, der als solcher auch vom Referenten im vorigen Bande des Jahrbuches p. 176 bezeichnet worden ist. Demnach wird in das vorstehende Theorem noch die Voraussetzung aufzunehmen sein, dass die Reihe

$$(1) \qquad \sum_{0}^{\infty} {}^{n} (a_n \sin nx + b_n \cos nx) = F(x)$$

für alle Werte des Intervalles $(-\pi, +\pi)$ mit Ausnahme einer discreten Menge derselben convergire und dass für $\lim. n = +\infty$,

$$\lim. a_n = \lim. b_n = 0$$

seien. Dieser Satz nun wird mit Hülfe von 14 Lehrsätzen abgeleitet, von denen einige einen wesentlichen Fortschritt der Theorie der Functionen von reellen Veränderlichen bilden. Das gilt u. A. von dem 5. Satze: „Wenn sich bei einer im Intervalle (a, b) stetigen Function $f(x)$ wenigstens in den Stellen x' einer in allen Teilen dieses Intervalles überall dichten Menge eine obere Grenze $\Delta x'$ bestimmen lässt, so dass

$$\left| \frac{F(x'+\xi)-F(x')}{\xi} \right| < \delta \quad \text{für } 0<\xi<\Delta x',$$

wo δ eine beliebige positive Zahl bedeutet, so ist $f(x)$ in dem ganzen Intervalle constant.“ Bisher nämlich war der Satz nur bewiesen in dem Falle, dass die Punkte x' eine Menge erster Gattung bilden. Auch der Gebrauch von discreten Mengen (d. i. solcher Systeme von Werten im Intervalle (a, b), deren Gesammtheit eingeschlossen werden kann in Intervalle, deren Summe kleiner ist als eine beliebige positive Zahl δ) an Stelle der Punktmengen erster Gattung, erscheint, als eine treffende Verallgemeinerung. Eine endliche Function ist integrirbar, wenn diejenigen Stellen, in denen der Unterschied der Unbestimmtheitsgrenzen eine beliebige positive Zahl δ überschreitet, eine discrete Menge ausmachen. Das Integral einer solchen Function ist vollkommen bestimmt, wenn sie bis auf discrete Punkte definirt ist. So wird auch der Eingangs erwähnte Satz einen ganz befriedigenden Umfang erhalten haben. Es scheint jedoch die

Beweisführung des Herrn Verfassers in dem wichtigsten der Hilfssätze, dem 13ten, noch Einwendungen zuzulassen. Derselbe, welcher die hier nötige Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Schwarz (Borchardt J. LXXII. p. 141) ausspricht, ist gegründet auf die folgende Definition des bestimmten Integrales einer Function $F(x)$, bei welcher die Stellen, in deren jeder Umgebung mindestens eine der Grenzen von $F(x)$ (die obere oder die untere) unendlich ist, eine discrete Menge bilden. Unter $\int_a^x F(x)\,dx$ sei verstanden diejenige stetige Function, deren Ableitung im Allgemeinen, d. h. nach Ausschluss discreter Punkte von dem Werte $F(x)$ um weniger als eine beliebig kleine Zahl δ unterschieden ist; vorausgesetzt, dass eine solche Function existirt. Dieser neue Begriff, der seiner Natur nach doch auch für endliche Functionen $F(x)$ passen sollte, scheint aber allgemeiner zu sein, als das Riemann'sche Integral einer solchen Function; wenigstens ist bis jetzt nicht gezeigt, dass die Ableitung einer stetigen Function auch integrirbar sein müsse. (Vgl. Dini, Fondamenti p. 283). In der Tat würde die angestrebte Verallgemeinerung auch in anderer Weise möglich sein.

Es ergiebt sich weiter, dass die Reihe (1) an einer Stelle, wo $\frac{1}{2}\{F(x+\xi)+F(x-\xi)\}$ für $\lim.\xi = 0$ einen endlichen Grenzwert hat, immer nach diesem Werte convergirt.

Die Beweise der übrigen Sätze stützen sich auf den zurückgezogenen Satz, so dass sie für den denselben beigelegten Umfang nicht mehr ausreichen; wenn nicht die Sätze selbst eine Einschränkung erfahren müssen, wie im Nachtrage näher ausgeführt wird. Dort wird auch der Cantor'sche Beweis des fundamentalen Satzes über die Coefficienten der Reihe (1) (vergl. F. d. M. IV. p. 105) in neuer Form wiedergegeben. St.

C. Jordan. Sur la série de Fourier. C. R. XCII. 228-230.

Herr Jordan teilt folgenden Satz mit: „Es seien $x_1 x_2 \dots x_n$ eine Reihe von Werten des x im Intervalle $(0, \varepsilon)$, $y_1 y_2 \dots y_n$ die

entsprechenden Werte einer (eindeutigen und endlichen) Function $F(x)$. Die Punkte $x_1, y_1, \dots x_n, y_n$ bilden ein Polygon. Die Summe der positiven Glieder der Reihe

$$y_2 - y_1,\ y_3 - y_2 \dots y_n - y_{n-1}$$

heisse die positive Schwankung des Polygones, die Summe ihrer negativen Glieder die negative Schwankung; die Summe der absoluten Werte beider Zahlen die vollständige Schwankung. Aendert man das Polygon ab, so können folgende Fälle eintreten: 1) Es kann so gewählt werden, dass seine Schwankungen jede Grenze übersteigen; 2) wie auch das Polygon gewählt werden mag, seine positive und negative Schwankung können gewisse feste Grenzen $P_\varepsilon, N_\varepsilon$ nicht überschreiten. In letzterem Falle soll $F(x)$ eine Function mit endlicher Schwankung im Intervalle $(0, \varepsilon)$ heissen; P_ε ihre positive, N_ε ihre negative, $P_\varepsilon + N_\varepsilon$ ihre vollständige Schwankung."

Dieses vorausgesetzt, folgt unmittelbar für alle Werte von x im Intervalle $(0, \varepsilon)$

$$F(x) = F(0) + P_x - N_x,$$

so dass $F(x)$ als Differenz zweier Functionen erscheint, die im genannten Intervalle nicht abnehmen. Ist ferner $F(x)$ im Intervalle $(-\pi, +\pi)$ endlich und integrabel, so kann man nun nach Dirichlet's Vorgang schliessen, dass die Fourier'sche Reihe für jeden Wert von x, in dessen Umgebung die Schwankungen endlich sind, die Summe $\frac{1}{2}[F(x-0)+F(x+0)]$ hat.

St.

E. W. Hobson. On Fourier's theorems. Mess. (2) XI. 11-14.

Die Grenze des Integrals

$$\int_0^\pi \frac{1-h^2}{1-2h\cos(\theta-\theta')+h^2} f(\theta)\,d\theta$$

wird für $h = 0$ geometrisch ermittelt und der Fourier'sche Satz daraus hergeleitet. Die Methode wird auf den Raum erweitert und dadurch ein Beweis des Satzes über die Entwickelung einer Function in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe erhalten.

Glr. (O.).

Capitel 2.

Besondere Reihen.

D. MARCHAND. Correspondance. Nouv. Ann. (2) XX. 140-142.

Herleitung der Formel

$$\Sigma n^5 = \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{2(n-1)(n)(n+1)(n+2)}{24}\right].$$

O.

C. W. MERRIFIELD. The sums of the series of reciprocals of the prime numbers and of their powers. Lond., R. S. Proc. XXXIII. 4-10.

Die in der vorliegenden Arbeit gegebenen Resultate sind: 1) Tabelle der Summe der Potenzen der Reciproken der natürlichen Zahlen $\sum^{x=\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$ $(n = 1$ bis $35)$ auf 16 Decimalstellen von Legendre. 2) Tafel der Napier'schen Logarithmen der in der vorhergehenden Tafel gegebenen Zahlen auf 15 Stellen. 3) Tafel der Summe der Potenzen der Reciproken der Primzahlen $\Sigma(x)^{-n}$ (x Primzahl von 2 bis ∞) von $n = 1$ bis $n = 35$ auf 15 Decimalstellen. Für den Fall $n = 1$ erhält der Verfasser

$$\Sigma_1 = \log(\log x) - 0{,}31571\,84520\,73890 \; (x = \infty),$$

wo sich die Constante 0,3157 ... wie es scheint, nicht leicht mit einer Function einer bekannten Constante identificiren lässt. Sie scheint namentlich nicht mit der Euler'schen Constante 0,57721 ... in Zusammenhang zu stehen. Cly. (O.).

P. v. SCHÄWEN. Die Binomialcoefficienten in Verbindung mit figurirten Zahlen und arithmetischen Reihen höherer Ordnung. Pr. Saarbrücken.

Herleitung einer sehr grossen Anzahl von Formeln, die hier nur dahin characterisirt werden können, dass sie zur Summirung von endlichen Reihen dienen, deren einzelne Glieder Producte

von Binomial-Coefficienten derselben Potenz in figurirte Zahlen derselben Ordnung oder in die Glieder einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung sind. T.

Ch. Henry. Étude sur le triangle harmonique.

Darb. Bull. (2) V. 96-113.

Nach Analogie des Pascal'schen arithmetischen Dreiecks nannte Leibniz (1672) ein aus der harmonischen Zahlenreihe und ihren successiven Differenzen (die mit den reciproken Werten der figurirten Zahlen bis auf constante Factoren identisch sind) gebildetes Dreieck, das in drei verschiedenen Formen aufgestellt werden kann, ein harmonisches Dreieck. Nach einer historischen Einleitung, in welcher auf die wichtige Rolle hingewiesen wird, die dasselbe bei der Erfindung der Differentialrechnung gespielt hat, giebt der Aufsatz eine Zusammenstellung von Eigenschaften der Elemente des Dreiecks und die sich daran knüpfenden Summationen von aus reciproken Potenzen und Producten der Zahlen der natürlichen Reihe gebildeten unendlichen Reihen. Ferner wird der Zusammenhang mit dem arithmetischen Dreieck erörtert und eine Verallgemeinerung des harmonischen Dreiecks gegeben, an welche sich Summationen von Reihen knüpfen, von denen die Reihen, die Stirling in seinem „Methodus differentialis sive Tractatus etc." gegeben hat, specielle Fälle sind, und die mit den Γ-Functionen in Zusammenhang stehen. T.

O. Schlömilch. Notiz über die bedingt convergirenden Reihen.

Hoffmann Z. XII. 30-32.

Kommt es nur darauf an, die *Verschiedenheit* der Summen von bedingt convergirenden Reihen je nach der Anordnung ihrer Glieder nachzuweisen, so zeigt der Verfasser an dem Beispiele der Reihen

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots \text{ und } \frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots,$$

wie dies auf ganz elementarem Wege durch Zusammenfassung

je einer bestimmten Anzahl von Gliedern geschehen kann, und verweist bezüglich der Quelle dieses Beweisverfahrens auf einen Satz seines Uebungsbuches zum Studium der höheren Analysis 2. Aufl. B. II. S. 178. T.

J. Franklin. Sur le développement du produit infini $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$ C. R. XCII. 448-450.

Um dieses Product nach Potenzen von x zu entwickeln, bedient sich der Verfasser folgenden Verfahrens. Ausgehend von der Bemerkung, dass der Coefficient von x^w offenbar der Ueberschuss der Anzahl der Zerlegungen von w in eine grade Zahl verschiedener ganzzahliger Teile über die Anzahl der Zerlegungen in eine ungrade Zahl solcher Teile ist, greift er zunächst diejenigen Zerlegungen (diese stets nach wachsender Grösse der Teile geordnet gedacht) einer beliebigen Zahl a heraus, die mit 1 beginnen und aus r Teilen bestehen. Aus diesen erhält man, wenn man die Eins fortlässt und dafür den letzten Teil um eine Einheit erhöht, eben so viel neue Zerlegungen von a, die aus je $r-1$ Teilen bestehen, mit 2 oder einer grösseren Zahl beginnen und mit keinen zwei aufeinander folgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe schliessen; und umgekehrt. Diese Zerlegungen können demnach bei der Ermittelung des obigen Ueberschusses fortgelassen werden. Somit bleiben nur diejenigen Zerlegungen zu betrachten übrig, die mit 2 oder einer grösseren Zahl beginnen und mit zwei um eine Einheit verschiedenen Zahlen endigen; auf diese lässt sich dann weiter ein ähnliches Verfahren anwenden u. s. w. Ueberhaupt lassen sich die Zerlegungen einer Zahl a in Paare conjugirter in folgender Weise anordnen: Man zerlege eine beliebige Zahl a auf beliebige Weise in von einander verschiedene Summanden und ordne diese nach wachsender Grösse. Es sei r der erste Summand und n die Anzahl der letzten Summanden, die je um eine Einheit von einander verschieden sind. Ist dann $r \leqq n$, so lasse man r fort und erhöhe die r letzten Zahlen um je eine Einheit, ist dagegen $r > n$, so kehre man dies Verfahren genau um. Man erhält keine conjugirte zu einer Zer-

legung dann und nur dann, wenn sämmtliche auf einander folgende Summanden je um eine Einheit von einander verschieden sind und $r = n$ oder $r = n+1$ ist. Da conjugirte Zerlegungen bei der Bestimmung des obigen Ueberschusses irrelevant sind, indem die eine stets eine grade, die andere eine ungrade Zahl von Gliedern enthält, so ergiebt sich hieraus sofort die von Euler auf anderem Wege (Introductio) hergeleitete Entwickelung:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{n(3n\pm1)}{2}}.$$

T.

K. Weihrauch. Eine Polynomenentwickelung. Schlömilch Z. XXVI. 127-132.

Es handelt sich um die Entwickelung von

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n$$

nach Potenzen von x für ganzzahlige positive Werte von m und n. Das Resultat ist $\sum\limits_{\varkappa=0}^{n(m-1)} a_\varkappa x^\varkappa$, wo $a_\varkappa$ durch die von selbst abbrechende Summe

$$\sum_{i=0}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n-1+\varkappa-mi}{n-1}$$

dargestellt wird, welche Darstellung auf zwei ganz verschiedenen Wegen abgeleitet wird, einmal unter Anwendung des binomischen Satzes, dann mit Hilfe der Bemerkung, dass $a_\varkappa$ gleichzeitig die Lösungszahl für die unbestimmte Gleichung

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \varkappa \qquad (0 \leqq y_i < m)$$

bedeutet. Als Anwendung wird die Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelöst: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit w, mit n Würfeln $\varkappa$ Augen zu werfen? Resultat:

$$w = \frac{a_{\varkappa-n}}{6^n} \qquad (m = 6).$$

T.

Kayser. Ableitung einiger Reihen zum Gebrauch für den Unterricht in der Prima eines Gymnasiums.
Pr. Erfurt.

Die Ableitung geschieht meistenteils mit Hilfe der Methode der unbestimmten Coefficienten. Die Anwendung der Reihen auf den Fall complexer Variabeln hätte weiterer Erörterungen bedurft. T.

Chr. Zeller. De numeris Bernoullii eorumque compositione ex numeris integris et reciprocis primis.
Darb. Bull. (2) V. 195-215.

Zweck der Abhandlung ist, zu zeigen, wie sich die Bernoulli'schen Zahlen aus den Differenzen der Potenzen der natürlichen Zahlen und den reciproken Werten der Binomialcoefficienten oder aus derartigen Differenzen und den reciproken natürlichen Zahlen zusammensetzen. Es wird ausgegangen von der einfachen, besonders bei der Summation von arithmetischen Reihen beliebiger Ordnung verwendbaren Identität:

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\cdots+\varkappa k+\lambda l=\alpha(a-b)+(\alpha+\beta)(b-c)$$
$$+(\alpha+\beta+\gamma)(c-d)+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(d-e)$$
$$+\cdots+(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varkappa)(k-l)+(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda)l.$$

Setzt man hierin

$$a=n^m,\ b=n^{m-1},\ldots;\ \alpha=1,\ \beta=1\ldots$$

und wendet diese Formel $(m+1)$-mal hintereinander an, so reducirt sich die Summe

$$S(n^m)=n^m+(n-1)^m+\cdots+3^m+2^m+1^m$$

auf eine solche von nur m Gliedern, nämlich:

$$(1)\quad S(n^m)=\binom{n+1}{m+1}b_{m,1}+\binom{n+2}{m+1}b_{m,2}+\cdots+\binom{n+m}{m+1}b_{m,m}.$$

Hierin bedeuten $b_{m,1}, b_{m,2}, \ldots, b_{m,m}$ die m letzten Glieder (die einzigen nicht verschwindenden) der $(m+1)^{\text{ten}}$ Differenzenreihe der m^{ten} Potenzen von $n, n-1, \ldots 2, 1$. Die Construction einer Tafel für diese Grössen wird wesentlich erleichtert durch Berücksichtigung der Recursionsformel

$$(\alpha) \qquad b_{m,i} = ib_{m-1,i} + (m+1-i)\,b_{m-1,i-1}.$$

Explicite ist

$$b_{m,i} = i^m - \binom{m+1}{1}(i-1)^m + \binom{m+1}{2}(i-2)^m + \cdots;$$

ausserdem ist

$$b_{m,i} = b_{m,m+1-i}.$$

Andererseits ist nach der bekannten Summationsformel für die arithmetischen Reihen höherer Ordnung

$$(2) \qquad S(n^m) = \binom{n}{1}a_{m,1} + \binom{n}{2}a_{m,2} + \binom{n}{3}a_{m,3} + \cdots$$
$$+ \binom{n}{m}a_{m,m} + \binom{n}{m+1}a_{m,m+1},$$

unter $a_{m,1}, \ldots, a_{m,m}$ die ersten Glieder der successiven Differenzenreihen der Reihe $1^m, 2^m, 3^m, \ldots$ verstanden. Auch für die Grössen a wird die Construction einer Tafel bedeutend vereinfacht durch die Relation

$$(\beta) \qquad a_{m,i} = ia_{m-1,i} + (i-1)a_{m-1,i-1}.$$

Definirt man nun die Zahl B_m als Coefficienten von n^1 in der Entwickelung von $S(n^m)$, so ergiebt sich aus (1):

$$(m+1)B_m = b_{m,1} - \frac{1}{\binom{m}{1}}\, b_{m,2} + \frac{1}{\binom{m}{2}}\, b_{m,3} \mp \cdots$$
$$+ (-1)^m \frac{1}{\binom{m}{m}}\, b_{m,m},$$

woraus schon hervorgeht, dass B_m im Nenner keinen Primfactor enthält, der grösser als $m+1$, oder noch einfacher mit Hilfe von (α)

$$(m+1)B_m = \frac{1}{\binom{m}{1}}\, b_{m-1,1} - \frac{2}{\binom{m}{2}}\, b_{m-1,2} + \frac{1}{\binom{m}{3}}\, b_{m-1,3} \mp \cdots$$
$$\cdots + \frac{(-1)^m}{\binom{m}{m-1}} b_{m-1,m-1},$$

woraus hervorgeht, dass $B_{2n+1} = 0$ ist, während $B_{2n} = \mathfrak{B}_n$ die n^{te} Bernoulli'sche Zahl ist. Aus (2) dagegen ergeben sich For-

meln, die als Coefficienten einfach die reciproken Werte der natürlichen Zahlen enthalten, nämlich:

$$B_m = \frac{1}{1} a_{m,1} - \frac{1}{2} a_{m,2} + \frac{1}{3} a_{m,3} \mp \cdots + \frac{(-1)^m}{m+1} a_{m,m+1}$$

und mittels (β)

$$(3) \qquad B_m = \frac{1}{2} a_{m-1,1} - \frac{1}{3} a_{m-1,2} + \frac{1}{4} a_{m-1,3} \pm \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} a_{m-1,m}.$$

Wegen $B_{2n+1} = 0$ ergiebt sich hieraus auch:

$$\mathfrak{B}_n = -\frac{1}{1.2} a_{2n-1,1} + \frac{1}{2.3} a_{2n-1,2} \mp \cdots$$

und

$$= \frac{1}{1.2} a_{2n,1} - \frac{1}{2.3} a_{2n,2} \pm \cdots.$$

Andere Darstellungen für B_m werden dadurch gewonnen, dass man die b resp. a durch die m^{ten} oder durch die $(m-1)^{\text{ten}}$ Potenzen der natürlichen Zahlenreihe, wie es geschehen kann, ausdrückt.

Schliesslich geht der Verfasser auf die Frage ein, ob die Glieder der für die Bernoulli'schen Zahlen gewonnenen Entwickelung (3) ganz oder gebrochen sind, um auf diesem Wege zu dem v. Staudt-Clausen'schen Theorem zu gelangen. Dazu geht er von folgender Form der Grössen a aus:

$$n^x - \binom{n-1}{1}(n-1)^x + \binom{n-1}{2}(n-2)^x + \cdots$$

und beweist, dass dieser Ausdruck, mit Ausnahme des Falles $n = 4$, durch n ohne Rest teilbar ist, wenn nicht n eine Primzahl ist, die, um Eins vermindert, ein Teiler des Exponenten x ist, in welchem Falle hingegen die Division durch n den Rest -1 lässt.

In dem an Herrn Hermite gerichteten Begleitschreiben zu der Abhandlung teilt der Verfasser noch als Ergebnis seiner fortgesetzten Untersuchungen mit: Bedeutet Δ die durch die Relation

$$\Delta \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} - \frac{p(x)}{q(x+1) - q(x)}$$

definirte Operation, und bildet man nun successive:

$$K_1 = \frac{1}{x+1}, \; K_2 = x\Delta K_1, \;\; K_3 = x\Delta K_2, \ldots,$$

so ist

$$[K_i]_{x=1} = B_i.$$

T.

F. J. van den Berg. Over periodieke terugloopende betrekkingen tusschen de Coefficienten in de ontwikkeling van functien, meer in het byzonder tusschen de Bernoulliaansche en ook tusschen eenige daarmede verwante Coefficienten. Amst. Versl. en Meded. XVI. 74-176, Arch. Néerl. XVI. 387-443.

Dieser Aufsatz behandelt periodisch recurrente Beziehungen zwischen den Coefficienten, die bei der Entwickelung der Functionen auftreten, und insbesondere zwischen den Bernoulli'schen und einigen damit verwandten Functionen. In erster Linie haben die Entwickelungen Bezug auf die Functionen, welche die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ enthalten. Dann geht der Verfasser auf die Bernoulli'schen Zahlen über und giebt verschiedene Arten an, um diese zu berechnen. Die Berechnung wird ausgeführt von $n = 1$ bis $n = 6$, und die Resultate in Tabellen zusammengestellt.

Weiter wird dieselbe Methode angewendet auf die Entwickelung von damit verwandten Coefficienten, wie die Euler'schen, und schliesslich eine reiche Literatur über diesen Gegenstand mitgeteilt. G.

J. M. Rodrigues. Sobre una formula d'Euler. Teixeira J. III. 157-176 (Portugiesisch.).

Herr Rodrigues beschäftigt sich in der vorliegenden Arbeit mit der Transformation der Euler'schen Reihe

$$E = \frac{1}{2}\varphi(x) - B_1\varphi'(x)\frac{h^2}{2!} + B_2\varphi''(x)\frac{h^4}{4!} + \cdots$$

($B_1, B_2, \ldots$ Bernoulli'sche Zahlen) in ein bestimmtes Integral. Er wendet ferner die Euler'sche Formel

$$\int \varphi(x)\,dx = \Sigma\varphi(x) + E$$

an zur Untersuchung einiger Integrale und der Eigenschaften des Euler'schen Integrals $\Gamma(x+1)$. Tx. (O.)

MORET-BLANC. Questions nouvelles d'arithmétique supérieure proposées par M. Edouard Lucas. Nouv. Ann. (2) XX. 253-265.

Lösung folgender Aufgaben: 1) Die Endziffern der Glieder der durch

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,\ u_0 = 0,\ u_1 = 1$$

definirten Reihe zu bestimmen. Es ergiebt sich eine 60-stellige Periode, in der jede grade Ziffer vierfach, jede ungrade achtfach auftritt. 2) Die bei der Aufsuchung des grössten gemeinsamen Teilers zweier Glieder dieser Reihe erhaltenen Reste als Functionen ihrer Indices darzustellen. 3) Dieselben Aufgaben für die durch

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n\ ,\ u_0 = 0,\ u_1 = 1,$$

und allgemeiner

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,\ u_0 = 0,\ u_1 = 1$$

definirten Reihen, wo a und b relative Primzahlen sind. Für die erstere ergiebt sich eine nur 12-stellige Periode der Endziffern, welche die Ziffern 3, 4, 5, 6 gar nicht, die übrigen jede doppelt enthält. 4) Das allgemeine Glied der letztgenannten Reihe zu finden. Dasselbe heisst:

$$u_n = \frac{b}{\sqrt{\Delta}}\left[\left(\frac{a+\sqrt{\Delta}}{2b}\right)^n - \left(\frac{a-\sqrt{\Delta}}{2b}\right)^n\right], \qquad \text{und für } \Delta = a^2+4b$$

$$u_n = a^{n-1} + \binom{n-2}{1} a^{n-3}b + \binom{n-4}{2} a^{n-5}b^2 + \binom{n-6}{3} a^{n-7}b^3 + \cdots.$$

5) Zu beweisen: Ist p eine Primzahl und

$$u_p = \frac{(a+\sqrt{b})^p - (a-\sqrt{b})^p}{\sqrt{b}},$$

so ist u_{p+1} durch p teilbar, wenn b ein quadratischer Nichtrest von p, und u_{p-1} durch p teilbar (falls nicht a^2-b durch p teilbar ist), wenn b ein quadratischer Rest von p ist. 6) Die Gleichung

$$x^2+(x+1)^2+\cdots+(x+n-1)^2=y^2$$

für

$$n=2,\ 11,\ 23,\ 24$$

aufzulösen. 7) Ohne Benutzung von Primzahltafeln zu zeigen, dass

$$2^{31}-1=2147483647$$

eine Primzahl ist.

Zwei der von Herrn E. Lucas gestellten Aufgaben bleiben ungelöst. T.

J. Tannery. Sur la suite de Schwab. Darb. Bull. (2) V. 454-456.

Für die von Borchardt behandelte Aufgabe: „Es seien a und b zwei positive Zahlen und

$$a_1=\frac{a+b}{2},\ b_1=\sqrt{a_1 b};\quad a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ b_2=\sqrt{a_2 b_1}\ldots;$$

die Grenze der unendlichen Reihe $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ zu bestimmen," wird eine elementare Lösung gegeben, indem

$$\text{für } a<b:\quad a=b\cos\alpha,\qquad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$

$$\text{und für } a>b:\quad a=b\cosh\alpha=b\frac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2},\qquad \alpha>0$$

gesetzt wird. T.

E. Mc Clintock. On the remainder of Laplace's series. Sylv., Am. J. IV. 96.

Der hergeleitete Rest ist ganz analog demjenigen, welchen Popoff und Zolotareff (cf. F. d. M. VIII. 1876. p. 135) für die Lagrange'sche Reihe gegeben haben. T.

F. Tisserand. Sur le développement périodique d'une fonction quelconque des rayons vecteurs de deux planètes. C. R. XCII. 154-157.

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Entwickelung irgend einer Function des Radiusvectors eines Planeten nach den Cosinus der Vielfachen der mittleren Anomalie, welche der Verfasser in den C. R. XCI. p. 897ff. (cf. F. d. M. XII. 1880. p. 195 f.) gegeben hat. Werden durch a, a'; e, e'; φ, φ'; r, r' resp. die grossen Halbaxen, die Excentricitäten, die mittleren Anomalien und die Radienvectoren zweier elliptischer Planetenbahnen bezeichnet, so ergiebt sich für eine beliebige Function f der Radienvectoren $f(r, r') = \sum_{n,n'} A_{n,n'} \cos n\varphi . \cos n'\varphi'$ die Coefficientenbestimmung folgendermassen: Es ist

$$A_{n,n'} = 4.(-1)^{n+n'} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{p'=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}e\right)^{n+2p} \left(\frac{1}{2}e'\right)^{n'+2p'}}{p!\,p'!\,(n+p)!\,(n'+p')!} U,$$

worin

$$U = u.u'(u-n)^{n+p-1}(u'-n')^{n'+p'-1}(u+n)^{p-1}(u'+n')^{p'-1}$$
$$(u+n+2p)(u'+n'+2p')$$

zu nehmen und nach ganzen positiven Potenzen von u und u' zu entwickeln ist und schliesslich $u^i u'^{i'}$ durch $a^i a'^{i'} \frac{d^{i+i'} f(a, a')}{d a^i \, d a'^{i'}}$ zu ersetzen ist.

Hiervon wird dann ebenso, wie in der citirten Abhandlung, Anwendung gemacht auf die Entwickelung der Störungsfunction.

T.

J. Thomae. Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe. Schlömilch Z. XXVI. 314-333.

Der Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, die Theorie der hypergeometrischen Reihe ohne Anwendung der Infinitesimalrechnung zu begründen. Die durchweg angewandte Methode ist die der Auflösung von Recursionsformeln. Zunächst wird die Facultät fac. n durch die Gleichung

$$\text{fac.}(n+1) = (n+1)\,\text{fac.}(n)$$

mit Hinzufügung der Bedingungen

$$\text{fac.}(0) = 1,\ \lim.\ \text{fac.}(n+w):\text{fac.}(w).w^n = 1 \text{ für } w = +\infty$$

definirt und hieraus die Darstellung

$$\frac{1}{\text{fac.}(n)} = e^{nM}(1+n)e^{-n}\left(1+\frac{1}{2}n\right)e^{-\frac{1}{2}n}\left(1+\frac{1}{3}n\right)e^{-\frac{1}{3}n}\dots$$

gewonnen, worin M die Mascheroni'sche Constante bedeutet, und das unendliche Product absolut convergent ist, demnach eine ganze transcendentale Function darstellt. Hieran schliesst sich eine elementare Herleitung des Grenzwertes von fac. n (Stirling'sche Formel). Die hypergeometrische Reihe hat den Ausdruck

$$F(a,b,c,x) = \text{fac.}(c-1):\text{fac.}(a-1).\text{fac.}(b-1)$$
$$.\Sigma\{x^m\,\text{fac.}(a+m-1).\text{fac.}(b+m-1):\text{fac.}m\ \text{fac.}(c+m-1)\}.$$

Mittels der Facultät kann man nun jede zweigliedrige Recursionsformel

$$A\varphi(n+1) = B\varphi(n),$$

wenn A und B ganze Functionen von n sind, vollständig lösen und zwar in zwiefacher Weise; erstens, wie sofort erhellt, in der Productenform:

$$\varphi(n) = \frac{p(n)\,\text{fac.}(n+\beta-1)\dots\text{fac.}(n+\beta^{(\nu)}-1)}{s^n\,\text{fac.}(n+\alpha-1)\dots\text{fac.}(n+\alpha^{(\mu)}-1)},$$

wenn, in Factoren zerlegt,

$$A = s(n+\alpha)\dots(n+\alpha^{(\mu)}),\ B = (n+\beta)\dots(n+\beta^{(\nu)})$$

ist, und $p(n)$ eine willkürliche periodische Function von n bedeutet, und zweitens in einer Facultätenreihe von der Form

$$\varphi(n) = \Sigma a_\mu k^\mu\,\text{fac.}(n+\mu-1):\text{fac.}(n+\lambda-1)$$

nach der Methode der unbestimmten Coefficienten, wo λ eine beliebige Constante ist, und k den für die Lösung bequemsten Wert erhält. In der Summe nimmt μ von einer bestimmten Zahl an fortwährend um eine Einheit zu oder ab. Wendet man die beiden Lösungsformen auf die specielle Gleichung

$$(n+\alpha)\varphi(n+1) = (n+\beta)\varphi(n)$$

an, so liefert die Vergleichung die bekannte Beziehung

$$F(a,b,c,1) = \frac{\text{fac.}(c-1)\,\text{fac.}(c-a-b-1)}{\text{fac.}(c-a-1)\,\text{fac.}(c-b-1)}.$$

Auch 3- (und mehr-)gliedrige Recursionsformeln von der Form

$$A_n\varphi(n+2)+B_n\varphi(n+1)+C_n\varphi(n) = 0$$

lassen sich, wenn A_n B_n C_n ganze Functionen von n sind, durch Facultätenreihen mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten lösen. Im Allgemeinen werden die Coefficienten wieder durch Recursionsformeln derselben Art, wie die vorgelegte bestimmt, brauchen aber nur für eine Folge ganzer Zahlen gelöst zu werden, während die Reihe eine Function der complexen Veränderlichen darstellt. Für den Fall, in welchem A_n B_n C_n in n linear sind, der hier allein betrachtet wird, ist die Hilfsrecursionsformel einfacher als die vorgelegte und kann völlig gelöst werden. Man erhält die Lösung der linearen 3-gliedrigen Recursionsformel mittels hypergeometrischer Reihen, und die verschiedenen Formen der Lösungen liefern die bekannten 24 Darstellungen der hypergeometrischen Reihe. Zum Schluss wird noch der Grenzwert von

$$F(a+\omega,\ b+\omega,\ c+2\omega, x) \text{ für } \omega = \pm\infty$$

bestimmt und von

$$F(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta',\ \alpha-\alpha'+\omega+1, x)$$

gezeigt, dass sein Wert nicht blos für $\omega = +\infty$, sondern unter der Annahme

$$\text{abs. } x<1, \quad \text{abs. } x:(x-1)<1,$$

auch für $\omega = -\infty$ gegen 1 convergirt. Hr.

T. R. Terry, J. Hammond. Solutions of two questions (6019, 6088). Ed. Times XXXIV. 27-28.

Ist $a<1$, und sind m und n Null oder positive ganze Zahlen, und

$$f(n,m) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!\,n!}\left\{1-\frac{n-m}{n+1}ma^2 + \frac{(n-m)(n-m+1)}{(n+1)(n+2)}\,\frac{m(m-1)}{1.2}a^4-\cdots\right\},$$

so ist

$$4a^2f(n,m)$$
$$= -f(n-1,m+1)+2(1+a^2)f(n-1,m)-(1-a^2)^2f(n-1,m-1);$$

$$\frac{df(n,m)}{da}$$
$$= 4a\frac{(n-m)(n-m+1)}{2n+1}f(n+1,m-1)-2a(n-m)f(n,m-1);$$
$$f(n,m+1) = (1+a^2)f(n,m)-\frac{4a(n-m)}{2n+1}f(n+1,m).$$

O.

C. Hermite, Baehr et E. Catalan. Sur une série. Math. I. 26, 58.

Beweis, dass die Reihe $\overset{m=\infty}{\underset{m=2}{S}}(\log m)^{-n}$ divergent ist.

Mn. (O.).

W. Řehořowský. Ableitung und Summirung unendlicher Reihen mit Hülfe von bestimmten Integralen. Cas. X. 134. (Böhmisch.).

Enthält einige specielle Anwendungen des bekannten Verfahrens.

Std.

E. Cesaro. Sur la série harmonique. Math. I. 51-53, 143-144.

Wenn

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

ist, und wenn C die Euler'sche Constante bezeichnet, so ist

$$\log\left(n+\frac{1}{2}\right)+0{,}57 < H_n < \log\left(n+\frac{1}{2}\right)+0{,}60,$$
$$H_n = \log\sqrt{n(n+1)}+C+\frac{\theta}{6n(n+1)},\quad 0<\theta<1.$$

Zur Ableitung dieser Gleichungen wird nur die Entwickelung von $\log(1+x)$ benützt.

Mn. (Wn.).

P. Mansion. Sur la série harmonique et la formule de Stirling. Math. I. 169-172.

Der Verfasser beweist, indem er nur die Fläche der gleichseitigen Hyperbel als bekannt annimmt, die folgenden Gleichungen:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\log n+\frac{1}{2n}-\frac{\theta}{2n(2n+1)},$$

$$\log(1.2.3\ldots N)=\frac{1}{2}(C+1)+\left(N+\frac{1}{2}\right)\log N-\frac{\theta}{2},$$

wobei

$$0<\theta<1$$

ist, während C die Euler'sche Constante bezeichnet.

Mn. (Wn.).

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

J. Hoüel. Cours de calcul infinitésimal. T. IV. Paris. Gauthier-Villars.

Dieser Band besteht aus vier Capiteln. Die zwei ersten geben fast wörtlich wieder den zweiten Teil von „Hoüel, Théorie élémentaire des quantités complexes" erschienen 1868. Nur ist zu dem Paragraphen, welcher von der Entwickelung der synectischen Functionen in periodische Reihen handelt, ein neuer Paragraph mit dem Beweise der Fourier'schen Reihe nach Dirichlet hinzugefügt, um diese zwei Entwickelungen, anscheinend von identischer Form, aber von sehr verschiedener Natur und auf verschiedene Principien gegründet, neben einander zu stellen. Das dritte Capitel hat zum Gegenstand die Untersuchung der vielförmigen Functionen, deren Elemente sich in „Briot und Bouquet, Théorie des fonctions doublement périodiques" und in „Ed. Weyr, Zur Theorie der elliptischen Functionen" finden. Insbesondere wird darin entwickelt die Theorie der periodischen Inversion der Integrale und dafür Beispiele entnommen von den Kreis- und elliptischen Functionen. Das letzte Capitel ist dem besonderen Studium der elliptischen Functionen gewidmet. Nach

Darlegung der Reduction der Integrale auf die Normalformen und der unmittelbaren Folgen des Additionstheorems folgen, nach dem Gange von Briot und Bouquet, die Entwickelungen der elliptischen Functionen in einfache Brüche und in unendliche Producte, die Eigenschaften der Functionen $\theta_n(u)$, unterschieden durch constante Factoren von den Jacobi'schen $\vartheta_n(u)$, dann die Entwickelung jener in trigonometrische Reihen. Es wird nach Gudermann die Transformation von Landen nebst Anwendung auf die numerische Berechnung aufgestellt. Den Schluss machen die wichtigsten Eigenschaften der Integrale zweiter und dritter Gattung, sowie abgekürzte Tafeln zur numerischen Berechnung der elliptischen Functionen nebst Gebrauchsanweisung. In diesem ganzen Capitel wird die Gudermann'sche Bezeichnung gebraucht. Ein späteres Supplement zum vierten Bande soll Uebungen enthalten. H.

O. Schlömilch. Compendium der höheren Analysis. I. 5. Aufl. Braunschweig. F. Vieweg u. Sohn.

Die fünfte Auflage ist der vierten gleich. Der vorliegende erste Band enthält die Differentialrechnung mit Anwendung auf krumme Linien und Flächen, Maxima und Minima, Reihen, Functionen complexer Grössen, Zerlegung in Partialbrüche; dann die Integralrechnung, nämlich Integrationen der Functionen nebst geometrischer Anwendung, bestimmte Integrale und Differentialgleichungen. H.

A. Harnack. Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Zur Einführung in das Studium dargestellt. Leipzig. B. G. Teubner.

Das Buch gehört unter den Bearbeitungen der reinen Analysis, welche in der Neuzeit schon in grosser Anzahl an's Licht getreten sind, zu denjenigen, welche die Klarstellung der Principien zur Hauptaufgabe machen, was um so mehr anzuerkennen ist, als es zunächst für Techniker bestimmt sein soll. Es macht

keinen Gebrauch von den in weiten Kreisen beliebten leichtfertigen Methoden und zeigt wenigstens das Streben, den Mustern auf neuerem Standpunkt zu folgen. In der Anordnung und dem Lehrgange ist keine eingreifende Abweichung vom Gewöhnlichen zu finden, wohl aber tritt in der Ausführlichkeit der Behandlung wichtiger Punkte und in der Berücksichtigung besonderer Umstände jene Wertschätzung hervor. Der Verfasser erklärt die Scheidung der reellen und complexen Grössen für unzweckmässig; factisch ist jedoch jede Theorie mit Beschränkung auf reelle Elemente erst bis zur Reife entwickelt, ehe die complexen zugezogen werden; anders würde man wohl auch ohne Einbusse an Deutlichkeit nicht verfahren können. Es ist also diese Scheidung nicht, wie er es nennt, ein blos äusserliches Merkmal der Einteilung, sondern es liegt in der Natur der Sache, dass der erweiterte Begriff den ursprünglichen zur unentbehrlichen Grundlage behält. Die Obereinteilung ist folgende: Das erste Buch handelt von den reellen Zahlen, Functionen, Differentialquotienten und dem Taylor'schen Satze, mit Eingehen auf die Theorie der unendlichen Grössen, das zweite von den complexen Zahlen und Functionen, das dritte von der Integration der Functionen, vom bestimmten Integral als Grenzwert der Summe, von den Euler'schen Integralen und Doppelintegralen, das vierte von den Integralen complexer Functionen und den allgemeinen Eigenschaften analytischer Functionen. H.

O. Stolz. R. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Klein Ann. XVIII. 255-279.

Siehe Abschn. I. Cap. I. B. p. 35.

F. Gomes Teixeira. Prelecção sobre a origem e sobre os principios do calculo infinitesimal. Teixeira J. III. 21-45. (Portugiesisch.).

Siehe F. d. M. XII. 1880. p. 206. O.

Capitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

W. Gosiewski. Differentiation und Integration reeller Functionen einer reellen veränderlichen Grösse. Par. Denkschr. 1881. (Polnisch.).

Der Verfasser stellt sich in dieser Schrift die Aufgabe, die allgemeinen Bedingungen der Differentiirbarkeit und Integrirbarkeit der Functionen zu ergründen. Für irgend eine reelle Function $y = f(x)$ der reellen veränderlichen Grösse x (wenn δ unendlich klein, ε und ε' positiv und nicht grösser als 1) ist die Differenz

$$f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)$$

für einen bestimmten Wert von x als Function von δ betrachtet entweder 1) unendlich klein oder 2) bestimmt oder 3) unbestimmt. Im Falle 1) heisst die Function für diesen Wert von x stetig, im Falle 2) kann sie noch vom Zeichen des δ abhängig sein und besitzt dann zwei verschiedene Werte, die dann beiden Zeichen von δ entsprechen, sie heisst dann unstetig für diesen Wert von x. Im Falle 3) ist die Function unbestimmt für diesen Wert.

Ist die Differenz

$$f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)$$

unendlich klein für alle Werte von x von $x = a$ bis $x = b$, $b > a$, und wenn noch die Differenzen

$$f(a+\varepsilon\delta)-f(a),\ f(b)-f(b-\varepsilon\delta)$$

für positive δ unendlich klein sind, dann heisst die Function $f(x)$ stetig im ganzen Intervalle von $x = a$ bis $x = b$.

Es kann ferner die Function $f(x)$ in diesem Intervalle a bis b einmal, mehrmals oder sogar unendlich oft unendlich werden, oder sie kann auch eine endliche oder unendliche Anzahl von Malen unbestimmt werden. Es kann auch die Function $f(x)$ für jeden Wert von $x = a$ bis $x = b$ unstetig oder unbestimmt sein. Wenn überhaupt die Differenz

$$f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)$$

im Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ unendlich klein ist oder nicht, so wird sie einwertig oder zweiwertig genannt. Somit zerfallen alle reellen Functionen einer reellen Grösse in zwei Klassen. Zur ersten Klasse gehören die stetigen Functionen, zur zweiten die zweiwertigen, also die unstetigen und unbestimmten. Nimmt man $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = 0$ und betrachtet das Verhältnis

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta},$$

so sieht man zunächst, dass dieses Verhältnis im Falle einwertiger Functionen nie seinen Sinn verlieren kann; für zweiwertige Functionen ist es aber immer unendlich oder unbestimmt. Dies Verhältnis wird der Differentialquotient der Function $f(x)$ genannt. Es sind hier drei Fälle möglich:

1) Das Verhältnis ist von δ abhängig, und dann ist der Differentialquotient der Function $f(x)$ von δ abhängig, also unbestimmt.

2) Das Verhältnis hängt vom Zeichen der Grösse δ ab, und dann hat der Differentialquotient zwei verschiedene und bestimmte Werte.

3) Das Verhältnis ist von δ unabhängig, und dann hat der Differentialquotient einen stetigen und bestimmten Wert.

Beispiele für die Fälle 2) und 3) sind bekannt; für den Fall 1) giebt der Verfasser folgendes Beispiel:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} h^n \cos(k^n x).$$

h ist ein positiver echter Bruch, $k > 1 \ldots$; die Function ist stetig für jeden Wert von x. Man findet hier

$$\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (hk)^n \sin\left(k^n x + \frac{\varrho_n \lambda}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\varrho_n \lambda}{2}}{\left(\frac{\varrho_n \lambda}{2}\right)},$$

wo

$$\lambda = k^{\lim. n}.\delta, \quad \varrho_n = \frac{k^n}{k^{\lim. n}}.$$

Ist $hk \geqq 1$, so enthält der Differentialquotient die Grösse λ, hängt also ab von δ; für $hk < 1$ hat die Function einen bestimmten Differentialquotienten.

In der zweiten Hälfte seiner Abhandlung geht der Verfasser aus von der bekannten Riemann'schen Definition des bestimmten Integrales und zieht aus ihr einige Consequenzen. Als Bedingung der Integrirbarkeit der Function $f(x)$ zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ findet er die Gleichung

$$\lim. \int_a^b [f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)]\, dx = 0$$

für alle Werte x von $x = a$ bis $x = b$. Aus dieser Bedingung folgt, dass alle einwertigen Functionen zu den integrirbaren, die nicht integrirbaren aber zu den zweiwertigen gehören. Um in dieser letzten Klasse die integrirbaren von den nicht integrirbaren zu scheiden, teilt der Verfasser die zweiwertigen Functionen in solche, deren Integrirbarkeit von den Grenzen der Integration abhängt, und in solche, welche die genannte Eigenschaft unabhängig von den Grenzen besitzen. Zu den nicht integrirbaren erster Kategorie gehören Functionen, für welche die Differenz

$$f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)$$

von Null verschieden ist und ihr Zeichen zwischen den Grenzen behält; weiter Functionen, für welche das Element

$$[f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)].\delta$$

wenigstens einmal zwischen den Grenzen bestimmt wird, den Fall natürlich ausgeschlossen, wenn sich die unendlichen oder unbestimmten Elemente gegenseitig heben. Für die Functionen zweiter Kategorie nimmt die Bedingung der Integrirbarkeit folgende Form an:

$$\lim. [f(x+\varepsilon\delta)-f(x-\varepsilon'\delta)]\delta = 0.$$

Es folgen dann mehrere Beispiele integrirbarer und nicht integrirbarer Functionen, das bekannte Beispiel von Riemann:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(nx)}{n^s};$$

die Function

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{k^n(k^n x - E(k^n x))^s};$$

im Falle $s = \frac{1}{2}$, $k = 2$, ist dies die bekannte Function von

Schwarz (integrirbar, wenn $s<1$); die Function

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \sin(k^n x) \quad (k<1);$$

integrirbar, wenn

$$\lim. \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{c_{m+n}}{k^{m+n}} \right) \right\}_{m=\infty} = 0,$$

wo $\left(\frac{c_{m+n}}{k^{m+n}}\right)$ den absoluten Wert von $\frac{c_{m+n}}{k^{m+n}}$ bedeutet.

Die Function

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} [n^2 x e^{-n^2x^2} - (n+1) x e^{-(n+1)^2 a^2}]$$

bildet ein Beispiel einer Function, deren Integrirbarkeit von den Grenzen abhängt. Dn.

L. Oppermann. En explicit Fremstilling af

$$\frac{d^k}{dx^k}(x-a)^p(x-b)^q.$$

Zeuthen T. (4) V. 184-188.

Die Arbeit giebt folgendes Verfahren zur Lösung der im Titel erwähnten Aufgabe. Ist

$$X_t = (x-a)^p(x-b)^q; \quad p+q = t,$$

so ergiebt sich durch wiederholte Differentiation, dass

$$X_t^{(k)} = \Xi_k . X_{t-2k}.$$

Hier lässt sich Ξ_k als hypergeometrische Reihe darstellen und ebenfalls in eine Potenzreihe entwickeln. Durch Betrachtung der Coefficienten dieser Reihe ergiebt sich die Bedingung

$$q(q-1)-(q-t) = (b-a)^{-(t+1)}$$

oder auch eine ähnliche für p. Gm.

S. Pincherle. Sopra una formola di analisi. Batt. G. XIX. 385-387.

Durch $(n-1)$-malige Differentiation der Reihe für $(1-x)^{-1}$, Multiplication mit $c_n x^n$ und Summirung nach n erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} c_n\left(\frac{x}{1-x}\right)^n = \sum_{m=1}^{m=\infty} h_m x^m,$$

wo h_m linear in den c_n dargestellt ist, und nach Substitution

$$\frac{x}{1-x} = z; \quad x = \frac{z}{1+z}$$

die gleiche Form in $-z$

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} h_m\left(\frac{z}{1+z}\right)^m = \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n z^n,$$

demnach (mit geringer Aenderung) die gleiche Darstellung von c_n in den h_m. Setzt man in ersteren Relationen $m = 1, 2, \dots n$, löst das Gleichungssystem nach c_n auf und drückt c_n in den h_m aus, so ergiebt sich die gesuchte Formel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots h_1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots h_2 \\ 1 & 2 & 1 & \dots h_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \frac{n-1}{1} & \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} & \dots h_n \end{vmatrix} = \sum_{m=0}^{m=n-1} (-1)^m \binom{n-1}{m} h_{n-m},$$

das ist für $h_m = x^{m-1}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots x \\ 1 & 2 & 1 & \dots x^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \dots x^{n-1} \end{vmatrix} = (x-1)^{n-1}.$$

H. K.

W. Kretkowski. Ueber einige Formeln der Differenti[al]rechnung. Krak. Denkschr. 1881. (Polnisch.)

Die Schrift enthält allgemeine Formeln für die höheren Differentialquotienten zusammengesetzter und unentwickelter Functionen. Die allgemeine Aufgabe ist die folgende: „Es ist

$$w = F(u_1, u_2, \dots u_m) \text{ und } u_l = f_l(z), \qquad l = 1, 2 \dots m.$$

Man soll den Differentialquotienten n^{ter} Ordnung $D_z^n w$ der Function w nach der unabhängigen Variablen z durch die partiellen

Differentialquotienten der Function w nach den Grössen u_i und die Differentialquotienten der u_i nach der Grösse z ausdrücken."

Der Verfasser löst diese Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit und giebt dann einige Anwendungen seiner Formeln.

Dn.

G. Darboux. Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables indépendantes. C. R. XCIII. 1123-1125.

Einen Satz von Herrn Hermite, nach welchem die homogene Gruppe zweiten Grades in der Entwickelung von

$$f = \sqrt{1-2\alpha x-2\alpha' y+\beta x^2+\beta' xy+\beta'' y^2}$$

Factor aller höheren homogenen Gruppen ist, sucht der Verfasser zu erweitern. Zunächst ist die Anzahl der Variabeln, hier zwei, ganz gleichgültig. Ferner lässt sich zeigen, dass, wenn für irgend eine Function f die Gruppe zweiten Grades Factor der Gruppe dritten Grades ist, sie auch Factor aller höheren Gruppen sein muss. Statt des zweiten und dritten setzt der Verfasser zwei beliebige successive Grade und stellt das Problem in der Form auf: „Die Function f derart zu bestimmen, dass

$$d^{n+1}f = (A_1\,dx_1 + \cdots + A_\mu\,dx_\mu)d^n f$$

wird." Es ergiebt sich als Bedingung eine Differentialgleichung, h. welche er folgende drei Lösungen gefunden hat:

$$\text{I.} \quad f = \frac{F(x_1, x_2, \ldots x_\mu)}{P},$$

F ein Polynomen vom Grade n und P eine beliebige lineare Function bedeutet;

$$\text{II.} \quad f = \omega^{\frac{n-1}{2}}$$

für ein grades n, wo ω ein Polynomen zweiten Grades ist;

$$\text{III.} \quad f = \int_0^u \psi(u)[x_1\varphi_1(u)+\cdots+x_\mu\varphi_\mu(u)+\varphi(u)]^{n-1}du,$$

zu integriren bei constanten $x_1, \ldots x_\mu$ bis zu derjenigen oberen Grenze, an welcher die Grösse in der Klammer [[ ]] ver-

schwindet. Eine Discussion behält sich der Verfasser für eine neue Mitteilung vor. H.

F. Haluschka. Ein Beitrag zur Theorie der Maxima und Minima von Functionen. Wien. Ber. LXXXIII. 1092-1109.

Genügt ein Wert einer Function f von n Unabhängigen in erster Ordnung den Bedingungen des Maximums und Minimums, so hängt die Entscheidung von dem Vorzeichen der zweiten Variation u von f, d. i. von einer homogenen quadratischen Function der n Differentiale ab. Diese Entscheidung wird dadurch herbeigeführt, dass man, wenn es möglich ist, u oder $-u$ in die Summe von Quadraten linearer Functionen $\eta_1, \eta_2, \dots$ transformirt. Die Coefficienten in u stehen zu den Coefficienten in allen η in der Beziehung, dass die Determinante der ersteren H gleich dem Quadrate der Determinante der letzteren A ist. Eine Determinante $H = A^2$ wird hier Quadratdeterminante genannt. Die damit ausgedrückte Eigenschaft von H ist dann notwendige und ausreichende Bedingung für ein Minimum, resp. Maximum f, von dem Falle $H = 0$ abgesehen. Damit nun H eine Quadratdeterminante sei, ist notwendig, 1) dass sie symmetrisch sei, was von selbst erfüllt ist, 2) dass jede Hauptunterdeterminante eine Summe von Quadraten sei. Die letzteren kann man beschränken auf die folgenden $H_1, H_2, \dots$, welche aus H hervorgehen, wenn man bezw. nur die erste, die zweite, etc. der ersten Unabhängigen variiren lässt. Es tritt ein Minimum ein, wenn diese sämmtlich positiv, ein Maximum, wenn sie abwechselnd positiv und negativ sind. Ein gleiches Kriterium hat Herr Stolz aufgestellt. Für den Fall, wo zwischen den Argumenten von f Relationen bestehen, werden die Relationen der Differentiale erst so transformirt, dass jedes durch die folgenden dargestellt ist, dann die abhängigen Elemente successive aus dem Kriterium entfernt, mit Anwendung des Satzes: „Tilgt man in einer Determinante $(m+\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung die letzten ν Horizontal- und Verticalreihen bis auf je eine, so erhält man ν^2 Determinanten $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Von diesen die Determinante genommen ist $= A_{m+\nu} A_m^{\nu-1}$." Schliesslich wird der Fall behandelt, wo $H = 0$ ist. H.

A. E. STEINTHAL. Maxima and Minima. Mess. (2) X. 191-192.

Die Arbeit enthält die bekannte Bemerkung, dass die Maximal- und Minimalwerte, welche unendlichen Werten der Derivirten entsprechen, nicht nach der gewöhnlichen Art unterschieden werden können. Glr. (O.).

A. GRÜNWALD. Ueber die Entwickelung der begrenzten Derivationen nach positiven ganzen Potenzen des Index und die damit zusammenhängende Logialrechnung. Prag. Ber. 1880. 276-284; Prag. Abh. (6) XI.

Die Schrift handelt von einer neuen Begriffsbestimmung des Differentialquotienten für beliebigen Index ξ, welche der Verfasser schon 1867 in Schlömilch Z. XII. aufgestellt hat und gegenwärtig nur erweitert. In jener Abhandlung wird der ξ^{te}, über das geradlinige Argumentgebiet vom Punkte $x=u$ bis $x=x$ genommene Differentialquotient einer innerhalb desselben als stetig vorausgesetzten Function $f(x)$, oder das $(-\xi)^{\text{te}}$, über dasselbe Wertgebiet ausgedehnte Integral von $f(x)\,dx^{-\xi}$ durch den Grenzwert definirt, welchem der Ausdruck

$$F(u,x,\xi,\delta)_f \equiv \sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p(\xi_p)\frac{f(x-p\delta)}{\delta^{\xi}},$$

(wo (ξ_p) Binomialcoefficient) zustrebt, wenn die positive ganze Zahl n uneingeschränkt wächst, und der Modul der im Allgemeinen complexen Grösse δ derart der Null zustrebt, dass $n\delta=x-u$ wird. Die Grösse u und die davon unabhängige, als variabel aufgefasste Grösse x werden bezüglich die untere und obere Grenze der Derivation genannt. Dieser Grenzwert existirt und ist

$$\lim_{\delta=0}F(u,x,\xi,\delta)=\frac{1}{\Gamma(-\xi+\nu)}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\int_u^x\frac{f(\vartheta)\,d\vartheta}{(x-\vartheta)^{\xi-\nu+1}},$$

wo ν die kleinste positive ganze Zahl vorstellt, welche gleich oder grösser als der reelle Teil von $\xi+1$ ist. Gegenwärtig fällt die Beschränkung weg, dass ϑ in gerader Linie von u bis x variiren soll, auch darf $f(\vartheta)$ beliebige Unstetigkeitspunkte haben. Dagegen bleibt die Beschränkung bestehen, dass $f(\vartheta)$ eindeutig

monodrom sei. Die Riemann'sche Fläche ist hier nur ein Blatt, aus welchem unendlich kleine Kreise um die einzelnen Unstetigkeitspunkte herum ausgeschnitten und derart durch Schnitte verbunden sind, dass die Fläche einfach zusammenhängt. Der erste Teil der Abhandlung discutirt die genannte Einführung, woraus sich viele Bedingungen für die Anwendungen ergeben. Der zweite Teil entwickelt die Derivationen nach Potenzen von ξ. Es wird gezeigt, wie die Coefficienten successive nach einem gewissen Ableitungsgesetze aus einander hervorgehen. Die Operation dieser Ableitung wird unter „Logial“ verstanden. H.

M. W. Crofton. On operative symbols in the differential calculus. Lond. M. S., Proc. XII. 122-134.

Der Aufsatz enthält verschiedene Ergebnisse in der Theorie der operativen Symbole, angewandt in der Differentialrechnung. Für neu wagt sie der Verfasser nicht auszugeben; überdies bezeichnet er die Form der Darstellung als fragmentarisch und unvollendet. Das Vorliegende beschränkt sich auf Betrachtung von Symbolen der Form

$$f(x, D) = f\left(x, \frac{d}{dx}\right) \equiv \eta.$$

Die zwei ersten Formeln sind geschrieben:

$$D|\eta| = \frac{d\eta}{dx} = D\eta - \eta D,$$

$$\frac{d\eta}{dD} = \eta x - x\eta.$$

Eine Erklärung der Symbole wird nicht gegeben. H.

R. F. Scott. Mathematical notes. Mess. (2) X. 142-149.

III. Es wird bewiesen, dass

$$e^{h\frac{d^2}{dx\,dy}} e^{kxy} = \frac{1}{1-hk} e^{\frac{kxy}{1-hk}}.$$

Der Verfasser untersucht ferner die Werte von $e^U e^u$, wo U und u

resp. allgemeine homogene Functionen zweiter Ordnung von $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$ und x, y, z sind. Endlich wird auch bewiesen, dass

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dx_1}, & \frac{d}{dx_2}, & \dots & \frac{d}{dx_n} \\ \frac{d}{dx_n}, & \frac{d}{dx_1}, & \dots & \frac{d}{dx_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d}{dx_2}, & \frac{d}{dx_3}, & \dots & \frac{d}{dx_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1, x_2, \dots x_n \\ x_n, x_1, \dots x_{n-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_2, x_3, \dots x_1 \end{vmatrix} = n^n.$$

Glr. (O.).

W. H. L. Russell. On the calculus of finite differences.
Mess. (2) XI. 33-36.

Der Verfasser giebt erstens die Werte von

$$\Delta^n \frac{1}{x}, \Delta^n \frac{1}{x^2}, \Delta^n \frac{1}{x^3}, \Delta^n \Gamma(x) \dots \Delta^n \frac{1}{a^x+1}, \dots;$$

zweitens betrachtet er die Bedingungen, unter denen ein rationaler Bruch in endlicher Form integrirt werden kann; drittens endlich giebt er die Integrale einiger Ausdrücke, in denen Sinus und Cosinus vorkommen. Glr. (O.).

Capitel 3.

Integralrechnung.

V. Volterra. Sui principii del calcolo integrale.
Batt. G. XIX. 333-372.

Dini hat in seinem Werke: „Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali“ p. 276 gezeigt, dass das Differential einer Function nicht ein Integral im Sinne Riemann's zu haben braucht. Die gegenwärtige Abhandlung weist Beispiele solcher Functionen auf, wo die Inversion der Differentiation mehr

umfasst als der Riemann'sche Begriff des Integrals, und discutirt sie. H.

Ptaschitzky. Ueber Integration der irrationalen Differentialausdrücke in endlicher Form. Diss. Petersburg. (Russisch.).

Es wird in dem ersten Abschnitt dieser Arbeit das gestellte Problem, für das Integral $\int \frac{P dx}{Q\sqrt[m]{R}}$, wo P, Q, R rational in x und m eine positive ganze Zahl ist, einen endlichen Ausdruck zu finden, zurückgeführt auf ein anderes, nämlich ein dem gegebenen ähnliches Integral durch Logarithmen, und zwar nach einem Satze von Tchebichef, der hier auch bewiesen wird, durch ein logarithmisches Glied darzustellen. Dann wird gezeigt, welches die algebraische Aufgabe ist, auf welche die letztgenannte Frage in dem Falle, dass m eine Primzahl ist, zurückgeführt werden kann. Es wird hier auch nachgewiesen, dass die bekannten Bedingungen, die für die Integration der irrationalen zweigliedrigen Differentiale in endlicher Form hinreichen, auch die notwendigen sind, und dass die Integrale $\int \frac{P dx}{Q\sqrt[m]{R}}$ überhaupt nur für zwei Formen des Polynomens R endliche Ausdrücke zulassen. Der zweite Teil ist der Lösung der erwähnten algebraischen Aufgabe für den Fall gewidmet, dass $m = 2$ ist. Im Anfange ist die Aufgabe behandelt, die algebraischen Ausdrücke für dieselben Integrale zu finden, in dem Falle, wo sie solche zulassen.

Ty.

H. Résal. Sur la détermination de quelques intégrales indéfinies. Nouv. Ann. (2) XX. 529-537.

Die behandelten Integrale sind:

$$\int f(x)\,dx\,\sqrt{1+x^2},\quad \int f(x)\,dx\,\sqrt{1-x^2},\quad \int f(x)\,dx\,\sqrt{x^2-1}.$$

Das erste wird in der Form reducirt:

$$2\int f(x)\,dx\sqrt{1+x^2}$$

$$=\int\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1+x^2}}+[xf(x)-\varphi(x)]\sqrt{1+x^2}+\int\frac{x\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

wo

$$\varphi'(x) = xf'(x)$$

gesetzt ist. Mit den zwei anderen wird dann ebenso verfahren, eine Arbeit, die offenbar überflüssig war, da die Formeln durch Specialisirung von $\sqrt{ax^2+b}$ nicht vereinfacht werden. Anwendung wird gemacht auf Specialwerte von $f(x)$, dann auf trigonometrische Functionen, die sich auf obige Formen reduciren lassen, wie $\int dx\sqrt{\operatorname{tg} x}$ und andere. H.

D. Bierens de Haan. Herleiding van eenige integralen met den wortelvorm $\sqrt{1+p\sin^2 x\cos^2 x}$ tot elliptische en andere integralen. Amst. Verh. 1881.

Wie der Titel sagt, werden in dieser Abhandlung einige Integrale mit der Wurzelgrösse $\sqrt{1+p\sin^2 x\cos^2 x}$ auf elliptische und andere Integrale zurückgeführt.

Als Ausgangspunkt werden die Integrale

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x\cos^2 x}}=\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2}k,\,2x\right),$$

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1+z^2\sin^2 x\cos^2 x}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4+z^2}}\left[F\left(\frac{z}{\sqrt{4+z^2}}\right)-F\left(\frac{z}{\sqrt{4+z^2}},\ \frac{\pi}{2}-2x\right)\right]$$

genommen, und daraus eine Menge anderer von übereinstimmender Form abgeleitet. G.

J. Hammond, G. Heppel. Solutions of a question (6439). Ed. Times XXXIV. 80.

$$\int e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx = e^{\frac{1}{2}x^2}\{x^{-1}+1.x^{-3}+1.3.x^{-5}+1.3.5.x^{-7}+\cdots\}.$$

O.

S. Gundelfinger. **Ueber mehrfache Integrale, welche durch eine Transformation der Variabeln ihre Gestalt nicht ändern.** Kronecker J. XCI. 215-220.

Es wird folgender Satz bewiesen: Zwischen m Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_m$ mögen eine homogene Gleichung zweiten Grades und $m-2$ homogene lineare Gleichungen bestehen:

$$(1) \qquad f \equiv a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots a_{mm}x_m^2 = 0,$$

$$(1^a) \qquad \begin{cases} v \equiv v_1 x_1+v_2 x_2+\cdots v_m x_m = 0, \\ w \equiv w_1 x_1+w_2 x_2+\cdots w_m x_m = 0, \\ \vdots \\ t \equiv t_1 x_1+t_2 x_2+\cdots t_m x_m = 0. \end{cases}$$

In beliebigen $m-2$ dieser Relationen seien die Coefficienten $a, v, \dots t$ homogene Functionen ersten Grades, die übrigen zweiten Grades von m anderen Veränderlichen $y_1, y_2, \dots y_m$, so dass vorstehende Gleichungen die Form haben:

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathfrak{v}_1 y_1+\mathfrak{v}_2 y_2+\cdots \mathfrak{v}_m y_m = 0, \\ \mathfrak{w}_1 y_1+\mathfrak{w}_2 y_2+\cdots \mathfrak{w}_m y_m = 0, \\ \vdots \\ \mathfrak{t}_1 y_1+\mathfrak{t}_2 y_2+\cdots \mathfrak{t}_m y_m = 0, \\ \mathfrak{a}_{11} y_1^2+\mathfrak{a}_{12} y_1 y_2+\cdots \mathfrak{a}_{mm} y_m^2 = 0. \end{cases}$$

Nimmt man ferner zwischen den x und den y zwei willkürliche Beziehungen an:

$$(3) \qquad \mathfrak{P}(x_1, \dots x_n) = 0; \quad P(y_1, \dots y_n) = 0$$

derart, dass $\mu P+1$ (resp. $\nu\mathfrak{P}+1$) eine homogene Function μ^{ten} (resp. ν^{ten}) Grades der y (resp. der x) repräsentirt, so wird für eine beliebige Function U der Integrationsveränderlichen das $(m-1)$-fache Integral

$$J = \int\int\cdots\int \frac{U\,dy_1\,dy_2 \dots dy_{m-1}}{P'(y_m)\sqrt{A}}$$

unter Vermittelung der Beziehungen (1) bis (3) übergeführt in

$$J = \int\int\cdots\int \frac{U\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{m-1}}{\mathfrak{P}'(x_m)\sqrt{\mathfrak{A}}},$$

wo

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} & \ldots a_{1m} & v_1 & \ldots t_1 \\ a_{21}\, a_{22} & \ldots a_{2m} & v_2 & \ldots t_2 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\, a_{m2} & \ldots a_{mm} & v_m & \ldots t_m \\ v_1\ \ v_2 & \ldots v_m & 0 & \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ t_1\ \ t_2 & \ldots t_m & 0 & \ldots 0 \end{vmatrix}$$

und $\mathfrak{A}$ die entsprechende Bedeutung in den Coefficienten von (2) hat.

Zum Beweise dient u. a. der folgende Satz. Für ein Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_m$, welches die $m-1$ Gleichungen (1) (1^a) befriedigt, ist bei völliger Willkürlichkeit der u

$$\frac{1}{4}(\Sigma\pm(f'(x_1)v_2w_3\ldots t_{n-1}u_n))^2 = (-1)^{m+1}(u_1x_1+\cdots u_mx_m)^2 A.$$

Derselbe wird sodann bewiesen, und die daraus folgende Verallgemeinerung eines Aronhold'schen Satzes (l. c. LXI. 103) abgeleitet. Erfüllen die x sämmtliche Gleichungen (1) (1^a), ausgenommen die erste Relation in (1^a), und setzt man

$$F_r = \frac{1}{2}\left(c_1^{(r)}\frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2^{(r)}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots c_m^{(r)}\frac{\partial f}{\partial x_m}\right),$$

$$W_r = (c_1^{(r)}w_1 + c_2^{(r)}w_2 + \cdots c_m^{(r)}w_m) \text{ etc. etc.,}$$

wo die c (für $r = 1, 2, \ldots m-2$) willkürliche Grössen bedeuten, so wird das Integral

$$J = \int \frac{\Sigma\pm(c_1^{(1)}c_2^{(2)}\ldots c_{m-2}^{(m-2)}x_{m-1}dx_m)}{(v_1x_1+v_2x_2+\cdots v_mx_m)\Sigma\pm(W_1\ldots T_{m-3}F_{m-2})}$$

identisch mit

$$\frac{1}{\sqrt{(-1)^{m+1}A}}\log\left(\frac{\xi_1 f'(x_1)+\xi_2 f'(x_2)+\cdots \xi_m f'(x_m)}{v_1x_1+v_2x_2+\cdots v_mx_m}\right),$$

worin $\xi_1, \ldots \xi_m$ ein Wertsystem bedeutet, welches sämmtlichen Gleichungen (1) (1^a) Genüge leistet. H.

C. V. Boys. An integrating machine. Phil. Mag. 1881.

Die hier beschriebene Maschine ist eine genaue mechanische

Nachbildung der mathematischen Methode zur Integration von ydx und bildet einen neuen Typus unter den Integrationsapparaten. Csy. (O.).

Capitel 4.

Bestimmte Integrale.

C. F. Lindman. Om upprepad differentiation af definita integraler. Stockh., Ofv. 1881.

M. L.

L. Bourguet. Développement en séries des intégrales eulériennes. Ann. de l'Éc. Norm. (2) X. 175-233.

Den Anfang der Abhandlung bildet eine historische Zusammenstellung dessen, was die einzelnen Bearbeiter, zuerst Euler's Vorgänger, Wallis, Stirling, Vandermonde, dann weiter Legendre, Krampt, Gauss, Binet, Cauchy, Hermite zur Ausbildung der Theorie der Euler'schen Integrale beigetragen haben. Auf die Frage, was der erreichte Standpunkt zu untersuchen übrig lässt, führt der Verfasser an: 1) Die Reihen von Binet und Stirling könnten sich noch zu manchen Entwickelungen eignen. 2) Die Entwickelung von $1:\Gamma(x)$, deren Möglichkeit Weierstrass bewiesen, lässt wohl noch Anwendung zu. 3) Auch die von $\Gamma(x)$ könnte Nutzen haben. 4) Es würde Interesse haben, die Coefficienten der Prym'schen Entwickelung von $\Gamma(x)$, bestehend aus zwei Reihen, zu kennen. Die gegenwärtigen Beiträge sollen in der Untersuchung der Coefficienten der Reihen für $1:\Gamma(x)$, für $\Gamma(x)$ und der von Prym mit $c_0, c_1, c_2, \ldots$ bezeichneten bestehen. Nach ausführlicher Darlegung der Theorien der genannten Autoren und der Herleitung der zur Entwickelung dienenden Formeln folgen die vom Verfasser berechneten Tafeln der Coefficienten auf 16 Stellen. H.

L. Bourguet. Sur les intégrales eulériennes. Darb. Bull. (2) V. 43-51.

Es wird zuerst durch Zerlegung des Integralintervalls bewiesen, dass $\sin a\pi\,\Gamma(a)$ holomorph ist; daraus folgt dasselbe für den reciproken Wert von $\Gamma(1-a)$, mithin auch von $\Gamma(a)$, der durch $G(a)$ bezeichnet wird. Hiernach lässt sich $G(a)$ nach Potenzen von a entwickeln. Es werden nun obere Grenzen der Coefficienten gefunden. Der Verfasser hat die 16 ersten Coefficienten berechnet. H.

L. C. y Ricart. Relacion entre las dos integrales Eulerianas. Cron. cient. IV. 209-211.

L. Bourguet. Sur la détermination des maxima et minima de la fonction $\Gamma(x)$. Torino, Atti XVI 758-772.

Nachdem bewiesen, dass die Wurzel x der Gleichung

$$\frac{\Gamma'(n+x)}{\Gamma(n+x)} = 0$$

grösser als $\frac{1}{2}$ sein muss und für jedes ganze negative n existirt, wird als erste Näherung gefunden:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\Gamma'\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\pi\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} - \varepsilon,$$

$$\varepsilon < \frac{1}{2n\left[\pi^2+\left(\log\frac{2n+1}{3}\right)^2\right]},$$

dann eine Reihe weiterer Annäherungen, wo jedoch alle Definition der eingeführten Grössen fehlt. Ein zweiter Teil der Schrift entwickelt Relationen der Summe:

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{-n},$$

z. B.

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} 2n(2n+1)(2n+3)2^{-2n-3}S_{2n+3} = 3,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} 2n(2n+1)(2n+3)S_{2n+3} = \frac{51}{16}.$$

H.

N. SONINE. Note sur une formule de Gauss. S. M. F. Bull. IX. 162-166.

Aus der Relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ wird die Relation

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-x}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(x)$$

durch blosse Functionsschlüsse ohne Anwendung von Integralen hergeleitet. Da erstere Relation eine periodische Function als Factor unbestimmt lässt, so ergab sich der Wert der linken Seite der letzteren zunächst mit einem periodischen Factor, der dann bestimmt wird. H.

GYLDÉN. Sur l'intégrale eulérienne de seconde espèce. C. R. XCII. 897-901, 942-943.

Die numerische Berechnung des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\eta\lambda}}{(1+x)^\lambda}\,dx$$

bot nach den bisherigen Methoden für grosse Werte der Parameter η und λ bedeutende Schwierigkeiten. Herr Gyldén zeigt, wie durch Anwendung der von Herrn Hermite (Borchardt J. XC., s. diesen Band Abschn. VII. Cap. 2) gegebenen Zerlegung der Function

$$\mathfrak{Q}(x) = \mathfrak{Q}_0+\mathfrak{Q}_1+\mathfrak{Q}_2+\cdots$$

diese Berechnung wesentlich erleichert wird. Es wird der specielle Fall

$$\mathfrak{Q}(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}d\xi}{\xi} = -\lim(e^{-a})$$

durchgeführt. M.

H. STABENOW, A. L. SELBY. Solution of a question (6378). Ed. Times XXXIV. 75-76.

Wenn $n > 1$, so ist

$$\int_0^1 (1-x)^{n-2} dx \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta}{(1-x^2 \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}n}} = \frac{1}{4}\pi \left\{ \frac{\Gamma \frac{1}{2}(n-1)}{\Gamma \frac{1}{2}(n)} \right\}^2.$$

O.

A. BERGER. Sur quelques applications de la fonction Gamma. Up. N. Act. XI.

M. L.

J. W. L. GLAISHER. On some definite integrals expressible in terms of the first complete elliptic integral and of gamma functions. Lond., M. S. Proc. XIII. 92-99.

Durch Substitution und Integration wird zuerst die Formel hergeleitet:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x^4 + 2x^2 y^2 \cos 2\gamma + y^4) dx\, dy = \frac{1}{2} F^1(\sin\gamma) \int_0^\infty \varphi(t^2) dt,$$

wo F^1 die Legendre'sche Bedeutung hat für den Modul $\sin\gamma$, und angewandt auf Fälle bekannter Werte des Integrals zur Rechten, dann transformirt in

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi\{(x^2 + a^2 y^2)(x^2 + b^2 y^2)\}\, dx\, dy = \frac{1}{2} F(a, b) \int_0^\infty \varphi(t^2) dt,$$

wo

$$F(a, b) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{a^2 \cos^2\vartheta + b^2 \sin^2\vartheta}}$$

und durch Verbindung beider Formen ein Beweis für den Gauss'schen Satz gewonnen:

$$F(a, b) = F\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right).$$

Auf ähnlichem Wege ergiebt sich

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi\{x^6+x^2y^2(x^2+y^2)\frac{\sin 3\gamma}{\sin\gamma}+y^6\}\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^K \sqrt[3]{dn\,u}\,du\int_0^\infty \varphi(t^3)\,dt$$

für denselben elliptischen Modul $\sin\gamma$, und

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi\{x^8+4(1-4k^2)x^2y^2(x^4+y^4)+2(3+16k^2)x^4y^4+y^8\}\,dx\,$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^K \sqrt{dn\,u}\,du\int_0^\infty \varphi(t^4)\,dt$$

für den elliptischen Modul k, angewandt auf verschiedene Speci werte von k, dann auf

$$\varphi(t)=e^{-t},$$

wodurch Beziehungen zwischen Euler'schen Integralen und elli tischen Functionen und deren Integralen hervorgehen.

H.

H. J. Krantz. Bepaling van de waarde der uitdrukkin

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\sqrt{\cos\varphi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}.$$

Nieuw Arch. VII. 207-212.

Der Wert des obengenannten bestimmten Integrals wird a eine Art gefunden, welche mit derjenigen, die Poisson zur B stimmung von $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ anwendete, übereinstimmt, und so i Wert π ermittelt. Derselbe wird auch mit Hülfe elliptisch Integrale und endlich drittens durch Zugrundelegung der b stimmten Euler'schen Integrale abgeleitet.

G.

R. F. Scott. Mathematical notes. Mess. (2) X. 142-149.

II. Es wird bewiesen, dass

$$\int_0^1 (\log x)^{2n-2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x}=\frac{B_n\pi^{2n}(2^{2n}-1)}{2n(2n-1)}.$$

Ferner wird

$$\int_0^\pi \log(1-2x\cos\theta+x^2)\log(1-2y\cos\theta+y^2)d\theta$$

für die Fälle

$$2xy = 1 \text{ und } x^2y^2+xy = 1$$

ausgewertet. Glr. (O.).

J. A. Martins da Silva. Demonstraçāo de um theorema de Mr. Besge. Teixeira J. III. 65-72. (Portugiesisch.).

Beweis der Formel von Besge in Liouville J. (2) XIX. 423. s. F. d. M. VI. 1874. p. 191. Tx. (O.).

Niemöller. Beitrag zu einer Classe von Integralen complexer Functionen. Hoppe Arch. LXVI. 225-237.

Die hier gelöste Aufgabe geht dahin, den Wert des Integrals

$$\int_a^b f(z)dz = \int_a^b (z+a_1)^{n_1}(z+a_2)^{n_2}+\cdots+(z+a_m)^{n_m}dz$$

zu finden, wo $n_1, n_2, \dots$ sehr grosse positive ganze Zahlen bezeichnen, wenn $a_1, a_2, \dots a_m, a, b$ complexe Constanten sind. Der Verfasser nennt Nullpunkte die durch

$$f(z) = U+iV = 0$$

bestimmten Punkte, Verzweigungspunkte, die, in welchen

$$\frac{df(z)}{dz} = 0$$

ist, und betrachtet die Fläche

$$\zeta = U^2+V^2.$$

Hier schneiden sich in jedem Verzweigungspunkte zwei Curven (a) und (b) derart rechtwinklig, dass daselbst ζ sein Maximum oder sein Minimum erreicht. Man kann dann stets von a nach einem Nullpunkt und von da, ohne eine Curve (b) zu überschreiten, über eine Anzahl λ Curven (a) hinweg nach einem Nullpunkte integriren, von dem aus man in beständiger Steigung

nach b gelangt. Das Integral stellt sich dann in der Form dar:

$$\int_a^b f(z)dz = \pm\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \cdots \pm \varphi_\lambda + \varphi_a + \varphi_b.$$

Die Ausführung wird an Beispielen erläutert. H.

W. H. L. Russell. On certain definite integrals. No. 8. 9.
Lond., Proc. R. S. XXXI. 330-336, XXXII. 450-454.

Fortsetzung früherer Arbeiten (s. F. d. M. VIII. 173, IX. 214, X. 209, XI. 213). Die Resultate haben die Nummern 133-175, 176-219. Einige von ihnen in der ersten Notiz haben unter dem Integralzeichen die willkürliche Function f einer trigonometrischen Function, wie $\sin x\, e^{ix}$. Cly. (O.).

Auswertungen weiterer specieller bestimmter Integrale von E. Fauquembergue, Nash, J. Hammond finden sich Nouv. Ann. (2) XX. 416-418; Ed. Times XXXIV. 90-91.

O.

P. Mansion. Sur l'évaluation approchée des aires planes.
Math. I. 17-22, 33-36, Suppl. 1-64, Brux. S. Sc. V. B. 231-290.

Unter den wirklich praktischen Formeln zur Berechnung ebener Flächen giebt es nur zwei, die streng bewiesen sind, nämlich die von Poncelet und Parmentier, während es für die andern und speciell für die genaueste von allen, die Simpson'sche, nur obere und untere Fehlergrenzen giebt, so dass sie eigentlich nur in empirischer Art aufgestellt sind. In der vorliegenden Arbeit erhält der Verfasser in einfacher Weise, häufig auf verschiedene Arten, die Fehlergrenze und ihre geometrische Darstellung nicht allein für die Formeln von Parmentier und Poncelet, sondern auch für die der Trapeze, für die beiden Formeln von Simpson, die von Weddle, Catalan, Ch. Dupin, für eine unpublicirte Formel von Parmentier und endlich für eine neue Formel. Der Verfasser vergleicht ferner die verschiedenen Formeln auf ihre Genauigkeit, indem er annimmt, dass sich die Ordinate

der Curve zwischen gewissen mehr oder weniger genäherten Grenzen mit Hülfe des Taylor'schen Satzes in eine Reihe entwickeln lasse.

Das wichtigste und einfachste Resultat heisst in geometrischer Form: „Die Fläche S, genommen zwischen einer Curve, deren Concavität überall denselben Sinn hat, zwei Endordinaten und einer zu diesen senkrechten Basis liegt zwischen der Fläche eines eingeschriebenen Polygons, dessen Ecken die Enden äquidistanter Ordinaten sind, welche es in Trapeze von gleicher Höhe zerlegen, und der Fläche desjenigen Polygons, bei welchem die beiden äussersten Trapeze ersetzt werden durch Rechtecke von derselben Höhe, die zu Basen resp. die zweite und vorletzte Ordinate der Ecken des Polygons haben," d. h. also analytisch mit der gewöhnlichen Bezeichnung:

$S = \int_{x_0}^{x_n} y\,dx$ liegt zwischen $h\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-2}+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right)$

und

$$h\left(\frac{y_1}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-2}+y_{n-1}+\frac{y_{n-1}}{2}\right).$$

Unter den weiteren Resultaten erwähnen wir: 1) Unter den schnell zum Ziele führenden Formeln ist die von Parmentier die genaueste. 2) Unter den sehr genauen, aber nicht sehr schnell zum Ziele führenden ist die beste die von Simpson:

$$S = \frac{4}{3}(A+4B),$$

$$A = \frac{y_0}{2}+y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2}+\frac{y_{2n}}{2}, \quad B = y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1},$$

wenn die Zahl der Teilungen der Basis grade ist. 3) Die zu suchende Fläche wird genommen zwischen der Fläche $P = h(A+B)$ des eingeschriebenen Polygons und der Summe $M = 2hB$ des umgeschriebenen Polygons von Poncelet. Die Formel von Simpson kann dann geschrieben werden:

$$S = \frac{1}{3}(2T+M).$$

Der Fehler dabei ist folglich kleiner als die grösste der beiden Differenzen

$$\frac{1}{3}(2T+M)-T = \frac{h}{3}(B-A), \quad M-\frac{1}{3}(2T+M) = \frac{2h}{3}(B-A),$$

also als $\frac{2h}{3}(B-A)$, was ein neues und sehr einfaches Resultat ist. 4) Wenn die Zahl der Teilungen der Basis ungrade ist, lässt sich die Simpson'sche Formel in die Catalan'sche transformiren, die beinahe ebenso genau ist. Mn. (O.).

L. Saltel. Contribution à la théorie du changement des variables dans le calcul des intégrales simples et multiples. Bord. Mém. IV. 451-460.

Es werden die Transformationen eines Doppelintegrals bei drei Substitutionen

$$x = \alpha+\beta \qquad x = \alpha(1-\beta) \qquad x = \beta\cos\alpha$$
$$y = \alpha-\beta \qquad y = \alpha\beta \qquad y = \beta\sin\alpha$$

rücksichtlich der Veränderungen der Contour discutirt, die letzte auch auf dreifache Integrale ausgedehnt. H.

G. F. Walker, W. B. Grove, H. McColl. Solutions of a question (6545). Ed. Times XXXV. 61-62.

E. Blackwood, G. F. Walker. Notes on question 6545. Ed. Times XXXV. 100.

Die von Elizabeth Blackwood gestellte Aufgabe: „Die Grenzen des Integrals

$$\int dw \int dx \int dy \int dz\varphi(w, x, y, z)$$

anzugeben, wenn die vier Variabeln zwischen $-a$ und $+a$ variiren mit der ferneren Beschränkung, dass $w+x > yz$ sei,“ löst Walker durch den Ausdruck:

$$\int_{-a}^{a} dw \int_{-w}^{a} dx \left[\int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} - \int_{\frac{w+x}{a}}^{a} \int_{\frac{w+x}{y}}^{a} - \int_{-a}^{-\frac{w+x}{a}} \int_{-a}^{\frac{w+x}{y}} \right] \varphi dy dz$$

$$+ \int_{-a}^{a} dw \int_{-a}^{-w} dx \left[\int_{-\frac{w+x}{a}}^{a} \int_{-a}^{\frac{w+x}{y}} + \int_{-a}^{\frac{w+x}{a}} \int_{\frac{w+x}{y}}^{a} \right] \varphi dy dz,$$

gültig für $a > 2$, während für $a < 2$ addirt werden muss:

$$\int_{a^2-a}^{a} dw \int_{a^2-w}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy \int_{-a}^{a} dz.$$

Die zwei Noten beziehen sich auf die nachträgliche, in der ersten Einsendung noch fehlende Ergänzung für $a < 2$, welche in Miller's Ausgabe bereits hinzugefügt ist. H.

B. Abdank-Abakanowicz. Sur un intégrateur, instrument servant à l'intégration graphique. C. R. XCII. 402-405, 515-519.

Construirt man über derselben Abscissenaxe für gemeinsame Abscisse die Differential- und Integralcurve, so dass die Ordinate der letzteren den Flächeninhalt zwischen der ersteren, der Axe, der Ordinate und einer Anfangsordinate darstellt, so hat man zwischen beiden Curven folgende Beziehung. In jedem Punkte der Integralcurve ist die Tangente parallel der Geraden, welche durch den entsprechenden Punkt der Differentialcurve geht und von der Abscisse auf der Axe die Linieneinheit abschneidet (die Axe also im Punkte $x = 1$ trifft). Auf diese Eigenschaft gründet sich die Einrichtung des hier beschriebenen Instruments, welches bewirkt, dass, wenn man einen Stift längs einer gegebenen Curve führt, ein anderer deren Integralcurve zeichnet. Die genannte Linieneinheit bleibt dabei fest, und statt ihrer wird die Zeichenfläche in der Richtung der x mit der linken Hand geschoben, während die rechte den Stift auf und nieder führt, wodurch ein Cylinder in der Richtung der y längs seiner Axe gleitet, der zwischen zwei Linealen durch Friction zum Rollen gebracht wird, so dass das obere Lineal auf der Cylinderfläche eine Schraubenlinie von variabler Steigung, eben jener der genannten Geraden beschreibt und in dieser Richtung den Stift bewegt. Das Instrument ist auf p. 516 abgebildet. Es kann auch umgekehrt zur Zeichnung der Differentialcurve gebraucht werden. H.

W. W. Johnson. On a theorem relative to the description of areas. Brit. Ass. Rep. 1881.

Die Arbeit enthält einen neuen Beweis für das Princip des Amsler'schen Planimeters. Sie giebt ferner einen neuen Beweis für den Satz von Holditch, der die Fläche einer von einem festen Punkt in einer beweglichen Linie beschriebenen Curve als Function der Flächen der von ihren Endpunkten beschriebenen Curven ausdrückt. Csy. (O.).

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

H. W. L. Tanner. A paradox in the theory of ordinary differential equations. Mess. (2) X. 158-160.

Ein System von n Gleichungen wie

$$f(y, x, c_1, c_2, \dots c_m) = 0,$$

wo $c_1, c_2, \dots c_m$ Constante sind, kann als eine allgemeine Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung betrachtet werden, vorausgesetzt, dass $m+1 = 2n$. Eine andere Form der Lösung, welche diese als einen speciellen Fall einschliesst, wird durch p Gleichungen der Form

$$f(y, x, c_1, c_2, \dots c_{m'}) = 0$$

und q Gleichungen der Form

$$g(c_1, c_2, \dots c_{m'}) = 0$$

gegeben, wo $m'+1 = p+q$. Der Verfasser macht auf einige scheinbare Widersprüche in diesen Lösungen aufmerksam und erläutert dieselben. Glr. (O.).

P. J. Hollman. Eenige toepassingen van de theorie der singuliere integralen by differentiaal-vergelijkingen der eerste orde. Nieuw Arch. VII. 59-77, 150-163.

Der Verfasser beschäftigt sich mit der Theorie der singulären Integrale bei Differentialgleichungen der ersten Ordnung. Zuerst behandelt er die beiden bekannten Methoden zur Aufsuchung eines singulären Integrals, nämlich durch Differentiation des allgemeinen Integrals und direct mittels der Differentialgleichung. Sodann wird diese Theorie an einer Reihe von Beispielen erläutert, welche der ebenen Geometrie entnommen werden. G.

A. Winckler. Ueber die transcendenten Integrale von Differentialgleichungen erster Ordnung mit Coefficienten zweiten Grades. Wien. Ber. LXXXIV, 940-964.

In einer Abhandlung der Wien. Ber. LXIV. (siehe F. d. M. III. 1871. p. 146) hatte der Verfasser einige Fälle untersucht, in welchen die Differentialgleichung

$$f(x,y)\,dx+\varphi(x,y)\,dy=0,$$

wo f und φ Polynome zweiten Grades in x und y bedeuten, ein algebraisches Integral besitzt. Hier werden solche Fälle ermittelt, in denen sich die Gleichung mittels einer oder zweier linearer Substitutionen auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen lässt. Die dabei befolgte Methode ist eine indirecte. Es wird eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung zu Grunde gelegt und die Bedingung gesucht, unter der dieselbe mit der gegebenen Gleichung mit Hülfe einer oder zweier linearer Substitutionen zur Uebereinstimmung gebracht werden kann. Die Anzahl der Relationen, die von den Coefficienten der gegebenen Gleichung erfüllt werden müssen, ergiebt sich in allen untersuchten Fällen, die übrigens einen grossen Grad von Allgemeinheit besitzen, gleich 3. Die Integrale sind im Allgemeinen transcendent. Zum Schlusse wird eine interessante Erweiterung des bekannten Satzes gegeben, wonach die Differentialgleichung

$$\varphi(x,y)\,dx+\psi(x,y)\,dy+(x\,dy-y\,dx)f(x,y)=0,$$

wo φ und ψ homogene Functionen des m^{ten}, f eine solche des n^{ten} Grades ist, stets auf eine lineare Differentialgleichung zurück-

geführt werden kann. Herr Winckler zeigt, dass dasselbe von der Gleichung

$$\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy+(xdy-ydx)f(x,y)F(xe^{\vartheta\left(\frac{x}{y}\right)})=0$$

gilt, worin

$$\int\frac{\psi(1,u)du}{\varphi(1,u)+u\psi(1,u)}=\vartheta(u)$$

gesetzt ist, und F die Characteristik einer beliebigen Function bezeichnet. Hr.

P. C. V. Hansen. Bemärkninger om Integration af Differentialligningen $f\left(\frac{du}{dz},\ u\right)=0$. Kopenh., Overs. 1881. 156-170.

Der Verfasser untersucht die Möglickeit, der Differentialgleichung $f(u',u)=0$, wo f sowohl in u' als in u rational ist (der Grad in u' sei n) mittels algebraischer oder einfach periodischer Functionen von z zu genügen. Im ersten Falle müssen bei der Bestimmung von

$$z+C=\int\varphi(u)du,$$

wo $\left(\varphi(u)=\frac{1}{u'}\right)$, sämmtliche Periodicitätsmoduln verschwinden. Es besteht dann unter z und u eine algebraische Gleichung, deren Grad in z gleich n ist, und deren Grad in u bestimmt werden kann, indem man sucht, wie oft z als Function von u unendlich wird. Sind die Grade gefunden, so bleibt nur die Bestimmung der Coefficienten übrig. Soll die Gleichung mittels periodischer Functionen integrirbar sein, so darf das Integral $\int\varphi(u)du$ nur logarithmisch unendlich werden, und alle Periodicitätsmoduln müssen sich auf einen einzigen p reduciren lassen. Man hat dann zwischen u und $e^{\frac{2pi}{P}(z+C)}$ eine algebraische Gleichung, welche analog mit der vorigen behandelt werden kann. Die Periodicitätsmoduln können nur durch Annäherung bestimmt werden; wie dies geschehen kann, wird an einem Beispiele gezeigt. Gm.

L. Fuchs. Sur une équation différentielle de la forme $f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$. C. R. XCIII. 1063-1065.

Die von den Herren Briot und Bouquet zuerst gelöste Aufgabe, alle Gleichungen von der Form

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^m = F(u) = (u-a_1)^{n_1}(u-a_2)^{n_2}\dots,$$

welche eindeutige und doppelt-periodische Functionen zu Integralen haben, zu ermitteln, erledigt sich in überraschend einfacher Weise durch Anwendung einer Integrationsmethode, die Herr Hermite in seinen „Leçons à l'École Polyt." angegeben hat. Das Geschlecht p der Gleichung $\eta^m = F(u)$ muss nämlich in diesem Falle gleich 1 sein. Sind nun die reducirten Brüche von $n_i : m$ und $(n_1+n_2+\cdots) : m$ resp. $\nu_i : \mu_i$ und $\nu : \mu$, so liefert die Riemann'sche Formel

$$w = m\left(\zeta - \Sigma\frac{1}{\mu_i} + 1 - \frac{1}{\mu}\right),$$

wo ζ die Anzahl der Punkte $a_1, a_2, \dots$, für die $\mu_i > 1$, bezeichnet und Σ sich auf dieselben Punkte erstreckt. Da hier $w = 2m$ ist, so erhält man

$$\zeta - 1 = \Sigma\frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu}.$$

Eine leichte Ueberlegung ergiebt, dass $\zeta \geqq 2$ und $\leqq 4$ sein muss. Hieraus schliesst man, dass nur die drei Fälle zu betrachten sind:

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu} = 1; \quad \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu} = 2;$$

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4} + \frac{1}{\mu} = 3.$$

Die Lösungen dieser Gleichungen liefern die von den Herren Briot und Bouquet (a. a. O. cah. 36 p. 222) aufgestellte Tabelle.

Hr.

L. Fuchs. Sur les fonctions de deux variables, qui naissent de l'inversion des intégrales de deux fonctions données. C. R. XCI. 1330-1332, 1401-1404; Darb. Bull. (2) V. 52-88.

Auszug resp. Uebersetzung der im Vorhergehenden besprochenen Arbeit. Hr.

L. Königsberger. Ueber die Irreductibilität von Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1881. 222-225.

Den Irreductibilitätsbedingungen, welche der Verfasser in seiner Arbeit „Allgemeine Bemerkungen zum Abel'schen Theorem" Borch. J. XC. p. 109-163 (s. F. d. M. XII. 1880. 320) angegeben hat, wird eine andere Form gegeben, die für manche Untersuchungen brauchbarer ist. Daran werden Erweiterungen früher mitgeteilter Sätze geknüpft, welche die Erhaltung der algebraischen Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen und den Zusammenhang zwischen dem allgemeinen Integral und den particulären beliebiger Differentialgleichungen betreffen. Von der neuen Irreductibilitätsdefinition wird noch eine Anwendung auf die Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen gemacht. Eine nähere Angabe des Inhalts dieser ohne Beweis mitgeteilten Sätze wird in dem Berichte über die inzwischen erschienene darauf bezügliche ausführliche Arbeit das nächste Jahr erfolgen. Hr.

L. Königsberger. Ueber algebraisch logarithmische Integrale nicht homogener linearer Differentialgleichungen. Kronecker J. XC. 267-281.

Die Resultate dieser Arbeit, die eine Erweiterung eines Abel'schen Satzes über Integrale von algebraischen Functionen auf Integrale von linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung enthält, hat der Verfasser bereits in den Gött. Nachr. 1880 p. 453 (s. F. d. M. XII. p. 237) mitgeteilt. Was die Ableitung derselben betrifft, so beschränken wir uns hier darauf, den Gang des Beweises für den ersten Satz, der sich auf Differentialgleichungen mit algebraischen Integralen bezieht, andeutungsweise wiederzugeben. Die Differentialgleichung sei

$$(1) \qquad z^{(m)} + Y_1 z^{(m-1)} + Y_2 z^{(m-2)} + \cdots + Y_m z = y_1,$$

wo $Y_1, \dots Y_m, y_1$ algebraische Functionen von x bedeuten. Sie besitze ein Integral z_1, das die Wurzel einer mit Adjungirung der Grössen $Y_1, \dots Y_m$ irreductiblen Gleichung in z sei; dann giebt dieses, in der linken Seite von (1) substituirt, einen Ausdruck U, der sich als rationale Function von $z_1, x, Y_1, \dots Y_m$ darstellen lässt und gleich y_1 sein muss. Angenommen nun, es liesse sich diese Beziehung zwischen y_1 und z_1 nicht rational umkehren, so müssten für jedes x bei denselben Functionswerten der $Y_1, \dots Y_m$ mindestens zwei Wurzeln z_1, z_2 der Gleichung in z demselben y_1 zugehören, und man erhielte aus (1), wenn man $z_2 - z_1 = \zeta$ setzt,

$$\zeta^{(m)} + Y_1 \zeta^{(m-1)} + \cdots + Y_m(\zeta) = 0;$$

ζ wäre also ein Integral der reducirten Gleichung von (1), welches dann algebraisch sein müsste, so zwar, dass ζ nicht eine rationale Function von $x, Y_1, \dots Y_m$ sein könnte, weil sonst, wie leicht erhellt, die Gleichung in z gegen die Voraussetzung reductibel wäre. Wenn also die reducirte Gleichung von (1) entweder gar kein algebraisches Integral oder nur solche, die rational in $x, Y_1, \dots Y_n$ sind, besitzt, so wird sich z_1 als rationale Function von $x, Y_1, \dots Y_n$ und y_1 darstellen lassen, welches der zu beweisende Satz ist. Wir erwähnen noch, dass der zweite Satz, der sich auf Differentialgleichungen mit logarithmischen Integralen bezieht, in der vorliegenden Arbeit eine Erweiterung erfährt.

Hr.

L. Königsberger. Ueber den Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralen von Differentialgleichungen. Kronecker J. XCI. 265-301.

Die Aufgabe ist: „Es sollen alle algebraischen Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung characterisirt werden, welche die Eigenschaft haben, dass sich ihr allgemeines Integral y als algebraische Function der unabhängigen Variablen x, einer bestimmten Anzahl particulärer Integrale $y_1, \dots y_\mu$ und m willkürlicher Constanten $c_1, \dots c_m$ ausdrücken lässt. Es soll ferner die Form dieser algebraischen Function selbst ermittelt werden.“ Mit Hülfe des vom

Verfasser gefundenen Satzes, der die Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen einer Differentialgleichung bei der Substitution beliebiger anderer Integrale derselben aussagt, wird zunächst folgender Satz festgestellt: „Findet eine Relation von der Form

$$y = F(x, y_1, \dots y_\mu, c_1, \dots c_m),$$

(F algebraische Function) statt, so bestehen die μ Gleichungen

$$y_i = F\{x, F(x, y_1, \dots y_\mu, k_{11}^i, \dots k_{1,m}^i) \dots F(x, y_1, \dots y_\mu, k_{\mu,1}^i, \dots k_{\mu,m}^i, c_1, \dots c_m)\},$$
$$i = 1, 2 \dots \mu$$

identisch in den Grössen $y_1, \dots y_\mu$ für willkürliche Werte von $c_1, \dots c_m$, während die Constanten k bestimmte Functionen der c sind.“ Wie nun diese Identitäten zur Beantwortung der gestellten Frage zu verwenden sind, davon wird in der vorliegenden Arbeit in der Discussion der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung unter der Voraussetzung, dass $\mu = 1$ ist, ein Beispiel gegeben und dabei die verschiedenen Methoden benutzt, wie sie für Differentialgleichungen höherer Ordnung gebraucht werden. Für die Resultate dieser Untersuchung, die bereits in den Gött. Nachr. 1880 p. 625-630 mitgeteilt sind, verweisen wir auf den bezüglichen Bericht im vorigen Bande des Jahrbuchs p. 238 (hierbei sei gelegentlich ein Druckfehler berichtigt: statt $\frac{dx}{dy}$ lies $\frac{dy}{dx}$). Wir fügen noch das Ergebnis für den Fall hinzu, dass die gesuchte Relation zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale x nicht enthält, also von der Form $y = F(y_1, c)$ ist. Als notwendige und hinreichende Bedingung hierfür wird gefunden, dass die Differentialgleichung die Form

$$\frac{dy}{dx} = \mu(x)\,\lambda(y)$$

habe, wo $\mu(x)$ eine willkürliche algebraische Function von y bedeutet und $\lambda(y)$ eine solche algebraische Function von y, dass $\frac{dy}{\lambda(y)}$ ein Differential erster Gattung vom Geschlecht 1 ist. Schliesslich sei bemerkt, dass der allgemeinen Untersuchung die einfachere Behandlung der linearen Differentialgleichung m^{ter}

Ordnung

$$y^{(m)}+f_1(x)y^{(m-1)}+\cdots+f_m(x)y = \varphi(x)$$

vorausgeschickt wird, deren allgemeines Integral bekanntlich

$$x=\varphi_1\eta_1+\varphi_2\eta_2+\cdots+\varphi_m\eta_m+\eta_1\int\frac{\Delta_1}{\Delta}\varphi(x)\,dx+\cdots+\eta_m\int\frac{\Delta_m}{\Delta}\varphi(x)dx$$

ist, wo $\eta_1,\dots\eta_m$ die Integrale der reducirten Gleichung

$$\Delta = \Sigma\pm\eta_1\eta_2'\dots\eta_m^{(m-1)},\quad \Delta_i = \frac{\partial\Delta}{\partial\eta_i^{(m-1)}}$$

und $\varphi_1,\dots\varphi_m$ Constante sind. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen dem allgemeinen und m particulären Integralen eine algebraische Beziehung stattfindet, ist die, dass die Summe der mit η multiplicirten Integrale eine algebraische Function von $\eta_1,\dots\eta_m$ ist. Hr.

L. KÖNIGSBERGER. Ueber einen Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen den Integralen verschiedener Differentialgleichungen und deren Differentialquotienten. Gött. Nachr. 1881. 6-10.

L. KÖNIGSBERGER. Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen und deren Differentialquotienten. Kronecker J XCI. 199-215.

Das in einer früheren Arbeit des Verfassers: „Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen" Borchardt J. LXXXIV. p. 284-294 (s. F. d. M. X. 1878. 243) bewiesene Theorem erhält folgende Erweiterung: „Findet zwischen einem particulären Integrale einer irreductiblen Differentialgleichung und dessen Ableitungen eine algebraische Beziehung statt, so bleibt diese bestehen, wenn für das Integral der irreductiblen Differentialgleichung irgend ein anderes particuläres Integral gesetzt wird, vorausgesetzt, dass für das Integral der anderen Differentialgleichung ein bestimmtes anderes substituirt wird." Nachdem ferner die Existenz von irreductiblen linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und

die Beschaffenheit derselben festgestellt worden, wird unter Voraussetzung dieser Irreductibilität die allgemeinste algebraische Beziehung, die zwischen zwei Fundamentalintegralen derselben y_1, y_2 und ihren ersten Differentialquotienten stattfinden kann, in folgender Form dargestellt:

$$y'_2 = y'^{B}_1 \varphi \left\{ \frac{y'_1}{y_1},\ y_2 + \frac{a y_1}{b-1} y_1^{-b} \right\} - \frac{A y'_1}{B-1},$$

worin φ eine willkürliche algebraische Function, a, b, A, B Constanten bedeuten. Hr.

S. Lie. Om algebraiske Differentialligninger, der tilstede infinitesimale Transformationer. Christiania Forh. 1881. 1-6.

Die Bestimmung von den infinitesimalen Berührungstransformationen einer vorgelegten Gleichung

$$F(x\,y\,y' \dots y^{(n)}) = 0$$

reducirt sich immer auf die Integration einer linearen Gleichung

$$\frac{d^m V}{du^m} + U_{m-1}(u) \frac{d^{m-1} V}{du^{m-1}} + \dots + U.V = 0.$$

Ist F algebraisch, so ist dasselbe mit der Hülfsgleichung der Fall. Durch Verknüpfung dieser Bemerkung mit Poincaré's neuen bekannten Untersuchungen erhält man u. A. die folgenden Sätze:

1) Die Bestimmung aller infinitesimalen Berührungstransformationen, die eine algebraische Differentialgleichung $F = 0$ invariant lassen, kann immer durch Anwendung von Poincaré's Fuchs'schen Zetafunctionen geleistet werden.

2) Kann eine algebraische Gleichung $F = 0$ durch eine bekannte oder unbekannte Berührungstransformation auf die lineare Form gebracht werden, so wird die Integration von $F = 0$ immer durch Anwendung von Poincaré's Fuchs'schen Zetafunctionen geleistet. L.

F. Casorati. Una formola fondamentale concernente i discriminanti delle equazioni differenziali e delle loro primitive complete. Chelini, Coll. Math. 307-312

Aus der Gleichung

$$f(\omega) = f_0\,\omega^m + f_1\,\omega^{m-1} + \cdots + f_m = 0$$

und ihrem Differential, wo ω eine willkürliche Constante und $f_0, f_1 \ldots$ Functionen von x, y bezeichnen, bilde man durch Elimination von ω die Differentialgleichung

$$F(dx, dy) = F_0\,dx^m + F_1\,dx^{m-1}\,dy + \cdots + F_m\,dy^m = 0.$$

Es seien nun g und G die Discriminanten der Gleichungen $f = 0$ und $F = 0$, bei deren Gleichung resp. $dy : dx$ und ω als die Variablen gelten, dann ist

$$G = gk^2,$$

wo k eine ganze rationale Function der Grössen $\frac{\partial f_r}{\partial x}$, $\frac{\partial f_r}{\partial y}$ vorstellt. Der Nachweis dieser Formel bildet den Inhalt der vorliegenden Note. Es ist zu bemerken, dass der Verfasser bereits früher (s. F. d. M. VIII. 1876. 182) für den Fall $m = 2$ diese Relation entwickelt und zugleich die Verallgemeinerung derselben für die Differentialgleichung m^{ten} Grades angekündigt hatte.

Hr.

L. Stickelberger. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig. Teubner.

F. Casorati. Sur la distinction des intégrales des équations différentielles linéaires en sous-groupes. C. R. XCII. 175-178, 238-241.

In einer im B. LXXVI. des Borchardt'schen J. (s. F. d. M. V. 1873. 173) enthaltenen Note hatte Referent, eine von Herrn Jordan ersonnene Methode benutzend, die Gruppe der zu einer vielfachen Wurzel der Fuchs'schen Fundamentalgleichung gehörigen Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung eines singulären Punktes in Untergruppen gesondert von der Eigenschaft, dass die Elemente einer jeden Untergruppe bei Umkreisung um den singulären Punkt nur in lineare homogene Functionen von einander übergehen. Hierbei besteht, was die Zahl der Untergruppen und die Anzahl der Elemente in jeder

derselben betrifft, ein Zusammenhang mit den Weierstrass'schen Elementarteilern der Determinante, welche, gleich Null gesetzt, die Fuchs'sche Fundamentalgleichung liefert. Diese Beziehung ist in der erwähnten Note nur angedeutet. Die Herren Stickelberger und Casorati ergänzen diese Lücke, wobei sie gänzlich verschiedene Wege einschlagen. Der erstere führt die Frage auf die Transformation eines Systems von Differenzengleichungen erster Ordnung mit constanten Coefficienten in ein anderes zurück, das in einfachere Systeme zerfällt, und bewerkstelligt dieselbe mittels des Verfahrens, welches Herr Weierstrass für die Transformation der bilinearen Formen in den Berl. Monatsber. 1868 angewandt hat. Herr Casorati hingegen zieht weitere Consequenzen aus der Jordan'schen Methode und gelangt in überraschend einfacher Weise zum Ziele. Das übereinstimmende Resulat dieser Untersuchungen ist in folgendem Satze enthalten: „Die sämmtlichen Elementarteiler der oben angeführten Determinante, bezüglich der vielfachen Wurzel ω, der Fuchs'schen Fundamentalgleichung seien:

$$(\omega-\omega_1)^e,\ (\omega-\omega_1)^{e'}\dots(\omega-\omega_1)^{e^{(\nu-1)}},$$

so ist die Zahl der Untergruppen $=\nu$, und dieselben bestehen der Reihe nach aus $e, e' \dots e^{(\nu-1)}$ Elementen."

In dem zweiten Teile seiner Schrift beschäftigt sich Herr Stickelberger noch mit der speciellen Klasse von Differentialgleichungen, deren sämmtliche Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes a sich regulär verhalten. Für die Bestimmung der Beschaffenheit der Coefficienten einer solchen Differentialgleichung in der Umgebung von a ist es von Wichtigkeit, nachzuweisen, dass die Functionaldeterminante $\Sigma\pm y_1 y_2' \dots y_n^{(n-1)}$ mit $(x-a)^{-\Sigma r+\frac{n(n-1)}{2}}$ multiplicirt nicht verschwindet, wenn $y_1 \dots y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen und $r_1 \dots r_n$ die zugehörigen Exponenten für $x=a$ bedeuten. Der Beweis, den Herr Fuchs für diesen Satz giebt, reicht für gewisse Fälle nicht aus. Durch eine geschickte Wahl des Fundamentalsystems gelingt es dem Verfasser, den fraglichen Nachweis in allen Fällen zu führen und zugleich den Wert des obigen Productes für $x=a$

anzugeben. In der Einleitung der Schrift des Herrn Stickelberger finden sich historische Angaben, die zu einer irrtümlichen Vorstellung über die Geschichte der Entwickelung der neueren Theorie der linearen Differentialgleichung Anlass geben könnten. Herrn Fuchs allein gebührt das Verdienst, zuerst öffentlich das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung der Punkte, für welche die Coefficienten unendlich gross werden, untersucht zu haben. Wenn Herr Stickelberger nämlich die Arbeit von Riemann über die Gauss'sche Reihe citirt, so ist zu bemerken, dass die Bedeutung dieser Arbeit und ihre Stellung zur allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichung erst durch die Arbeiten des Herrn Fuchs auf diesem Gebiete erkannt und klar gelegt worden ist. Was aber die nachgelassene Abhandlung von Riemann (Werke, herausgegeben von Weber p. 357) betrifft, so muss darauf hingewiesen werden, dass dieser Nachlass erst im Jahre 1876 erschien, während die erste Arbeit des Herrn Fuchs über lineare Differentialgleichungen schon im Winter 1864-65 als Programm der Friedrich Werder'schen Gewerbeschule und dann im Borchardt'schen Journale Bd. LXVI. publicirt worden ist. Hr.

F. Casorati. Sopra un recentissimo scritto del Sig. L. Stickelberger. Brioschi Ann. (2) X. 154-158.

Der Verfasser, dem man die systematische Uebertragung der Resultate der Differenzenrechnung auf das Gebiet der variablen Grössen, insbesondere auf die Theorie der Differentialgleichung mit veränderlichen Coefficienten verdankt, findet sich in der Art, wie ihn Herr Stickelberger in der oben besprochenen Schrift citirt, beeinträchtigt. Nach einer Bemerkung des Herrn Stickelberger könnte es scheinen, als ob die Arbeit „Il calcolo delle differenze" (Brioschi Ann. (2) X.) des Herrn Casorati die Einteilung der Integrale der linearen Differentialgleichungen in Gruppen zum Gegenstande hat, während es sich daselbst nur um die Darlegung eines Princips handelt, so dass zu einer Kritik über die Zweckmässigkeit seines Verfahrens für die in Rede stehende

Frage kein Anlass vorlag. Wie aus vorstehendem Referat zu ersehen, hat er diese Frage inzwischen in einer besonderen Note erledigt. Einer anderen Bemerkung des Herrn Casorati gegenüber erkennt Referent gern an, dass dessen Einführung des Logarithmus ad hoc selbstredend der principiellen Bedeutung ermangelt, welche sie in der Verwendung des Herrn Casorati gewonnen hat. Hr.

L. W. Thomé. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. (Fortsetzung.) Kronecker J. XCI. 78-198.

L. W. Thomé. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. (Nachtrag zur vorhergehenden Abhandlung.) Kronecker J. XCI. 341-346.

Es werden die homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten weiter behandelt, in welchen der Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrücke (nach der Bezeichnung des Herrn Verfassers in Borchardt J. LXXXIII. cf. F. d. M. IX. 1877. 232) darstellbar ist. Sei

$$F_m(y, x) = 0$$

eine Differentialgleichung dieser Beschaffenheit; das zugehörige System ist dann:

$$(1) \qquad F_{\alpha_0}(y, x) = y_1, \; F_{\alpha_1}(y, x) = y_2, \ldots, F_{\alpha_l}(y, x) = F_m(y, x),$$

wo

$$F_{\alpha_k}(y, x) = e^{w_k}\bar{F}_{\alpha_k}(e^{-w_k}y_k, x)$$

und w_k eine rationale Function von x ist, die in Partialbrüche zerlegt, zum ersten Gliede Null hat, und wo $\bar{F}_{\alpha_k}$ ein regulärer Differentialausdruck α_k^{ter} Ordnung ist. In den ersten beiden Abschnitten werden die Integrale der Differentialgleichung in der Umgebung eines singulären Punktes $x = a$ dargestellt. Hierzu denkt man sich die Zerlegung von $F_m(y, x)$ in die Bestandteile (1) derart ausgeführt, dass w_k von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ oder gleich Null ist, und je zwei aufeinanderfolgende Grössen w_k von einander ver-

schieden sind, und der Coefficient der höchsten Ableitung in $\overline{F}_{\alpha_k}$ gleich 1 ist. Betreffs der Wurzeln der Exponentengleichung von $\overline{F}_{\alpha_k}=0$ für $x=a$ wird zunächst die Voraussetzung gemacht, dass keine derselben von irgend einer Wurzel der Exponentengleichung von $\overline{F}_{\alpha_\gamma}=0$, wo $\gamma \gtrless k$ ist, sich nur um eine ganze Zahl unterscheidet. Ist λ die Zahl, welche angiebt, wie viele Wurzeln der Exponentengleichung von $\overline{F}_{\alpha_k}$ sich von einer derselben r_a nur um eine ganze Zahl unterscheiden, so giebt es in diesem Falle im Ganzen eine Gruppe von λ Integralen der Differentialgleichung $F_m=0$, in denen die Exponenten $x-a$ sich von r_a nur um ganze Zahlen unterscheiden. Die Coefficienten der Logarithmenpotenzen von der Form $(x-a)^{r_a}\varphi_{ab}(x)$ in dem bekannten Ausdruck für die genannte Gruppe werden zuvörderst durch eine Summe einer endlichen Anzahl von mehrfachen Integralen gegeben, jedes der nach einander zu bildenden allgemeinen Integrale aber alsdann durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt vermöge der Formel

$$\int (x-a)^r\psi(x-a)\,dx = \frac{(x-a)^{r+1}}{e^{2r\pi i}-1}\int' \psi((x-a)\alpha)\,\alpha^r\,d\alpha,$$

wo $\int'$ ein geschlossenes Integral bedeutet, das sich über den Umfang des um den Nullpunkt der α-Ebene mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises erstreckt, ψ eine in der Umgebung von $x=a$ eindeutige und, mit Ausnahme von $x=a$ selbst, stetige Function und r nicht ganzzahlig ist. Für die Entwickelung der Integrale in unendliche nach positiven und negativen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen werden sodann die Coefficienten durch unendliche Reihen gegeben, von denen jedes einzelne Glied durch eine endliche Anzahl nacheinander auszuführender geschlossener Integrationen erhalten wird. Angesichts der kaum übersehbaren complicirten Rechnungen, welche schon zur Herstellung der unter dem Zeichen des mehrfachen bestimmten Ingrals auftretenden Grössen erforderlich sind, sei hier darauf hingewiesen, dass in der Abhandlung des Referenten: „Ueber ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen etc.“

in Borchardt's J. LXXXIII. 203 (s. F. d. M. IX. 1877. 289) die in Rede stehenden Coefficienten, und zwar für Integrale beliebiger irregulärer Differentialgleichungen mit in der Umgebung von $x=a$ eindeutigen Coefficienten, durch unendliche Reihen von viel einfacherer Gestalt ausgedrückt sind. Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit der Berechnung der Werte der Integrale mit beliebig vorgeschriebener Annäherung. Es handelt sich hier vornehmlich um die Ermittelung einer positiven Grösse, die gleich oder grösser ist als der Modul der Potenzreihe $\sum\limits_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ für gleiche Werte von x innerhalb des Convergenzbezirks der Reihe, falls dieselbe als Integral einer bei $x=a$ regulären Differentialgleichung genügt. Die angewandte Methode besteht in der Vergleichung der gegebenen Differentialgleichung mit einer anderen, deren Integral für gleiche Werte von mod. $(x-a)$ einen grösseren Modul hat. Bei dieser Gelegenheit wird der Convergenzbeweis, den Herr Fuchs für die fragliche Reihe in Borchardt's J. LXVI. 148 gegeben hat, vereinfacht und dahin fortgeführt, dass man zu einer durch einen geschlossenen Ausdruck integrirbaren Differentialgleichung gelangt. Der Modul dieses Ausdrucks ist die gesuchte Grösse. Es folgt (§ 4) die Fortsetzung eines Integrals, welches in der Umgebung eines Punktes entwickelt ist, längs einer sich selbst nicht schneidenden Linie nach irgend einem anderen Punkte und die Darstellung der erhaltenen Function durch ein in der Umgebung des letzteren Punktes entwickeltes Integralsystem nach der Abhandlung in Borchardt J. LXXXVII. p. 222 (siehe F. d. M. XI. 1879. p. 231). In den §§ 5 und 6 wird die oben erwähnte specielle Voraussetzung über die Wurzeln der Exponentengleichung von $\overline{F}_{a_k}=0$ durch die allgemeinere ersetzt, dass in einem System normaler Ausdrücke von der Form (1) die Exponentengleichung der zu dem letzten Bestandteil gehörigen regulären Differentialgleichung Wurzeln enthalte, die sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, während sich solche Wurzeln in der Exponentengleichung der zu den vorhergehenden Bestandteilen gehörigen Differentialgleichungen nicht vorfinden, über die sonst weiter nichts vorausgesetzt wird. Wie man nun einen ge-

gebenen Differentialausdruck $\mathfrak{F}_m(y, x)$ mit rationalen Coefficienten auf die Form

$$(2) \qquad F_{m-k}(y, x) = s, \quad F_k(s, x) = F_m(y, x)$$

bringen kann, wo F_k durch ein System normaler Ausdrücke von der Form (1) darstellbar ist, derart, dass der Grad k den grösstmöglichen Wert annimmt, davon handeln die §§ 7 und 8. Die Form (2) heisst die canonische Form des Differentialausdrucks $F_m(y, z)$; F_k der normale, F_{m-k} der nicht-normale Bestandteil desselben. Der Fall $k = m$ führt auf das System (1), welches den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet. Die erhaltenen Resultate werden im letzten Abschnitt zur Untersuchung der Integrale einer gegebenen Differentialgleichung $F_m(y, x)$ angewandt. Im Nachtrag wird gezeigt, dass man im Allgemeinen $(k—m)$ solche Systeme normaler Ausdrücke aus der normalen canonischen Form von F_m herleiten kann, welche in der Umgebung eines singulären Punktes die oben erwähnte allgemeinere Voraussetzung erfüllen. Am Schlusse giebt der Herr Verfasser mit Bezugnahme auf das in diesem Jahrbuche Bd. XI. 231 ff. enthaltene Referat eine Darlegung der Beziehung seiner Abhandlung im LXXXVII. Bande des Borchardt'schen Journals zu der des Herrn Fuchs im LXXV. Bande. Wenn Herr Thomé darauf hinweist, dass er die Convergenz der Ausdrücke für die Constanten in den linearen Relationen zwischen den zu zwei aufeinanderfolgenden singulären Punkten zugehörigen Integralsystemen nachgewiesen hat, so bemerken wir, dass dies in dem gedachten Referat ausdrücklich „als dem Herrn Thomé eigentümlich" hervorgehoben ist. Dagegen vermissen wir die Erwähnung, dass die Bestimmung der Constanten selbst, wie sie in No. 3 der citirten Abhandlung des Herrn Thomé auseinandergesetzt ist, nicht nur im Resultate mit der von Herrn Fuchs gegebenen übereinstimmt, was allein von Herrn Thomé an der betreffenden Stelle p. 244 gelegentlich angemerkt ist, sondern auch der übrigens höchst bemerkenswerten Methode nach gänzlich Herrn Fuchs angehört (a. a. O. No. 6-10). Hr.

D. André. Intégration, sous forme finie, d'une nouvelle espèce d'équations différentielles linéaires à coefficients variables. C. R. XCII. 121-123; Résal J. (3) VII. 283-288.

Eine lineare Differentialgleichung in y führe bei fortgesetzter Differentiation für $x = 0$ zu der recurrenten Gleichung

$$A_0 F(n) y_0^{(n)} + A_1 F(n-1) y_0^{(n-1)} + \cdots + A_k F(n-k) y_0^{(n-k)} = 0,$$

gültig für alle Werte von n, die grösser als eine gewisse Zahl sind. Für drei verschiedene Formen von $F(n)$ hat der Verfasser bereits früher die betreffenden Differenzengleichungen in endlicher Form integrirt (Résal J. (3) VI. 27 ff., vgl. F. d. M. XII. 1880. 246). Hier geschieht nun die Integration für die neue Form

$$F(n) = \frac{1}{p(p+1)\ldots(p+n-1)} \cdot \frac{1}{f(n)},$$

wo p eine beliebige Zahl und $f(n)$ ein ganzes Polynomen in n und in Potenzen von der Form a^n bedeutet. $F(n) y_0^n = v_n$ ist das allgemeine Glied einer recurrenten Reihe im eigentlichen Sinne, deren erzeugende Gleichung

$$A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \cdots + A_k = 0$$

ist, und man erhält

$$y = \Sigma \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} f(n) v_n x^n.$$

$f(n) v_n$ ist, ebenso wie v_n, das allgemeine Glied einer recurrenten Reihe im eigentlichen Sinne, und so ist die Integration auf die Summirung einer Reihe zurückgeführt, die der Verfasser in den C. R. LXXXVIII. 740 (F. d. M. XI. 1879. 171) bewerkstelligt hat; das Integral erscheint in endlicher Form aus rationalen Functionen und Ausdrücken von der Form $(1-ax)^p$ zusammengesetzt.

Hr.

G. Dillner. Sur un moyen général de déterminer les relations entre les constantes contenues dans une solution particulière et celles que contiennent les coefficients rationnels de l'équation différentielle correspondante. C. R. XCII. 1498-1500; XCIII. 46-49.

In der Note C. R. XCI. 616 und 721 (vgl. F. d. M. XII. 1880. p. 248) ist gezeigt, dass dem Integrale

$$y = e^{\int \left(A_1 \left(\frac{C}{B}\right)^{n-1} + \dots + A_{n-1} \frac{C}{B} + A_n\right) dx}$$

eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten entspricht, welche durch lineare Gleichungen bestimmt werden, und wo die A und B die dort angegebene Bedeutung haben, während C eine Constante ist. Hier werden umgekehrt die rationalen Coefficienten einer Differentialgleichung als gegeben vorausgesetzt und ein Mittel angegeben, um, sofern es möglich ist, die Relationen zwischen den Constanten, die in diesen Coefficienten, sowie in dem entsprechenden obigen Integral enthalten sind, zu bestimmen. Hr.

G. Dillner. Sur la quadrature dont dépend la solution d'une classe étendue d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. C. R. XCII. 235-237.

G. Dillner. Sur les équations différentielles linéaires simultanées à coefficients rationnels, dont la solution dépend de la quadrature d'un même produit algébrique. C. R. XCII. 289-290.

In einer früheren Note (C. R. XCI., vgl. F. d. M. XII. 1880. p. 247) war eine Klasse von Differentialgleichungen betrachtet worden, deren Lösung sich auf eine Summe von Quadraturen der Form

$$\int \frac{\psi(x)\,dx}{(x-a)^s P(x)^{\frac{1}{n}}}$$

zurückführen lässt, wo $\psi(x)$ und $P(x)$ ganze Functionen bedeuten und $P(x)$ nicht die n^{te} Potenz eines Polynomens ist. In der erst citirten Note wird für $s = 1$ die folgende allgemeine Formel entwickelt:

$$(1)\qquad \sum_{r=1}^{r=\mu} M_r \int_{\xi_r}^{x_r} \frac{\psi(x_r)dx_r}{f(x_r)\,P(x_r)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\psi(a_1)}{f_1(a_1)} \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon_r \log(z_1-\varepsilon_r)+\cdots$$
$$+\frac{\psi(a_k)}{f_1(a_k)} \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon_r \log(z_k-\varepsilon_r)+\text{const.}.$$

Hier sind

$$f(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_k),$$

$M_1, \ldots M_n$ positive ganze Zahlen, $\xi_1, \ldots \xi_r$ Constante, und

$$\varepsilon_r = e^{\frac{2\pi r}{n}\sqrt{-1}}.$$

z_r wird durch die Gleichung

$$z_r = P(a_r)^{\frac{1}{n}} : \varphi(a_r)$$

bestimmt, worin $\varphi(x)$ durch die Gleichung

$$G(x-x_1)^{M_1}\ldots(x-x_\mu)^{M_\mu} = P(x)-[\varphi(x)]^n$$

definirt ist. Die Anzahl der hierfür zu erfüllenden Bedingungsgleichungen $M_1+\cdots+M_\mu$ ist im Allgemeinen grösser als die Zahl der Coefficienten in φ, und die Elimination der letzteren giebt Gleichungen zwischen den oberen Integrationsgrenzen x_r in (1), die das Multiplicationstheorem in der allgemeinsten Form enthalten. Die zweite Note enthält eine Anwendung der Gleichung (1). Setzt man

$$(2)\qquad y_r = e^{X_r + M_r \int_{\xi_r}^{x_r} \frac{\psi(x_r)\,dx_r}{f(x_r)\,P(x_r)^{\frac{1}{n}}}} \qquad (r=1,2,\ldots\mu),$$

wo X_r das Integral einer rationalen Function von x_r, also eine Summe von logarithmischen und rationalen Functionen bedeutet, dann genügen die y_r dem simultanen System

$$\frac{d^n y_r}{dx_r^n} + p_1^{(r)} \frac{d^{n-1}y_r}{dx_r^{n-1}} + \cdots + p_n^{(r)} y_r = 0 \qquad (r=1,2\ldots n),$$

worin $p_1^{(r)} \ldots p_n^{(r)}$ rationale Functionen von x_r sind. Das Product der μ Lösungen (2) derselben nimmt wegen (1) die Form an:

$$y_1 y_2 \cdots y_\mu = e^{\sum_{r=1}^{r=\mu} X_r + J - J_0},$$

indem die rechte Seite der Gleichung (1) mit Wegschaffung der willkürlichen Constante in der Form $J-J_0$ geschrieben ist.

Hr.

H. Poincaré. Sur les fonctions fuchsiennes. C. R. XCII. 333-336, 395-398, 859-861, 957-958, 1198-1200, 1274-1276, 1484-1487; XCIII. 301-303, 581-582.

Die vorliegenden Noten geben in kurzen Andeutungen eine höchst bedeutende Erweiterung der Theorie der analytischen Functionen einer Variablen. Von dem Bestreben geleitet, eindeutige Functionen aufzufinden, die geeignet sind, lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten zu integriren, ist der Verfasser zu einer ausgedehnten Klasse von Functionen gelangt, durch welche die elliptischen Functionen und die Modulfunctionen gleichzeitig in umfassender Weise verallgemeinert werden. Die in Rede stehenden Functionen, die er mit dem Namen Fuchs'sche bezeichnet, werden folgendermassen characterisirt: Eine Gruppe von linearen Substitutionen $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$, wo a, b, c, d Constante sind, die so beschaffen ist, dass sie keine Substitution enthält, die z in einen unendlich benachbarten Wert überführt, heisst „discontinuirliche" Gruppe. Ist in allen Substitutionen der Gruppe $ad-bc=1$, so wird diese Gruppe stets discontinuirlich sein. Unter den Gruppen, die dieser Bedingung genügen, werden nun gewisse Gruppen, von denen die Gruppen der reellen Substitutionen specielle Fälle sind, als Fuchs'sche Gruppen bezeichnet. Sie haben die Eigenschaft, dass durch sie ein gewisser Kreis (Fundamentalkreis) in der z-Ebene, dessen Mittelpunkt zum Nullpunkt und dessen Radius zur Einheit genommen wird, in sich selbst übergeht. Dieser Kreis lässt sich ferner (auf unendlich verschiedene Arten) in eine unendliche Zahl von Gebieten $R_0\, R_1 \dots R_i \dots$ zerlegen, begrenzt von krummlinigen Polygonen, die den Fundamentalkreis orthogonal schneiden, und von denen R_i aus R_0 durch eine Substitution der bezüglichen Fuchs'schen Gruppe hervorgeht. Zugleich bleibt z bei allen

Transformationen durch diese Gruppe innerhalb des Fundamentalkreises, und im Inneren eines R_i liegen nicht zwei correspondirende Punkte, d. h. solche, die durch eine Transformation der fraglichen Gruppe aus einander hervorgehen; wohl aber entsprechen sich die Punkte auf dem Umfange eines R_i derart, dass die Seiten sich paarweise entsprechen (conjugirt sind). Um eine Fuchs'sche Gruppe zu bestimmen, sind die fundamentalen Substitutionen zu ermitteln, aus denen sich alle Substitutionen der Gruppe zusammensetzen lassen. Hierzu ist nur nötig, dass das Polygon R_0 und die Verteilung seiner Seiten in conjugirte Paare gegeben ist. Damit sich nun der Fundamentalkreis in obiger Weise in die Gebiete R_i zerlegen lasse, sind zwei vom Polygon R_0 zu erfüllende Bedingungen erforderlich und hinreichend, die vom Verfasser angegeben werden. Jede eindeutige Function, die durch die Transformationen einer Fuchs'schen Gruppe ungeändert bleibt und im Innern von R_0 nur für eine endliche Zahl von Punkten denselben Wert hat, wird Fuchs'sche Function genannt. Zur expliciten Darstellung derselben führt der Verfasser eine neue Function $\theta(z)$ ein, von der Eigenschaft, dass für alle Substitutionen einer Fuchs'schen Gruppe

$$\theta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \theta(z)(cz+d)^{2m} \quad (m \text{ ganz und} > 1)$$

ist, und nennt sie Theta-Fuchs'sche Function. Dieselbe lässt sich, wenn der Radius des Fundamentalkreises nicht unendlich ist, durch die convergente Reihe

$$\theta(z) = \Sigma H\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)(cz+d)^{-2m}$$

darstellen, wo sich die Summe auf alle Substitutionen der bezüglichen Fuchs'schen Gruppe erstreckt und $H(z)$ eine beliebige rationale Function bezeichnet. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1) Alle Punkte des Fundamentalkreises sind wesentlich singuläre Punkte von $\theta(z)$; dann giebt es keine Fortsetzung der Function vom Inneren des Fundamentalkreises nach aussen, und die Function existirt nur im Innern dieses Kreises; 2) $\theta(z)$ hat unendlich viele, aber isolirte singuläre Punkte auf der Peripherie des Fun-

damentalkreises, dann existirt die Function in der ganzen Ebene. Die Function $\theta(z)$ ist überall im Inneren des Fundamentalkreises meromorph, und man berechnet die Zahl der Null- und Unendlichkeitspunkte im Innern von R_0 durch das Integral $\int \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} dz$, falls keiner der Winkel des Polygons R_0 Null ist. Der Quotient $F(z)$ zweier Theta-Fuchs'schen Functionen, die zu derselben Fuchs'schen Gruppe gehören und demselben m entsprechen, ist eine Fuchs'sche Function. Zwischen zwei Fuchs'schen Functionen, die derselben Gruppe entsprechen, besteht stets, wie leicht erhellt, eine algebraische Gleichung, und alle Functionen derselben Gruppe lassen sich rational als Function zweier von ihnen ausdrücken. Das Geschlecht der algebraischen Gleichung wird durch die Natur des Polygons R_0 bestimmt. Sind $x = F(z)$, $\xi = F_1(z)$ zwei Fuchs'sche Functionen derselben Gruppe, so sind

$$v_1 = \sqrt{\frac{dF}{dz}}, \quad v_2 = z\sqrt{\frac{dF}{dz}}$$

Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung von

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x, \xi),$$

wo φ rational in x und ξ ist, und zwischen x und ξ nach dem Obigen eine algebraische Relation besteht. Auf diese Weise ist die Existenz von Differentialgleichungen zweiter Ordnung dargetan, in denen die unabhängige Variable eine eindeutige Function des Quotienten zweier ihrer Integrale ist. Die Gleichung, welche die Perioden von $\sin am\, x$ als Functionen des Quadrates des Moduls bestimmt, ist ein specieller Fall hiervon. Eine besondere Betrachtung wird dem Falle gewidmet, in welchem φ von der Form P (Polynomen in x)$:(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda$ ist. Bei dieser Untersuchung gelangt der Verfasser zu solchen Fuchs'schen Functionen $x = F(z)$, die nur im Innern des Fundamentalkreises existiren und im Innern dieses Kreises keinen der Werte $a, b, c \ldots l, \infty$ annehmen. In der Möglichkeit, eine derartige Fuchs'sche Function zu construiren, wobei $a, b \ldots l$ beliebig gegebene Werte haben können, liegt ein höchst wichtiges Resultat.

Daraus folgt: 1) Die Coordinaten der Punkte einer beliebigen algebraischen Curve können durch Fuchs'sche Functionen eines und desselben Parameters ausgedrückt werden. Ist nämlich $f(x,y)=0$ die Gleichung der Curve und sind $a, b, \ldots l$ die singulären Punkte der Function y in der x-Ebene, so setze man $x=F(z)$, wo F eine Fuchs'sche Function von der oben definirten Art ist. Lässt man dann z innerhalb des Fundamentalkreises in der z-Ebene einen beliebigen Umlauf machen, so beschreibt x eine geschlossene Curve, die bei der Beschaffenheit von F weder einen der Punkte $a, b, \ldots l$, noch den Unendlichkeitspunkt umschliesst. Folglich kehrt auch y zu seinem anfänglichen Wert zurück und, da dies bei einem beliebigen Umgang von z stattfindet, so ist y auch eine eindeutige, und wie man leicht erkennt, Fuchs'sche Function von z. 2) Es sei eine lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^n v}{dx^n}+P_{n-2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}+P_{n-3}\frac{d^{n-3}v}{dx^{n-3}}+\cdots+P_1\frac{dv}{dx}+P_0 v=0$$

gegeben, wo die P rationale Functionen von x und y sind, zwischen denen eine algebraische Gleichung $f(x,y)=0$ besteht. Die singulären Punkte der Differentialgleichung, die in den Verzweigungs- und Unendlichkeitspunkten von y und in den Unendlichkeitspunkten der P bestehen, seien wieder $a, b, \ldots l, \infty$; dann zeigt man in derselben Weise, dass, wenn man $x=F(z)$ setzt, die n Integrale eindeutige Functionen $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots \varphi_n(z)$ in z sind, die nur im Innern des Fundamentalkreises existiren. Diese Functionen sind jedoch im Allgemeinen nicht Fuchs'sche Functionen, sondern Functionen von der Beschaffenheit, dass

$$\varphi_\lambda\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=A_{1,\lambda}\,\varphi_1(z)+A_{2,\lambda}\,\varphi_2(z)+\cdots+A_{n,\lambda}\,\varphi_n(z),$$

wo $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ eine Substitution einer Fuchs'schen Gruppe bedeutet und die A Constanten sind, deren Determinante für alle Substitutionen der Gruppe die Einheit ist. Solche Functionen $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ nennt der Verfasser Zeta-Fuchs'sche Functionen. Man erhält also das merkwürdige Resultat:

„Jede lineare Differentialgleichung mit algebraischen Coeffi-

cienten ist durch die Fuchs'schen und Zeta-Fuchs'schen Functionen integrirbar, derart, dass man die unabhängige Variable und die Integrale als eindeutige Functionen desselben Parameters z ausdrücken kann."

Für die Zeta-Fuchs'schen Functionen wird ein Ausdruck gegeben, der dem der Fuchs'schen Functionen mittels der θ-Reihen analog gebildet ist. Hr.

H. Poincaré. Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques. C. R. XCII. 698-701.

Zur Bestimmung der linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Integralen ist es zunächst nötig, Substitutionsgruppen aufzufinden, die nur aus einer endlichen Anzahl von Substitutionen bestehen. Herr Jordan hat (Mém. de l'Ac. d. Naples) eine allgemeine Methode zur Lösung dieses Problems gegeben. Sind diese Gruppen bekannt, so handelt es sich um die Bildung der entsprechenden Differentialgleichung. Der Verfasser zeigt nun für den Fall der dritten Ordnung, dass jeder der von Herrn Jordan definirten Gruppen eine unendliche Anzahl von linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung mit algebraischen Integralen entspricht, in denen die Coefficienten rationale Functionen von der unabhängigen Variablen und einem willkürlichen Parameter y sind. Betrachtet man aber die Integrale einer solchen Gleichung als Functionen von x und y, so werden es algebraische Integrale dieser Variablen sein und werden nicht nur der betrachteten gewöhnlichen Differentialgleichung, sondern noch einer unendlichen Zahl linearer partieller Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten genügen. Wie der Verfasser bemerkt, gilt dieses Resultat für alle Ordnungen.

Hr.

H. Poincaré. Sur l'intégration des équations linéaires par le moyen des fonctions abéliennes. C. R. XCII. 913-915.

Bedeuten $x = F(\xi, \eta)$, $y = F_1(\xi, \eta)$ zwei beliebige Abel'sche Functionen, und setzt man

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial F_1}{\partial \eta} - \frac{\partial F_1}{\partial \xi}\frac{\partial F}{\partial \eta}}, \quad z_2 = \xi z_1, \quad z_3 = \eta z_1,$$

so hat die lineare Differentialgleichung in z

$$\Sigma \pm z \frac{dz_1}{dx_1}\frac{dz_2}{dx_2}\frac{dz_3}{dx_3} = 0,$$

deren Integrale $z = z_1$, $z = z_2$, $z = z_3$ sind, zu Coefficienten Abel'sche Functionen von ξ und η, und folglich algebraische Functionen von x und y. Da y ein willkürlicher Parameter ist, so sind auf diese Weise unendlich viele lineare Differentialgleichungen dritter Ordnung mit algebraischen Coefficienten mit Hülfe von Abel'schen Functionen integrirt. Durch Anwendung einer gewissen Substitution erhält man eine allgemeinere Differentialgleichung dritter Ordnung mit algebraischen Coefficienten mit drei willkürlichen Parametern, die in der gleichen Weise integrirbar ist. Der Verfasser untersucht hierauf die durch beide Differentialgleichungen bestimmte Gruppe linearer Substitutionen.

Hr.

P. Appell. Sur une classe d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions algébriques de la variable indépendante. C. R. XCII. 61-63.

In einer früheren Note (C. R. XCI. 972, s. F. d. M. XII. 1880. 250) hatte der Verfasser lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten $\varphi_i(x, y)$ betrachtet, deren Integrale die Eigenschaft haben, überall eindeutig zu sein und keine wesentlich singulären Punkte nach der Weierstrass'schen Bezeichnung zu besitzen. Hierbei wurde die Voraussetzung gemacht, dass die Punkte, für welche einige φ unendlich werden, nicht mit den Verzweigungsstellen der algebraischen Function y von x zusammenfallen. Es wird hier nun gezeigt, dass die a. a. O. gemachten Schlüsse sich auch auf den ausgeschlossenen Fall ausdehnen lassen. Ist $x = \xi$ ein Windungspunkt $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, für

welchen einige der φ unendlich werden, dann gelten die Entwickelungen

$$x = \xi + x'^r, \quad y = \eta + a_1 x' + a_2 x'^2 + \cdots,$$

und die Substitution giebt eine transformirte Gleichung, die zu Coefficienten eindeutige Functionen von x' in der Umgebung von $x' = 0$ hat, von denen einige für $x' = 0$ unendlich werden. Zur Gültigkeit der früheren Sätze ist dann nur notwendig, dass der Punkt $x' = 0$ ein gewöhnlicher Punkt oder ein Pol des Integrals ist. Weiter wird u. A. bemerkt, dass, falls die Coefficienten rationale Functionen von x sind, zu der betrachteten Kategorie die Lamé'schen Gleichungen der verschiedenen Ordnungen und, unter gewissen Bedingungen, die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe gehören. Hr.

P. Appell. Sur des équations différentielles linéaires dont les intégrales vérifient des relations de la forme $F[\varphi(x)] = \psi(x) F(x)$. C. R. XCIII. 699-702.

Eine lineare Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + f_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + f_n(x) y = 0$$

habe die Eigenschaft, dass, wenn man $x = \varphi(t)$ und $y = z\psi(t)$ setzt, φ und ψ so bestimmt werden können, dass die transformirte Gleichung zwischen z und t dieselbe Form wie die ursprüngliche zwischen x und y hat. Die Gleichung (1) hat dann, wenn sie die Lösung $y = \Phi(x)$ zulässt, auch die Lösungen:

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\psi(x)} \Phi[\varphi(x)],$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{\psi(x)} \Phi_1[\varphi(x)], \ldots \quad \Phi_n(x) = \frac{1}{\psi(x)} \Phi_{n-1}[\varphi(x)],$$

woraus dann leicht folgt, dass es mindestens ein Integral $F(x)$ von (1) giebt, welches der Relation

$$F[\varphi(x)] = A\psi(x)F(x) \qquad (A \text{ eine Constante})$$

genügt. (Im Allgemeinen wird es deren n geben). Die erwähnte Bestimmung von φ und ψ ist für Differentialgleichungen

zweiter Ordnung in allen Fällen möglich, und zwar genügt φ einer Differentialgleichung dritter Ordnung (der bekannten Kummer'schen Gleichung für den besonderen Fall, dass die zu Grunde gelegten Differentialgleichungen zweiter Ordnung gleiche Formen haben). Hat die Differentialgleichung die Gestalt $y''-f(x)y=0$, auf die man sie stets bringen kann, dann wird $\psi(t) = c\sqrt{\varphi'(t)}$, so dass ihr Integral $F(x)$ der Relation

$$F[\varphi(x)] = A\sqrt{\varphi'(x)}\,F(x)$$

genügt. Ist $f(x)$ von der Beschaffenheit, dass

$$f\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right) = (\gamma x+\delta)^4 f(x) \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma=1),$$

dann genügt der erwähnten Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\varphi(t) = \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta},$$

und man hat

$$F\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right) = \frac{A}{\gamma x+\delta}F(x),$$

so dass das Integral $F(x)$ mit den Fuchs'schen Functionen im Zusammenhang steht. Hr.

P. Appell. Mémoire sur les équations différentielles linéaires. Ann. de l'Éc. Norm. (2) X. 391-424.

Es sei

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung und $y_1, \dots y_n$ ihre ein Fundamentalsystem bildenden Integrale, so gilt für sie das folgende dem Satze von den symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung analoge Theorem: „Jede ganze rationale Function F von $y_1, \dots y_n$ und ihren Derivirten, die in sich selbst übergeht, multiplicirt mit einem constanten Factor, ist, wenn man $y_1, \dots y_n$ durch die Elemente eines andern fundamentalen Systems ersetzt, gleich einer ganzen rationalen Function der Coefficienten der Differentialgleichungen und ihrer Derivirten, multiplicirt mit einer Potenz von $e^{-\int a_1 dx}$.“ Unter den Anwendun-

gen, die der Verfasser von diesem Theorem macht, heben wir die auf das allgemeine Transformationsproblem der linearen Differentialgleichungen hervor, welches darin besteht, die lineare Differentialgleichung zu bilden, die zum Integrale die Function

$$f(y_1, y'_1, \dots y_1^{(m_1)};\ y_2, y'_2 \dots y_2^{(m_2)}; \dots y_n, y'_n \dots y_n^{m_n})$$

hat, wo f eine ganze rationale Function der Argumente bedeutet, die zu Coefficienten gegebene Functionen von x hat. Endlich werden die linearen Differentialgleichungen betrachtet, zwischen deren Integralen eine algebraische Gleichung mit constanten Coefficienten besteht, und das Mittel angezeigt, die Existenz einer solchen Relation zu erkennen. Es knüpft sich an diese Frage eine Klasse von Invarianten der linearen Differentialgleichungen, die Herr Laguerre zuerst eingeführt hat (C. R. LXXXVIII. 116, 224, s. F. d. M. XI. 1879. p. 235). Ist die Differentialgleichung eine 2ter Ordnung, die man durch Aenderung der unabhängigen Variabeln leicht auf die Form $y''+py=0$ bringen kann, und besteht zwischen den Integralen eine algebraische Relation mit constanten Coefficienten $\varphi(y_1, y_2)=0$, dann folgt aus

$$y_1\,dy_2 - y_2\,dy_1 = C dx \qquad (C \text{ eine Constante})$$

$$Cx = y_1\,y_2 - 2\int y_2\,dy_1.$$

Mithin lässt sich in diesem Falle die Integration der Differentialgleichung auf ein Abel'sches Integral zurückführen, dessen Geschlecht das der Curve $\varphi(y_1, y_2)=0$ ist. Hr.

E. Picard. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. Kronecker J. XC. 281-303.

Die Arbeit giebt in näherer Ausführung die in den C. R. XC. mitgeteilten Sätze, über die in diesem Jahrbuch Bd. XII. p. 256. 257, 273 berichtet worden ist. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit linearen Differentialgleichungen mit doppelt-periodischen Coefficienten erster Art, deren allgemeines Integral eindeutig ist. Ist die Gleichung vom m^{ten} Grade, so wird sie im Allgemeinen m doppelt-periodische Functionen zweiter Art zu Integralen haben.

In allen Fällen erhält man für die Integrale $y_1, \dots y_m$ folgende Relationen:

$$y_1(x+2K) = \lambda_{11} y_1(x),\ y_2(x+2K) = \lambda_{21} y_1(x) + \lambda_{22} y_2(x) \dots$$
$$y_m(x+2K) = \lambda_{m1} y_1(x) + \lambda_{m2} y_2(x) + \dots + \lambda_{mm} y_m(x),$$

und analoge Relationen für den Zuwachs von $2iK'$, wenn $2K$ und $2iK'$ die Perioden der Coefficienten sind. Im zweiten Abschnitt werden Systeme von simultanen linearen Differentialgleichungen mit doppelt-periodischen Coefficienten betrachtet, und insbesondere das System

$$\frac{du}{dt} = -Av + Bw, \quad \frac{dv}{dt} = Au - Cw, \quad \frac{dw}{dt} = -Bu + Cv.$$

Hier giebt es immer ein System von Integralen, welches aus doppelt-periodischen Functionen der ersten Art gebildet ist. Die Perioden sind $2K$ und $2iK'$ oder in gewissen Fällen $4K$ und $4iK'$, wenn A, B, C die Perioden $2K$ und $2iK'$ haben. Es folgt eine Anwendung auf das System

$$\frac{du}{dx} = 2n\, dn x.v, \quad \frac{dv}{dx} = -2n\, dn x.u - hw, \quad \frac{dw}{dx} = hv,$$

dessen Lösungen für beliebiges n angegeben werden. (Vgl. das citirte Referat.) Hr.

G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. C. R. XCII. 1397-1398.

Ankündigung einer Arbeit, die eine lineare Differentialgleichung mit eindeutigen und periodischen Coefficienten zum Gegenstand hat, unter der Voraussetzung, dass das allgemeine Integral eindeutig ist. Hr.

P. Appell. Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. C. R. XCII. 1005-1008.

Die Coefficienten einer linearen Differentialgleichung in y seien eindeutige doppelt-periodische Functionen von x, die keinen wesentlich singulären Punkt im Endlichen haben; für einen Punkt

$x = a$, in welchem einige der Coefficienten unendlich werden, sollen die Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung rationale Zahlen sein, die von einander nur um ganze Zahlen verschieden sind, und es sollen die Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen in der Umgebung von $x = a$ nur von einer endlichen Ordnung unendlich werden und keine Logarithmen enthalten. Sind diese Bedingungen für alle singulären Punkte $x = a$ erfüllt, dann kann man das Integral der Differentialgleichung auf folgendem Wege erhalten. Man setze $z = y^N$, wo N das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Nenner der in den Wurzeln aller Fundamentalgleichungen vorkommenden Brüche ist, und bilde die Differentialgleichung in z. Diese gehört dann in die Klasse der von Herrn Picard (C. R. XC. p. 128, F. d. M. XII. 1880. p. 256) mit Hülfe der Functionen Θ und H integrirten Gleichungen. Ist $z_1, z_2, \dots, z_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung in z, dann ist

$$y = (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_m z_m)^{\frac{1}{N}}$$

ein Integral der Gleichung in y. Es bleibt dann noch die Bestimmung der Constanten $\lambda_1, \dots \lambda_m$, die durch directe Substitution in die vorgelegte Gleichung geschehen kann. Von dieser Methode wird eine Anwendung auf die Lamé'sche Gleichung

$$y'' = (n(n+1)k^2 sn^2 x + h)y$$

gemacht, wenn n von der Form $\frac{2n'+1}{2}$ (n' eine ganze Zahl).

Hr.

F. Brioschi. Théorèmes relatifs à l'équation de Lamé.
C. R. XCII. 325-329.

Herr Hermite hat in den C. R. LXXXV. (F. d. M. IX. 1877. 350) bewiesen, dass ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} = (n(n+1)k^2 sn^2 u + h)y$$

in der Form

$$y = \frac{d^{n-1}v}{du^{n-1}} - a_1 \frac{d^{n-3}v}{du^{n-3}} + a_2 \frac{d^{n-5}v}{du^{n-5}} \cdots$$

dargestellt werden kann, wo

$$v = \frac{H(u+\omega)}{\theta(u)} e^{\left[\lambda - \frac{\theta'(\omega)}{\theta(\omega)}\right] u}$$

ist. Andererseits hatte Herr Hermite schon früher bewiesen, dass

$$y = \frac{H(u+\omega_1)H(u+\omega_2)\dots H(u+\omega_n)}{\theta^n(u)} e^{-u\Sigma\frac{\theta'(\omega)}{\theta(\omega)}}.$$

Der Zweck der vorliegenden Note ist erstens: Zu beweisen, dass zwischen den $\omega_1, \dots \omega_n$ der alten und dem ω der neuen Lösung die Beziehung besteht:

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n + \omega = \text{const.}$$

2) Eine einfache Methode für die Bestimmung von $sn^2\omega$ und λ^2, $a_1, a_2 \dots$ als Function von h und k zu geben. Wie schon Herr Hermite bemerkt hat, sind $sn^2\omega$ und λ^2 rationale Functionen und die Coefficienten $a_1, a_2 \dots$ ganze Functionen des Moduls und von h.

Hr.

G. Humbert. Sur une formule de M. Hermite. S. M. F., Bull. IX. 42-46.

Herr Hermite hat für die Function

$$f(x, a) = \frac{H(x+a)}{\theta(x)} e^{-\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} x},$$

welche der Lamé'schen Gleichung

$$(1) \qquad f''(x, a) = (2k^2 sn^2 x - 1 - k^2 + k^2 sn^2 a) f(x, a)$$

genügt, die Formel gegeben

$$(2) \qquad B\int f(x, a) f(x, b)\, dx = \frac{\theta(x+a+b)}{\theta(x)} e^{-\left[\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{\theta'(b)}{\theta(b)}\right] x}.$$

Der Verfasser zeigt, wie man mit Hülfe der Formel (2) die Gleichung (1) ableiten kann, wenn man von der Zerlegung des Ausdrucks

$$\frac{\theta(x+a+b)\theta(x)}{H(x+a)H(x+b)}$$

in einfache Elemente ausgeht.

Hr.

H. Gyldén. Sur une application nouvelle de l'équation de Lamé. C. R. XCII. 537-538.

Es handelt sich um die angenäherte Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2\varrho}{dv_0^2}+\varrho = \beta_1\varrho+\beta_3\varrho^3+\beta_5\varrho^5+\cdots;$$

v_0 bezeichnet die mittlere Länge, ϱ ist mit dem mittleren Radius vector durch die Gleichung $\varrho = \text{const.} - \frac{1}{r}$ verbunden, und die β bedeuten constante Coefficienten erster Ordnung im Verhältnis zur störenden Kraft. Setzt man $\varrho = \varrho_0+\varrho_1$ und bestimmt ϱ_0 mittels der Gleichung

$$\frac{d^2\varrho_0}{dv_0^2}+\varrho_0 = \beta_1\varrho_0+\beta_3\varrho_0^3,$$

was mit Hülfe elliptischer Functionen geschieht, so erhält man zur angenäherten Bestimmung von ϱ_1 die Lamé'sche Gleichung für $n = 2$, deren vollständige Lösung man Herrn Hermite verdankt. Hr.

F. Brioschi. Sur la théorie des équations différentielles du second ordre. C. R XCIII. 941-942.

Der Verfasser bemerkt als eine wichtige Folgerung aus den von Herrn Kummer in Crelle's J. XV. bewiesenen Sätzen, dass, wenn zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die eine zwischen x und y, die andere zwischen z und t, gleiche Form haben, und $f(x)$ ein Integral der ersteren ist, die Beziehung $f(x) = wf(t)$ stattfindet, während zwischen t und x eine Differentialgleichung dritter Ordnung besteht. w ist durch die Gleichung

$$w^2 = c\,\frac{e^{\int p(x)\,dx}}{e^{\int p(t)\,dt}}$$

bestimmt, wenn p der Coefficient von $\frac{dy}{dx}$ resp. von $\frac{dz}{dt}$ ist. Beispiele hierfür liefert die Theorie der hypergeometrischen und elliptischen Functionen. Hierhin gehört die Legendre'sche Gleichung

$$M^2 = \frac{1}{n}\,\frac{\lambda(1-\lambda^2)}{k(1-k^2)}\,\frac{dk}{d\lambda},$$

(k und λ Moduln, M Multiplicator). Zwischen k und λ besteht eine Differentialgleichung dritter Ordnung. Die neuesten Untersuchungen der Herren Schwarz, Klein, Cayley, Fuchs und Brioschi haben alle das erwähnte System von Gleichungen zum Ausgangspunkt (vgl. übrigens die Note des Herrn Appell C. R. XCIII. 699, siehe pag. 255). Hr.

Ch. Hermite. Sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Brioschi Ann. (2) X. 101-104.

Ist von der Differentialgleichung

$$y''+py'+qy = 0$$

das Product zweier Integrale $uv = f(x)$ bekannt, so lässt sich mit Hülfe von $f(x)$, p und q die Differentialgleichung zweiter Ordnung herstellen, deren Integral $z = cu^{\omega}+c'v^{\omega}$ ist. Sie lautet:

$$Gz''-Hz'+Kz = 0,$$

wo

$$G = f(x),\quad H = (\omega-1)f'(x)+pf(x),$$

$$K = \frac{1}{2}(\omega^2-\omega)f''(x)+\frac{1}{2}(\omega^2-\omega)pf'(x)+\omega^2 f(x)$$

sind. Für $\omega = 0$ geht die Gleichung über in

$$f(x)z''+(f'(x)+pf(x))z' = 0$$

und hat zum allgemeinen Integral

$$z = a+b\log\frac{u}{v} \qquad (a \text{ und } b \text{ Constanten}).$$

Hr.

A. Steen. Lettre à M. Hermite. Darb. Bull. (2) V. 30-37.

Zur Integration einer linearen Differentialgleichung wird folgende Methode angewandt. Durch eine Reihe von Differentiationen und Substitutionen gelange man von der vorgelegten Gleichung zu einer integrirbaren Gleichung; man erhält so die Lösung der ursprünglichen durch wiederholte Integration, und es

ist dann das gefundene vielfache Integral in ein einfaches bestimmtes Integral umzuwandeln. Auf diesem Wege gewinnt der Verfasser für die Gleichung

$$y'' - \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{b}\right) y' + cy = 0$$

für $bc > 2$ das particuläre Integral

$$y = \int_{-\infty}^{x^2} (x^2 - \alpha)^{\frac{1}{2} bc} \alpha^{\frac{a - bc - 1}{2}} e^{\frac{\alpha}{2b}} d\alpha$$

und daraus auch das Integral von

$$v'' + \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{b}\right) v' + cv = 0,$$

welches mit y in der Beziehung

$$v = y' x^{-a} e^{-\frac{x^2}{2b}}$$

steht. Hr.

F. Casorati. Generalizzazione di alcuni teoremi dei sig^i. Hermite, Brioschi e Mittag-Leffler, sulle equazioni differenziali lineari del 2^0 ordine. Brioschi Ann. (2) X. 224-232.

Die citirten Theoreme befinden sich in den C. R. Dec. 1879 und 1880, Brioschi Ann. (2) X. pp. 1 und 101. Sie liefern ein Verfahren, aus den Coefficienten einer gegebenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wenn das Product ihrer Lösungen bekannt ist, eine neue Differentialgleichung zu bilden, deren Lösungen mit denen der gegebenen gewisse Beziehungen haben. Die Verallgemeinerung besteht in Folgendem: Es habe die lineare Differentialgleichung

$$y^{(m)} + py^{(m-1)} + qy^{(m-2)} + \cdots = 0$$

die m Lösungen $u, v \ldots$, dann lassen sich, wie bekannt, die Coefficienten $p, q \ldots$ durch die m Verhältnisse $\frac{u'}{u}, \frac{v'}{v} \cdots$ und deren Ableitungen rational ausdrücken. Setzt man nun

$$G_\nu = \frac{u^{(\nu)}}{u} + \frac{v^{(\nu)}}{v} + \cdots,$$

wo

$$u^{(\nu)} = \frac{d^\nu u}{dx^\nu}, \text{ also } G_0 = m,$$

so bestehen zwischen den symmetrischen Functionen der Verhältnisse $\frac{u'}{u}$, $\frac{v'}{v}$ und deren Ableitungen einerseits und den G und ihren Ableitungen andererseits Relationen, welche die Grundlage der Untersuchung bilden.

Ist $m = 2$ und das Product uv bekannt, so ist

$$G_1 = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

ebenfalls gegeben, und man erhält durch die erwähnten Relationen

$$\frac{u'}{u} \cdot \frac{v'}{v} = \frac{1}{2}(G_1^2 + G_1' + pG_1 + 2q).$$

Es ergeben sich sonach $\frac{u'}{u}$ und $\frac{v'}{v}$ als Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades mit bekannten Coefficienten. Eine beliebige Function $f\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}\right)$ lässt sich also durch x, G_1, G_1', p, q so ausdrücken, dass ausser Quadratwurzeln keine anderen Irrationalitäten als die in f enthaltenen vorkommen. Man kann daher eine neue Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$Y'' + PY' + QY = 0$$

herstellen, deren Lösungen U, V mit u, v die Relationen

$$\frac{U'}{U} = \varphi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}\right), \quad \frac{V'}{V} = \psi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}\right)$$

haben, und in denen sich die Coefficienten P, Q, da sie sich rational in φ, ψ und ihren Ableitungen ausdrücken, in der erwähnten Weise mittels x, G, G', p, q darstellen lassen. Geeignete Specialisirungen von φ und ψ führen auf sämmtliche von den genannten Mathematikern gefundenen Sätze. Für $m = 3$ ergeben sich, wenn G_1 und G_2 gegeben sind, vermöge der erwähnten fundamentalen Relationen $\frac{u'}{u}$, $\frac{v'}{v}$, $\frac{w'}{w}$ als Wurzeln einer Gleichung dritten Grades, deren Coefficienten rational durch G_1, G_2 und ihre Ableitungen und durch die Coefficienten der gegebenen

Differentialgleichung dritter Ordnung ausgedrückt sind. Man schliesst daraus wie oben, dass man mittels derselben Grössen die Coefficienten einer zweiten Differentialgleichung dritter Ordnung bilden kann, deren Integrale U, V, W mit u, v, w die Beziehungen haben:

$$\frac{U'}{U} = \varphi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{w'}{w}\right), \quad \frac{V'}{V} = \psi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{w'}{w}\right),$$

$$\frac{W'}{W} = \chi\left(x, \frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{w'}{w}\right).$$

Ist aber $m>3$, so lässt sich dieses Verfahren nicht in derselben Weise fortsetzen, da z. B. für $m = 4$, wenn etwa G_1, G_2, G_3 bekannt sind, die zu Grunde gelegten Relationen nicht eine hinreichende Zahl von Gleichungen liefern, um die symmetrischen Functionen von $\frac{u'}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{w'}{w}, \frac{t'}{t}$ allein durch die G und ihre Ableitungen und die Coefficienten der gegebenen Differentialgleichung, deren Lösungen durch u, v, w, t bezeichnet sind, auszudrücken.

Hr.

F. Brioschi. Sulle equazioni differenziali del tetraedro, dell' ottaedro e dell' icosaedro. Brioschi Ann. (2) X. 104-128.

Die drei Ausdrücke

$$t = 1+az^2, \quad t = \frac{az^6+b}{z^2}, \quad t = \frac{az^{12}+bz^6+c}{z^2},$$

in denen resp.

$$ab^2 = \frac{4}{27}, \quad b^2 = 20ac, \quad bc^2 = 2\cdot\frac{5^3}{12^3}$$

angenommen ist, definiren drei Functionen z von t, welche, wie gezeigt wird, je einer Differentialgleichung dritter Ordnung genügen, die aus den drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für v

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{3}{2}\frac{t^2}{t^3-1}\frac{dv}{dt} - \frac{1}{8}\varrho\frac{t}{t^3-1}v = 0$$

$$\left(\varrho = \frac{2(n-1)}{(n-2)^2} \text{ für resp. } n = 4, 6, 12\right)$$

erhalten werden, wenn man das Product der Integrale der letzteren $v_1 v_2 = z$ setzt. Es werden für alle drei Fälle v_1 und v_2 als Functionen von z in Wurzelausdrücken (und dadurch auch als Functionen von t) bestimmt, und aus diesen Ausdrücken ergiebt sich der von je einer binären Form, die einer Constanten gleich ist, während die entsprechende Hesse'sche Form gleich t, multiplicirt mit einer Constanten ist. Führt man in (1) $\xi = t^2$ statt der unabhängigen Variablen ein, so geht (1) über in die hypergeometrische Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{d^2v}{d\xi^2}+\frac{1}{6}\frac{4-7\xi}{6\xi(1-\xi)}+\frac{1}{72}\varrho\frac{1}{\xi(1-\xi)}=0.$$

Es wird nun eine eingehende Untersuchung aller Fälle angestellt, in denen die Gleichung (2) durch die Substitutionen $\xi = \psi(x)$, $y = wv$, wo w eine Function von x ist, unter der Bedingung, dass ψ rational ist, in sich selbst oder in eine solche, die aus (2) durch die lineare Substitution

$$\xi = \frac{c-b}{c-a}\frac{x-a}{x-b}$$

hervorgeht, übergeführt wird. Aus den Werten von w erhält man die Integrale der verschiedenen linearen Differentialgleichungen der letzteren Form, da die particulären Integrale v_1, v_2 von (1) oder (2) bekannt sind. Diese Differentialgleichungen sind diejenigen, welche die des Tetraeders, Octaeders und Ikosaeders für $n = 4, 6, 12$ genannt werden. Hr.

G. Halphén. Sur une classe d'équations différentielles linéaires. C. R. XCII. 779-782.

Sind $P = ax+b$ und $Q = a'x+b'$ zwei Binome ersten Grades, $h, k, \dots B, C, \dots$ Constanten, dann haben die Gleichungen von der Form

$$(1) \qquad \dots BQ^h P^{n-h}\frac{d^n[P^hQ^{n-h}y]}{dx^n}+CQ^k\frac{d^p[P^kQ^{p-k}y]}{dx^p}+\dots=0$$

zum allgemeinen Integral

$$y = C_1 P^{\alpha_1} Q^{1-\alpha_1} + C_2 P^{\alpha_2} Q^{1-\alpha_2} + \dots,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ die Wurzeln der Gleichung

$$\ldots B(ab'-a'b)^n(\alpha+h)(\alpha+h-1)\ldots(\alpha+h-n+1)$$
$$+C(ab'-a'b)^p(\alpha+k)(\alpha+k-1)\ldots(\alpha+k-p+1)+\cdots=0$$

sind. Es ist zu bemerken, dass die Constanten $h, k \ldots$ beliebig geändert werden können, ohne dass die Gleichung (1) geändert wird, wofern nur gleichzeitig auch $B, C \ldots$ so modificirt werden, dass die characteristische Gleichung für die α dieselbe bleibt. Fallen die Binome P und Q zusammen, dann ist das allgemeine Integral

$$y = C_1 \frac{1}{P} e^{\frac{\alpha_1}{P}} + C_2 \frac{1}{P} e^{\frac{\alpha_2}{P}} + \cdots,$$

wo die α durch die Gleichung

$$\ldots B(-a\alpha)^n + C(-a\alpha)^p + \cdots = 0$$

bestimmt sind. Um die adjungirte Gleichung von (1) zu erhalten, hat man nur P und Q mit einander zu vertauschen und die Vorzeichen der die Derivirten von ungrader Ordnung enthaltenden Glieder zu verändern. Hr.

A. Steen. En lineär Differentialligning af Halphén. Zeuthen T. (4) V. 177-181.

Darlegung der von Halphén gefundenen Resultate über die Differentialgleichung

$$\Sigma P_\nu (ax+b)^{\nu-p_\nu} (a_1x+b_1)^{p_\nu} \frac{d^\nu[(ax+b)^{p_\nu}(a_1x+b_1)^{\nu-p_\nu}y]}{dx^\nu} = 0.$$

Gm.

A. Steen. En märkelig Ligestorhed imellem visse Differentialkoefficienter af to Funktioner. Zeuthen T. (4) V. 101-109.

Wie von Herrn Hansted bemerkt ist, werden die beiden Ausdrücke

$y = D_x^n (x-a)^{n+r}(x-b)^{n+s}$ und $y = D_x^m (x-a)^{m+r}(x-b)^{m+s}$,

wo

$$m+n+r+s+1 = 0,$$

die Differentialgleichung

$$(x-a)(x-b)y''$$
$$+[(z-r-s)x+b(r-1)+a(s-1)]y'-(n+1)(n+r+s)y = 0$$

befriedigen. Diese Integrale können zusammenfallen, und der Verfasser sucht die Bedingung für das Eintreten dieser Fälle. Indem er

$$(x-a)^{m+r}(x-b)^{m+s} = X_m$$

setzt, findet er, dass

$$\frac{X_m^{(k)}}{X_m} = \frac{P_k}{(x-a)^k(x-b)^k},$$

wo P_k in eine nach absteigenden Potenzen von x geordnete Reihe entwickelt werden kann. Es zeigt sich dann, dass P_{m-n} eine Constante wird. Hieraus ergiebt sich die gesuchte Bedingung als

$$(r+n+1)(r+n+2)\dots(r+m) = \frac{(-1)^{m-n}c}{(b-a)^{m-n}}$$

oder auch

$$(s+n+1)(s+n+2)\dots(s+m) = \frac{(-1)^{m-n}c}{(a-b)^{m-n}}.$$

Gm.

G. Halphén. Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss. C. R. XCII. 856-859.

Die Gleichung

$$x(x-1)y''+\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)(x-1)+\left(1-\frac{1}{n}\right)x\right]y'+\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{p}\right)=0,$$

wo m, n, p positive ganze Zahlen sind und

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p} = 1-\frac{2}{\mu}$$

gesetzt ist, lässt sich, wie Herr Schwarz gezeigt hat, in den Fällen, wo μ negativ ist, algebraisch integriren. Der Verfasser vereinigt zunächst die Lösung dieser Fälle in eine einzige Formel und dehnt dann die erhaltenen Resultate auf den Fall $\mu>0$ aus. Bezeichnet

man mit η das Verhältnis zweier Integrale obiger Gleichung, so ist x eine eindeutige Function von η derart, dass sie alle Werte annimmt, während η in einem um den Ursprung beschriebenen Kreise von bestimmtem Halbmesser verbleibt. Die Werte von η, welche einem Werte von x entsprechen, gehen aus einander durch lineare Substitutionen hervor, deren Gruppe mit Hülfe von Gamma-Functionen angegeben wird. Es werden ferner drei im Gebiete von η synektische Functionen $X(\eta)$, $Y(\eta)$, $Z(\eta)$ definirt, die für die verschiedenen Werte von η, welche resp. $x = 0, 1, \infty$ entsprechen, und nur für diese in erster Ordnung Null werden. Sie genügen den Identitäten

$$X^m+Y^n+Z^p = 0, \quad x = -X^m : Z^p$$

und folglich

$$x-1 = Y^n : Z^p.$$

Die Integrale der obigen Gleichung sind alsdann

$$y_1 = \eta Z^{\frac{p}{\mu}}, \quad y_2 = Z^{\frac{p}{\mu}}.$$

Dieses Resultat gilt auch für $\mu < 0$, nur sind dann X, Y, Z ganze Polynome in η, und η wird durch Auflösung der Gleichung

$$x = -X^m : Z^p$$

erhalten. Hr.

E. Goursat. Sur l'équation différentielle linéaire, qui admet pour intégrale la série hypergéométrique.

Ann. de l'Éc. Norm. (2) X. Suppl. 3-142.

Die Arbeit enthält eine vollständige Theorie der Differentialgleichung

$$(1) \qquad x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y = 0$$

ohne jede Beschränkung des Gebietes der Variablen. Im ersten Teile werden mit Hülfe der Euler'schen und Jacobi'schen (Crelle J. LVI. 149ff.) Methode sechs particuläre Lösungen in der Form des bestimmten Integrals

$$\int u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du = \int V du$$

zwischen den resp. Grenzen:

$$0, 1;\ 0, -\infty;\ 1, +\infty;\ 0, \frac{1}{x};\ 1, \frac{1}{x};\ \frac{1}{x}, +\infty$$

abgeleitet und gezeigt, dass, so lange keine der Constanten $\gamma, \gamma-\alpha-\beta, \beta-\alpha$ eine ganze Zahl ist, jedes dieser Integrale auf vier verschiedene Arten mittels hypergeometrischer Reihen F dargestellt werden kann. Es sind dies die 24 Kummer'schen Integrale. Als viertes Element in F kommen der Reihe nach

$$x, \frac{1}{x}, 1-x, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{x-1}, \frac{x-1}{x}$$

vor, wodurch unmittelbar die Gültigkeit der verschiedenen Darstellungen angezeigt ist, da der Modul des vierten Elements überall kleiner als 1 sein muss. Zwischen je drei der sechs Lösungen besteht eine lineare Relation, also im Ganzen 20. Sie werden sämmtlich aus der durch Anwendung des Cauchy'schen Satzes sich ergebenden Gleichung

$$\int_{-\infty}^{0} V du + \int_{0}^{1} V du + \int_{1}^{+\infty} V du = 0$$

abgeleitet und vollständig angegeben. Die Coefficienten sind Producte von Gammafunctionen. Durch diese Relationen ist man in den Stand gesetzt, eine gegebene particuläre Lösung von einem Punkte aus nach jedem beliebigen Punkte fortzusetzen, wenn der durch keinen der Punkte 0, 1 führende Weg vorgeschrieben ist. Der vorhin erwähnte ausgeschlossene Fall wird durch die Methode der Grenzen behandelt und führt im Allgemeinen zu Ausdrücken, die mit Logarithmen behaftet sind. So werden die beiden particulären Integrale des allgemeinen Falles

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \text{ und } x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$$

für $\gamma = 1$ identisch; der Ausdruck

$$\lim_{\gamma=1} \frac{x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{1-\gamma}$$

ergiebt aber das neue Integral

$$\log x \,.\, F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \psi(x),$$

wo

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m B_m x^m,$$

A_m der Coefficient von x^m in $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ und

$$B_m = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1} + \cdots + \frac{1}{\alpha+m-1} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \cdots + \frac{1}{\beta+m-1} - 2\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right).$$

Die linearen Relationen zwischen diesem Integral und den schon bekannten Integralen enthalten in den Coefficienten ausser den Gammafunctionen noch die Differentiallogarithmen derselben. Die Betrachtungen werden dann angewendet auf die von den Herren Fuchs, (Borchardt J. LXXI. 91, F. d. M. II. 1870. p. 248) und Tannery, (Ann. de l'Éc. N. (2) VIII. 169, F. d. M. XI. 1879. p. 238) behandelte Gleichung

$$x(1-x)y'' + (1-2x)y' - \frac{1}{4}\,y = 0,$$

welche die vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung als Functionen des Moduls definirt. Hier ist $\gamma = 1$ (No. 1-18). Der Beschluss dieses ersten Teils bildet die Feststellung der Kriterien für das Vorhandensein eines particulären oder allgemeinen algebraischen Integrals der Gleichung (1). Diese Frage ist bekanntlich von Herrn Schwarz (Borchardt J. LXXV. 292, F. d. M. V. 1873. 249) zuerst behandelt und gelöst worden. Die Bedingungen für die Existenz eines einzigen algebraischen Integrals ergeben sich leicht. Aber auch die Lösung der weit schwierigeren Frage, wann die Gleichung (1) lauter algebraische Integrale habe, gelingt dem Verfasser durch Betrachtungen, die wegen ihres elementaren Characters beachtenswert sind. Bezeichnet $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ein beliebiges Integral und $c'_1 y_1 + c'_2 y_2$ den Wert desselben nach einem geschlossenen Umgang, so erhellt unmittelbar, dass, falls $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ein algebraisches Integral ist, der Quotient $c'_2 : c'_1$ bei beliebigen geschlossenen Integrationswegen nur eine begrenzte Anzahl von Werten annimmt. Der Verfasser zeigt aber auch umgekehrt, dass, wenn letzteres der Fall ist, für beliebige c, c' das allgemeine Integral algebraisch ist. Geht man nun von den Integralen

$$y_1 = F(\alpha\,\beta\,\gamma, x), \quad y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$$

aus und setzt

$$c_2 : c_1 = \varrho, \quad c'_2 : c'_1 = \varrho',$$

so gilt bei einem positiven oder negativen Umlauf um $x = 0$ zwischen ϱ und ϱ' die Beziehung

$$(2) \qquad \varrho' - a = K(\varrho - a), \text{ resp. } \varrho' - a = \frac{1}{K}(\varrho - a),$$

wo

$$a = -\frac{\Gamma(\alpha+\beta-1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)}, \quad K = e^{-2\pi(1-\gamma)i},$$

und bei einem positiven oder negativen Umlauf um $x = 1$

$$(3) \qquad \frac{1}{\varrho'} - b = K'\left(\frac{1}{\varrho} - b\right), \text{ resp. } \frac{1}{\varrho'} - b = \frac{1}{K'}\left(\frac{1}{\varrho} - b\right)$$

und

$$b = -\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, \quad K' = e^{-2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}$$

ist. Da jeder geschlossene Umgang auf eine Anzahl successiver positiver oder negativer Umgänge um die Punkte 0 und 1 zurückgeführt werden kann, so handelt es sich bei der vorliegenden Untersuchung um die Ermittelung der Fälle, in welchen die in beliebiger Ordnung wiederholte Anwendung der Substitutionen (2) und (3) auf eine endliche Anzahl von Grössen führt. Geometrisch gedeutet lässt sich die Aufgabe in folgender Form aussprechen: „Es sind in einer Kugel zwei Durchmesser SS', PP' gegeben; auf ihrer Oberfläche gelange man von einem Punkte zu einem folgenden, indem man ihn den Winkel $\pm 2\pi(1-\gamma)$ um SS', oder den Winkel $\pm 2\pi(\alpha+\beta-\gamma)$ um PP' beschreiben lässt; in welchen Fällen ist die so erhaltene Anzahl von Punkten eine endliche, wie oft und in welcher Ordnung man auch die erwähnten Constructionen anwenden mag?“

Es findet sich, dass die Axen SS', PP' Symmetrieaxen eines regelmässigen Körpers sein müssen. Construirt man das sphärische Dreieck SPQ, worin

$$\sphericalangle PSQ = (1-\gamma)\pi, \quad \sphericalangle SPQ = (\gamma-\alpha-\beta)\pi,$$

dann wird

$$\sphericalangle SQP = (\alpha-\beta)\pi,$$

und man erhält den Satz des Herrn Schwarz: „Damit das allgemeine Integral algebraisch ist, ist es notwendig und hinreichend, dass die drei Ebenen des Trieders $OSPQ$ die drei Symmetrieebenen einer Doppelpyramide oder eines regelmässigen Polyeders sind“ (No. 19-25). Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Untersuchung derjenigen Transformationen der hypergeometrischen

Reihe, die nur statthaben, wenn die Elemente α, β, γ gewissen Bedingungen genügen. Die Abhandlungen von Gauss und namentlich von Herrn Kummer über hypergeometrische Reihen (Crelle J. XV.) enthalten eine grosse Anzahl hierher gehöriger Formeln. Der allgemeine Typus derselben ist:

$$(4) \qquad x^{-p}(1-x)^{-q}F(\alpha, \beta, \gamma, x) = t^{p'}(1-t)^{q'}F(\alpha', \beta', \gamma', t),$$

wo t eine algebraische Function von x bedeutet. Der Verfasser stellt sich nun die Aufgabe, alle Transformationen dieser Art zu finden, und geht dabei von einem neuen Gesichtspunkte aus. Wie Riemann zuerst gezeigt hat, genügt $x^{-p}(1-x)^{-q}F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ der Differentialgleichung

$$(5) \qquad x^2(1-x)^2y''+(ax+b)x(1-a)y'+(Ax^2+Bx+C)y = 0.$$

A, B, C, a, b sind durch $p, q, \alpha, \beta, \gamma$ eindeutig derart bestimmt, dass einem Wertsystem der ersteren vier Wertsysteme der letzteren entsprechen. Die Aufstellung aller Relationen von der Form (4) ist demnach mit der Lösung folgender Frage gleichbedeutend: Für welche Werte der Constanten A, B, C, a, b existiren Substitutionen $x = \varphi(t)$, durch welche die Gleichung (5) ihre Form nicht ändert, indem nur die erwähnten Constanten durch A', B', C', a', b' ersetzt werden? Die Analyse führt zu dem Ergebnis, dass, besondere Fälle ausgenommen, in denen die Integrale von (5) sich durch elementare Functionen ausdrücken lassen, x eine algebraische Function von t von höchstens dem sechsten Grade in Beziehung auf x und t sein muss. Es werden zunächst alle rationalen Substitutionen bestimmt und die Bedingungen angegeben, welche die Constanten A, B, C, a, b und demgemäss die Elemente α, β, γ erfüllen müssen (No. 1-14). Durch Combination der rationalen Substitutionen, die für das nämliche Wertsystem von A, B, C, a, b existiren, erhält man alle nicht rationalen algebraischen Substitutionen. Im Anschluss daran werden die durch die erwähnten Substitutionen gelieferten Transformationsformeln für die hypergeometrische Reihe, in der von den drei Elementen α, β, γ nur zwei oder eins willkürlich bleiben, in einer umfangreichen Tabelle vollständig zusammengestellt. Von diesen finden sich in der Arbeit des Herrn Kummer nur die Transformationen mit zwei

willkürlichen Elementen erschöpfend angegeben. Für die Einzelheiten der sehr interessanten Untersuchung ist wegen ihres grossen Umfanges auf das Original zu verweisen. Hr.

A. CAYLEY. On a differential equation. Chelini, Coll. Math. 17-26.

Gegenstand der Note ist die Differentialgleichung

$$(1)\qquad \frac{a'z^2+2b'z+c'}{z^2(z-1)^2}\,dz^2 = \frac{ax^2+2bx+c}{x^2(x-1)^2}\,dx^2,$$

die Herr Kummer in seiner Abhandlung über hypergeometrische Reihen (Crelle J. XV.) untersucht hat, wobei es sich um solche Lösungen handelte, die gleichzeitig einer gewissen Differentialgleichung dritter Ordnung genügen. Das allgemeine Integral von (1) hat die Form

$$\Omega'-c\Omega = 0,$$

wo Ω, Ω' algebraische Functionen von x resp. z sind, oder „quasialgebraische", d. h. solche, die Potenzen mit incommensurablen Exponenten enthalten.

Der Verfasser zeigt nun an einem Beispiele, dass einfache particuläre Lösungen von (1) existiren können, nämlich solche, worin z als explicite (rationale oder irrationale) Function von x ausgedrückt ist, die aber aus der allgemeinen Form des Integrals durch Particularisirung nur mit grossem Aufwand von Rechnung zu verificiren sind. In den von Herrn Kummer betrachteten Fällen wird mit Hülfe der zweiten Differentialgleichung, die durch den nämlichen Wert von z wie (1) befriedigt wird, die Relation zwischen x und z ohne Integration gefunden, gleichzeitig aber a', b', c' als Function von a, b, c bestimmt. Die verschiedenen von Herrn Kummer gegebenen Relationen mit den Ausdrücken der Functionen $a'z^2+2b'z+c'$ und $ax^2+2bx+c$, die in der Differentialgleichung (1) auftreten, werden in übersichtlicher Weise zusammengestellt. An die Tabelle werden Bemerkungen darüber geknüpft, wie die verschiedenen Relationen aus einander durch einfache Substitutionen abgeleitet werden können.

Hr.

G. Darboux. Sur l'équation de Riccati. Chelini, Coll. Math. 199-205.

Die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = p + 2qy + ry^2,$$

wo p, q, r Functionen von x bedeuten, habe als particuläre Lösungen alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$f(y) = 0,$$

deren Coefficienten Functionen von x sind, dann sind auch die Wurzeln aller Covarianten des Polynomens $f(y)$ particuläre Lösungen. Dieser Satz wird einmal durch Betrachtung der Form des allgemeinen Integrals

$$y = \frac{Cu+v}{Cu'+v'}$$

bewiesen und dann auf directem Wege durch Bildung sämmtlicher Covarianten mittels Ueberschiebungen verificirt. Berücksichtigt man den bekannten Zusammenhang der Gleichung (1) mit einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, so erkennt man, dass der vorstehende Satz unmittelbar aus den Untersuchungen des Herrn Fuchs über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Integralen (Borchardt J. LXXXI. 97, s. F. d. M. VII. 1875. 172) folgt. Die hinzugefügte Bemerkung, das Kriterium für die Existenz algebraischer Lösungen von (1) betreffend, ist ebenfalls a. a. O. in der Einleitung mitgeteilt. Vgl. noch das Referat über die Arbeit des Herrn Gordan F. d. M. IX. 1877. p. 79. Hr.

J. W. L. Glaisher. On Riccati's equation and its transformation, and on some definite integrals which satisfy them. Lond. R. S., Proc. XXXII. 444-446.

Auszug aus einer Arbeit in den Phil. Trans., über die seiner Zeit referirt werden wird. Cly. (O.).

N. Herz. Ueber Integrale einiger Differentialgleichungen.

Hoppe Arch. LXVII. 312-324.

Das Integral der Gleichung

$$X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + N\frac{d^ny}{dx^n},$$

wo $A, B, \ldots N$ constant sind, lautet bekanntlich für den Fall, dass die Gleichung

$$P_n = A + B\alpha + \cdots + N\alpha^n$$

lauter ungleiche Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ besitzt:

$$y = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} \frac{1}{P_n'(\alpha_\varrho)} e^{\alpha_\varrho x} \int X e^{-\alpha_\varrho x}\, dx.$$

Sind nun die Coefficienten derart beschaffen, dass man die unendliche Reihe

$$(1) \qquad P = A + B\alpha + C\alpha^2 + \cdots \text{ in inf.}$$

durch einen geschlossenen Ausdruck darstellen und die Nullpunkte desselben angeben kann, so wird man auch das Integral der Differentialgleichung

$$(2) \qquad X = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots \text{ in inf.}$$

erhalten können. Dasselbe erscheint dann in der Form einer unendlichen Summe von Integralausdrücken, über deren Convergenz keine Untersuchung angestellt wird. Bedenklicher erscheint dem Referenten die Bemerkung, dass, wenn die Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ der Gleichung (1) innerhalb des Convergenzbereiches der Reihe P, die übrigen Wurzeln aber ausserhalb fallen, die Differentialgleichung (2) das particuläre Integral

$$y = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} \frac{1}{P'(\alpha_\varrho)} e^{\alpha_\varrho x} \int X e^{-\alpha_\varrho x}\, dx$$

habe, da man von dem allgemeinen Integral einer vollständigen linearen Differentialgleichung mit constanten Coefficienten durch Ausschliessung einiger Wurzeln der zugehörigen algebraischen Gleichung kein particuläres Integral erhalten kann.

In ähnlicher Weise wird die Laplace'sche Methode der Integration der Gleichung

$$(a_0+b_0x)y+(a_1+b_1x)\frac{dy}{dx}+(a_2+b_2x)\frac{d^2y}{dx^2}+\cdots=0$$

auf Gleichungen dieser Form mit unendlich vielen Gliedern ausgedehnt. Hr.

WOLSTENHOLME. Note on linear differential equations with constant coefficients. Ed. Times XXXIV. 23.

Die zu lösende Differentialgleichung lautet, symbolisch geschrieben,

$$f(D) = \cos nx \text{ oder } \sin nx,$$

wo f eine ganze rationale Function von D mit constanten Coefficienten bedeutet und $\frac{d^py}{dx^p}$ für D^p zu setzen ist. Man zerlege $f(D)$ in $\varphi_1(D^2)$ und $D\varphi_2(D^2)$, dann sind die resp. Integrale

$$y_1 = \frac{1}{f(D)}\cos nx = \frac{\varphi_1(-n^2)\cos nx+n\varphi_2(-n^2)\sin nx}{[\varphi_1(-n^2)]^2+n^2[\varphi_2(-n^2)]^2},$$

$$y_2 = \frac{1}{f(D)}\sin nx = \frac{\varphi_1(-n^2)\sin nx-n\varphi_2(-n^2)\cos nx}{[\varphi_1(-n^2)]^2+n^2[\varphi_2(-n^2)]^2}.$$

Diese Formeln sind nicht anwendbar, wenn $f(-n^2) = 0$; in diesem Falle ist

$$f(D) = (D^2+n^2)^r\varphi(D).$$

Man wird dann nach dem Obigen erst mit $\frac{1}{\varphi(D)}$ operiren und dann die Formel

$$\frac{1}{(D^2+n^2)^r}\cos nx = \frac{1}{2}\frac{x^r}{r!}\left(\frac{e^{nix}}{(2ni)^r}+\frac{e^{-nix}}{(-2ni)^r}\right)$$

und eine ähnliche für $\sin nx$ anwenden. Hr.

B. HANSTED. Nogle Transformationer af den lineäre Differentialligning med konstante koefficienter
$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$$
ved Substitution af en ny Variabel. Zeuthen T. (4) V. 5-12.

Die hier gegebenen Aenderungen fliessen unmittelbar aus der

symbolischen Darstellung

$$\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)\cdots\left(\frac{d}{dx}-\nu\right)y=0.$$

Gm.

R. Rubini. Intorno ad un' assertivà di Boole. Nap., Rend. XIX. 132-144.

Boole hat in seiner Arbeit: „On a general method in analysis" (Phil. Trans. 1844) einen Zweifel darüber geäussert, dass die von Euler in den „Institutiones calculi integralis Vol. II. p. 151 u. f." gegebene Methode zur Integration linearer Differentialgleichungen so allgemein abgeleitet sei, wie er sie gegeben. Der Verfasser weist nach, dass das Boole'sche Resultat in der Tat in dem Euler'schen enthalten sei. O.

M. Ehrhorn. Ueber die von Challis vorgeschlagene neue Integrationsmethode von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und ihre Anwendung auf gewisse ungelöste Aufgaben aus der Variationsrechnung. Hoppe Arch. LXVI. 113-147.

Durch eine im Phil. Mag. Juli 1871 erschienene Abhandlung des Herrn Challis ist ein Streit über die Lösung gewisser Aufgaben aus der Variationsrechnung angeregt worden, und die vorliegende Arbeit, durch eine von Herrn Stern gestellte Aufgabe veranlasst, versucht darzulegen, was an diesem Streite das Richtige ist. Die Untersuchung, die in ihrem Gange sich an die erwähnte Abhandlung des Herrn Challis hält, berücksichtigt sorgfältig die einschlägige Literatur, die sich am Ende jedes Paragraphen zusammengestellt findet. Nach der hier zu übergehenden Kritik einiger von Herrn Challis als neu aufgestellten Hülfssätze, betreffend die Elemente der Integralrechnung, wendet sich der Verfasser zu der neuen Integrationsmethode des Herrn Challis. Wenn

$$\int_{x_1}^{x_2} V dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, p, q, r\ldots),$$

worin

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad r = \frac{d^3 y}{dx^3}, \cdots,$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen ist, so betrachtet Herr Challis die Hauptgleichung in der Form

$$(\delta y - p\delta x)\left\{\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{d^2\frac{\partial V}{\partial q}}{dx^2} - \frac{d^3\frac{\partial V}{\partial r}}{dx^3} + \cdots\right\}$$
$$= (\delta y - p\delta x)A = 0$$

und folgert daraus, dass man, wenn die Aufgabe keine Relation zwischen δy und δx enthält, nicht nur, wie es meist geschieht, die Gleichung $A = 0$, sondern die beiden Gleichungen $A = 0$ und $Ap = 0$, die im Allgemeinen nicht als identisch angesehen werden dürfen, gleichzeitig zur Auffindung des Zusammenhanges zwischen x und y in Betracht zu ziehen hat. Der Verfasser weist in einleuchtender Weise die Unhaltbarkeit dieser Behauptung nach, indem er zeigt, dass ein Unterschied dieser beiden Gleichungen, die er durch Multiplication mit dx auf die Form $Adx = 0$, $Ady = 0$ bringt, nur in Bezug auf ihre Anwendbarkeit besteht. Kommt nämlich in der Hauptgleichung y, aber nicht x explicit vor, so wird man $Ady = 0$ benutzen, und die Bedeutung des Factors p besteht nur darin, dass er der integrirende Factor von $A = 0$ ist. Um das allgemeine Integral der Hauptgleichung zu erhalten, sind daher $A = 0$ und $Ap = 0$ als völlig äquivalent anzusehen. Da Herr Challis nicht dieser Meinung ist, so sucht er in dem obenerwähnten Falle durch eine von ihm als neu bezeichnete Integrationsmethode ohne Zuhülfenahme des integrirenden Factors aus $A = 0$ allein die Gleichung der Curve zu finden. Die Methode besteht darin, dass er aus $A = 0$ zuerst die Differentialgleichung der Evolute und aus dieser rückwärts die Gleichung der Evolvente herleitet. Die letztere Gleichung soll dann das vollständige Integral von $A = 0$ und somit die Lösung des Problems darstellen. Hierdurch wird aber eine neue willkürliche Constante eingeführt, die der Aufgabe fremd ist, und Herr Challis zeigt auch nicht, wie man auf diese Weise die Curve, die den gestellten Bedingungen genügt, erhalten kann. Dagegen zeigt der Verfasser, wie man

unter Benutzung von Formeln, die allein aus $A = 0$ hergeleitet sind, aus der Gleichung der Evolute dieselbe Lösung erhalten kann, wie durch Integration von $Ap = 0$, wodurch die Identität von $A = 0$ und $Ap = 0$ direct bestätigt wird. Zum Schluss spricht der Verfasser Herrn Challis in Bezug auf die Integrationsmethode mit Hülfe der Evolute die Originalität ab, da in der Abhandlung von Delaunay, Liouville J. VI. 309 dieselbe Methode angewendet ist. Hr.

A. Winckler. Die Integration linearer Differentialgleichungen und der Herr Prof. Simon Spitzer in Wien. Wien. A. Hölder.

Antwort auf die in dem Buche des Herrn Spitzer: „Integration partieller Differentialgleichungen“ (s. F. d. M. XI. 1879. 253) enthaltenen Angriffe auf Herrn Winckler. Hr.

S. Spitzer. Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. Erste Fortsetzung. Wien. Carl Gerold's Sohn.

Das unter dem Titel: „Neue Studien etc.“ im Jahre 1874 (cf. F. d. M. VI. 1874. 274) erschienene Werk des Verfassers besteht aus fünf Abschnitten. Die vorliegende Fortsetzung enthält die Abschnitte VI. bis X. Im sechsten werden Differentialgleichungen construirt, deren particuläre Integrale eine vorausgesetzte Form haben. Der siebente Abschnitt beschäftigt sich mit der Integration der Gleichung

$$xy'''+ay''-bxy = 0,$$

die erst durch unendliche Reihen, dann nach der Laplace'schen Methode mittels eines bestimmten Integrals bewerkstelligt wird. Der achte Abschnitt enthält Bemerkungen über die Gleichung

$$a_2+b_2x+c_2x^2+(a_1+b_1x)y'+a_0y = 0.$$

Die Integratiosmethode besteht hier darin, dass man nach λ-mali-

ger Differentiirung zu einer integrablen Gleichung gelangt. Der neunte Abschnitt, betitelt: „Integration verschiedener Differentialgleichungen," behandelt u. A. die Gleichung

$$xy^{(n)}+\lambda y^{(n-1)} = x^m(xy'+\mu y),$$

bei welcher der Verfasser auf deren merkwürdig gestaltete Integrale glaubt hinweisen zu müssen. Sie geben indessen nicht die Lösung selbst, sondern führen sie auf die der Gleichung

$$y^{(n-1)} = x^m y$$

zurück. Der zehnte Abschnitt ist eine Reproduction der in einer früheren Arbeit des Verfassers gegebenen Methode, den integrirenden Factor einer linearen Differentialgleichung zu finden, über die wir auf den Bericht im vorigen Bande dieses Jahrbuchs p. 267 verweisen. Hr.

R. Rubini. Esercizii d'integrazione col calcolo dei simboli d'operazione. Batt. G. XIX. 118-131.

Herr Spitzer hat in Grunert Arch. XLII. p. 102 folgende Gleichung

$$y'''-3mx^2y''-6m(2-\lambda)xy'-3m(2-\lambda)(1-\lambda)y = 0,$$

worin m eine beliebige Constante und λ eine positive ganze Zahl bezeichnet, mittels der Methode der wiederholten Differentiation integrirt. Die Form des so erlangten Integrals lässt jedoch nicht unmittelbar ersehen, dass für jeden positiven ganzzahligen Wert von λ die Zahl der willkürlichen Constanten nicht grösser als drei sein kann, wie es die Ordnung der Gleichung erfordert. Der Verfasser behandelt die Gleichung nach dem Verfahren der Rechnung mit operativen Symbolen. Nach Einführung der Substitution $x = e^t$ wird die vorgelegte Gleichung in die symbolische

$$D(D-1)(D-2)y-3m(D-\lambda-1)(D-\lambda-2)e^{3t}y = 0,$$

wo $D = \frac{\partial}{\partial t}$ ist, umgeformt, und die Lösung für jeden der drei Fälle

$$\lambda = 3\nu,\quad \lambda = 3\nu+1,\quad \lambda = 3\nu+2$$

besonders durchgeführt. Die Ausdrücke für die Integrale ent-

halten nirgends mehr als drei Constante. Zum Schluss wird noch gezeigt, dass sich die Gleichung auch für den Fall, in welchem λ eine negative ganze Zahl ist, integriren lässt. Für die in Rede stehende Integrationsmethode mittels operativer Symbole, deren Vorteile an einer bestimmten Aufgabe zu zeigen der vornehmlichste Zweck dieser Arbeit ist, werden citirt: Boole, „A treatise on differential equations 2ᵈ ed. p. 412f." und Rubini, „Complemento al calcolo infinitesimale p. 60f." Hr.

Graefe. Integrale von einigen linearen Differentialgleichungen. Kronecker J. XCI. 262-264.

Die Resultate des Aufsatzes von Herrn Spitzer in Borchardt J. LXXXVIII. p. 343 (vgl. F. d. M. XII. 1880. 267) werden verallgemeinert, indem das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{y''-\alpha^2x^my}{x^{\frac{m-2}{2}}}\right)=0,$$

resp. der Gleichungen

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y''-\alpha^2x^my}{x^{\frac{m-2}{2}}}\right)=0,\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y''-\alpha^2x^my}{x^{\frac{m}{2}}}\right)=0$$

in Form von bestimmten Integralen angegeben wird. Für $\alpha^2=1$ und $\alpha^2=4$ erhält man die Formeln des Herrn Spitzer.

Hr.

H. J. Sharpe. On a differential equation. Mess. (2) X. 174-185.

Der Verfasser betrachtet die Lösungen der Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y(x+A)=0,$$

wo A constant ist. Die Form der Lösungen in Reihen und als bestimmte Integrale wird discutirt, namentlich betreffs der Brauchbarkeit für die numerische Berechnung. Glr. (O.).

H. J. Sharpe. On a differential equation. Mess. (2) XI. 41-44.

Discussion der Lösung einer Differentialgleichung, welche bei gewissen Untersuchungen in der Theorie des Schalls auftritt. Sie heisst

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y(x-A)=\frac{d}{dx}\,\frac{\cos(x+l)}{x+l}.$$

Glr. (O.).

J. Hammond, W. B. Grove, J. Cockle. Solutions of a question (6404). Ed. Times XXXIV. 45-46.

Die Gleichung

$$y''+2(A\cot x+E\tan x)y'+\{AE^2-(A-E)^2\}y=0$$

wird in die binomische Form transformirt. O.

J. Cockle. On an equation of Schwarz. Quart. J. XVII. 293-301.

Für die Gleichung

$$x(1-x)y''+\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\,x\right)y'+\frac{1}{48}\,y=0,$$

die zuerst von Herrn Schwarz (Borchardt J. LXXV. p. 326, siehe F. d. M. V. 1873. 249) integrirt worden ist, wird folgende Lösung gegeben: Es sei β eine cubische Wurzel der Einheit, und C_1, C_2, C_3 Constanten, die durch die Relation

$$C_3^2+\beta^2\,C_1^2+\beta\,C_2^2=0$$

verbunden sind, so ist

$$y=\{C_1(1-\beta x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}+C_2(1-\beta^2x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}+C_3(1-x^3)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}.$$

In einer Nachschrift wird eine Mitteilung des Herrn Cayley wiedergegeben, in der auf zwei verschiedenen Wegen die Uebereinstimmung dieser Lösung mit der Schwarz'schen nachgewiesen wird. Hieran knüpft Herr Cockle den Beweis des folgenden Satzes: „Sind p, q, r durch

$$p^2+q^2+r^2+2m(pq+qr+rp)=0$$

und a, b, c durch

$$a^2+b^2+c^2-\frac{2m}{m+1}(ab+bc+ca)=0$$

mit einander verbunden, dann ist immer

$$\sqrt{ap+bq+cr}=\sqrt{U}\sqrt{p+\beta q}+\sqrt{V}\sqrt{p+\frac{1}{\beta}q},$$

wo

$$\beta+\frac{1}{\beta}=\frac{2m}{m+1},\quad U+V=a-mc,\quad \beta U+\frac{1}{\beta}V=b-mc$$

ist.“ Diese Formel ist u. A. anwendbar, wenn p, q, r drei Wurzeln einer Gleichung vierten Grades sind, in der der zweite und dritte Coefficient gleich Null sind; für m ist dann $\frac{1}{2}$ zu setzen.

Hr.

J. Cockle. Transformation of differential equations.

Mess. (2) XI. 109-111.

Die Arbeit bezieht sich auf die Transformation linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die verschiedenen Formen werden classificirt. Die Gleichungen hängen mit denen zusammen, die von Rawson und Cayley betrachtet worden sind. Siehe das folgende Referat.

Glr. (O.).

R. Rawson. On the first resolvent of the quartic $y^4+ay^2+x_1y-\frac{1}{12}a^2=0.$

Mess. (2) XI. 19-23.

Es wird bewiesen, dass jede Wurzel dieser Gleichung ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$\frac{8a^3+27x_1^2}{6a\frac{dx_1}{dx}}\cdot\frac{dy}{dx}+y^2-\frac{3x_1y}{2a}+\frac{a}{2}=0$$

ist.

Glr. (O.).

J. Cockle. Transformation of a biordinal of Schwarz's.
Mess. (2) XI. 49-52.

Das „Biordinal" heisst

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}x\right)\frac{dy}{dx}+\frac{1}{48}y=0.$$

Es ist dasselbe, das Herr Cayley im Quart. J. XVI. 268 (s. F. d. M. XI. 1879. p. 247), betrachtet hat. Diese Differentialgleichung wird in eine Reihe verschiedener Formen transformirt und in Verbindung mit der oben von Herrn Rawson behandelten Gleichung gebracht. Glr. (O.).

J. Cockle. Supplement on binomial biordinals.
Lond. M. S., Proc. XII. 63-72.

Fortsetzung der Abhandlung, über die im vorigen Bande p. 270 berichtet ist. Hier wird die allgemeine Form einer „Binomial Biordinal" nämlich:

$$(1)\qquad Xx^2z''+Pxz'+Qz=0,$$

wo $X=1-x^3$, $P=\lambda+\mu x^3$, $Q=\nu+\beta x^3$, untersucht und gezeigt, dass, wenn $\lambda+\mu+\frac{3}{2}=0$, die a. a. O. erwähnte Hülfsgleichung 3[ter] Ordnung ebenfalls binomial wird (Binomial terordinal).

Schreibt man (1) symbolisch

$$z-\frac{(D-A_1)(D-A_2)}{(D-B_1)(D-B_2)}x^3z=0,\quad D=x\frac{d}{dx},$$

dann wird die Terordinal:

$$v-\frac{(D-2A_1)(D-A_1-A_2)(D-2A_2)}{(D-2B_1)(D-B_1-B_2)(D-2B_2)}x^3v=0.$$

Vermöge obiger Bedingung muss

$$A_1+A_2-B_1-B_2+\frac{3}{2}=0$$

sein. Die weitere Untersuchung richtet sich darauf, zu ermitteln, unter welchen Bedingungen zwei symbolische Factoren des Zählers gegen zwei des Nenners sich in der Terordinal aufheben, d. h. also, unter welchen Bedingungen die ursprüngliche Biordinal lösbar wird. Das Resultat wird dann noch durch Anwendung gewisser Transformationen erweitert. Hr.

G. Humbert. Sur la fonction $(x-1)^a$. S. M. F. Bull. IX. 56-59.

Die ganzen Functionen P, Q, R, in x vom Grade p, q, r, für welche die Function $P(x-1)^a+Q(x-1)^b+R$ den höchstmöglichen Grad in x, nämlich den Grad $p+q+r+2$ erreicht, sind der Art, dass $P(x-1)^a$, $Q(x-1)^b$, R Lösungen der Differentialgleichung

$$x(x-1)^2y'''+(x-1)(\alpha x+\beta)y''+(\gamma x+\delta)y'+\varepsilon y=0$$

sind. Hr.

J. Cockle. Inverse problem of criticoids. Phil. Mag. 1881.

Gegeben sei das Differential binomialer Form

$$Xx^3y'''+3a_1x^2y''+3a_2xy'+a_3y=0,$$

wo die Accente Differentiationen bezeichnen, und X, a_1, a_2, a_3 der Kürze halber statt $1+x^n$, $a+ex^n$, $f+gx^n$, $h+kx^n$ stehen. Schafft man in dieser Gleichung das zweite Glied durch Substitution einer neuen abhängigen Variabeln $z=yx^nx^{\left(\frac{e-d}{n}\right)}$ fort, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$z'''+3sz'+tz=0.$$

Der Verfasser giebt eine Discussion über die Natur der Coefficienten s und t, die er „Criticoids" nennt. Er betrachtet auch das inverse Problem, nämlich: Gegeben ist die Gleichung in z; die Bedingung zu untersuchen, unter der sie auf binomiale Form gebracht werden kann. Csy. (O.).

R. Harley. Supplementary notes on a differential equation. Quart. J. XVIII. 41-46.

Ableitung der linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, welcher die n^{te} Potenz einer Wurzel der Gleichung m^{ten} Grades

$$a_0y^m+a_1y^{m-1}+\cdots+a_m=0$$

genügt, wo die Coefficienten a Functionen von x sind. Daran knüpft sich die Bemerkung, dass dieselbe sich auf eine lineare Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung reduciren lässt.

Hr.

R. HARLEY. Note on a differential equation. Quart. J. XVII. 352-353.

Für die n^{te} Potenz einer Wurzel der Gleichung

$$y^m - b + cx = 0$$

wird eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung angegeben, als deren allgemeines Integral sich

$$C_1(b-cx)^{\frac{n}{m}} + C_2(b-\beta cx)^{\frac{n}{m}} + \cdots + C_m(b-\beta^{m-1}cx)^{\frac{n}{m}}$$

ergiebt; β ist eine m^{te} Wurzel der Einheit. Hr.

H. J. SHARPE. On a transcendental differential equation. Mess. (2) XI. 56-63.

Die Differentialgleichung ist

$$\frac{2}{\pi}\{e^{\frac{1}{2}\pi D} + e^{-\frac{1}{2}\pi D}\}\int^{\infty}\cos\left(l\frac{d}{s} + D\varphi\right)\frac{d\varphi}{s}\,y = \frac{\cos(x+l)}{x+l},$$

wo D das Operationssymbol $x\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} + x$ bezeichnet und d und s an Stelle von $e^{\varphi} - e^{-\varphi}$ und $e^{\varphi} + e^{-\varphi}$ stehen, l endlich unabhängig von x ist. Das Ziel der Arbeit ist, y als Function von x darzustellen. Glr. (O.).

VON SCHAEWEN. Anwendung der Differentiation mit gebrochenem Index auf die Integration linearer Differentialgleichungen. Pr. Strasburg i. Pr.

Der Verfasser definirt:

$$\frac{d^{\mu}F(x)}{dx^{\mu}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{2\pi i}\int\frac{F(z)\,dz}{(z-x)^{\mu+1}},$$

wo μ beliebig reell und die Integration um den Punkt x herum zu vollziehen ist, so dass $F(z)$ innerhalb der Weglinie stetig bleibt. Die Anwendung besteht darin, dass eine gegebene lineare Differentialgleichung μ-mal differentiirt wird und dann diejenigen Relationen zwischen den Coefficienten aufgesucht werden, für welche die Differentiation die Form der Gleichung nicht ändert. Dies findet bei der Gleichung für die hypergeometrische Reihe von selbst statt,

woraus sich Fälle der Integrabilität ergeben. Ist

$$f_h = (-1)^{n-h-1}\binom{\mu+n-h-2}{n-h-1}\Big(f_{n-1}^{(n-h-1)} + \frac{\mu-1}{n-h}(n-h-1)\, f_n^{(n-h)}\Big),$$
$$f_n = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),$$
$$f_{n-1} = f_n\Big(\frac{\lambda_1}{x-a_1}+\frac{\lambda_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{\lambda_n}{x-a_n}\Big),$$

wo λ, μ reell sind, so hat die Gleichung

$$f_0\cdot y + f_1\cdot y' + \cdots + f_n\cdot y^{(n)} = 0$$

die Eigenschaft, durch Differentiation mit beliebigem Index in ihrer Form nicht geändert zu werden. Sie hat $\frac{1}{2}(n+1)\,(n+2)$ Particularlösungen von der Form

$$(a_\varkappa a_\lambda) = (e^{2i\pi a_\lambda} - 1)\int (a_\varkappa)\, f(z)dz - (e^{2i\pi a_\varkappa} - 1)\int (a_\lambda) f(z)\, dz,$$

wo

$$f(z) = (z-a_1)^{\alpha_1}(z-a_2)^{\alpha_2}\ldots(z-a_n)^{\alpha_n}(z-x)^{\alpha},$$
$$\alpha_h = -\lambda_h - \mu;\quad \alpha = n+\mu-2$$

zu setzen ist. Zu bemerken ist ferner, dass man unter $a_\varkappa a_\lambda$ irgend zwei Grössen der Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots \infty$, x zu verstehen und dem x entsprechend den Exponenten α, dem ∞ entsprechend den Exponenten $-\sum\limits_0^n a_h$ zu wählen hat. Die Integration ist bei allen Integralen von demselben z_1 zu beginnen, für welchen Anfang überdies alle Differenzen $z-a_h$ und $z-x$ positive reelle Teile haben sollen, und ist resp. um die Punkte $a_\varkappa$ und a_λ in demselben Sinne auszuführen, ohne dass dabei das betreffende Gebiet noch einen anderen Unstetigkeitspunkt der Function $f(z)$ enthält. Ausserdem wird über den Integrationsweg um $a_\varkappa$ bestimmt, dass sich derselbe umwandeln lässt in einen andern Weg auf den Ufern der geraden Linie $z_1\, a_\varkappa$ und auf einem kleinen Kreise um $a_\varkappa$. Zwischen diesen Lösungen bestehen die $\frac{1}{2}\, n(n+1)$ linearen Relationen

$$(e^{2i\pi a_\lambda} - 1)(x a_\varkappa) - (e^{2i\pi a_\varkappa} - 1)(x a_\lambda) = (e^{2i\pi a} - 1)\,(a_\lambda a_\varkappa),$$

wo zu den a noch ∞ mit dem zugehörigen Exponenten $-\sum\limits_0^n a_h$ ge-

nommen werden muss, und die lineare Relation

$$\sum_{0}^{n+1} e^{2i\pi(\alpha+\alpha_1+\dots\alpha+_{\varkappa-1})}(xa_\varkappa) = 0.$$

Es bleiben mithin n Lösungen von einander unabhängig, durch welche die übrigen ausdrückbar sind. Mit diesen kann man sich ein vollständiges Integral mit n willkürlichen Constanten bilden.

H.

J. Sylvester. On the solution of a certain class of difference or differential equations. Sylv., Am. J. IV. 260-266.

Es handelt sich um die Differenzengleichung

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} u_x & u_{x+1} & \dots & u_{x+i} \\ u_{x+1} & u_{x+2} & \dots & u_{x+i+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{x+i} & u_{x+i+1} & \dots & u_{x+2i} \end{vmatrix} = Pm^x.$$

Im Falle $i = 1$ geht sie in

$$(2)\qquad u_x.u_{x+2} - u_{x+1}^2 = Pm^x$$

über, welche $u_x = A\alpha^x$ für $P = 0$ (A und α beide willkürlich), sonst aber $u_x = \pm(A\alpha^x + B\beta^x)$ mit den Bedingungen

$$\alpha\beta = m, \quad AB(\alpha-\beta)^2 = P$$

zur Lösung hat. Setzt man $A\alpha^x + B\beta^x + C\gamma^x$ in (2) für u_x statt $A\alpha^x + B\beta^x$ ein, so erhält man unmittelbar eine Lösung der Gleichung

$$u_x u_{x+2} - u_{x+1}^2 = Pl^x + Qm^x + Rn^x$$

in der Form

$$u_x = A\alpha^x + B\beta^x + C\gamma^x,$$

die aber nur particulär ist und z. B. nicht brauchbar ist, wenn von den Grössen P, Q, R eine, oder von den Grössen l, m, n eine verschwindet oder zwei einander gleich sind. Durch einen Process, der auf der Methode des Grenzüberganges beruht, findet der Verfasser eine particuläre Lösung der beiden Gleichungen

$$u_x u_{x+2} - u_{x+1}^2 = Pl^x + (S+Tx)m^x,$$

$$u_x u_{x+2} - u_{x+1}^2 = (S+Tx+Ux^2)l^x.$$

Dieses Verfahren lässt sich nun, wie für $i = 2$ näher ausgeführt wird, auf die allgemeine Gleichung (1) anwenden, wo auf der rechten Seite Aggregate von $i+2$ Gliedern der Form Pl^x stehen, für welche in den Grenzfällen Gruppen von der Form

$$(P_1 + P_2 x + \cdots + P_e x^{e-1}) l^x$$

substituirt werden. Die hierbei sich ergebenden Integrale sind particulär. Die erhaltenen Resultate können sofort auf die Differentialgleichung $2i^{\text{ter}}$ Ordnung übertragen werden, wenn man $\frac{d^h y}{dx^h}$ für u_{x+h} und zugleich e^{lx} für l^x substituirt.

Hr.

G. Dillner. Sur une propriété que possède le produit des k équations différentielles linéaires à coefficients rationnels dont la solution dépend de la quadrature respectivement de k fonctions rationnelles de la variable indépendante et d'une même irrationalité algébrique. C. R. XCII. 290-291.

Die Resultate der Herren Hermite, Picard und Brioschi (C. R. XCI. p. 807) bezüglich des Productes der Integrale zweier Differentialgleichungen 2ter Ordnung wird in folgender Weise verallgemeinert: Setzt man

$$y_r = e^{\int \left[A_1^{(r)} \left(\frac{C}{B}\right)^{n-1} + \cdots + A_{n-1}^{(r)} \frac{C}{B} + A_n^{(r)} \right] dx}$$

$$r = 1, 2 \ldots k,$$

(vgl. F. d. M. XII. 1880. 248), dann haben die entsprechenden k Differentialgleichungen für y_r rationale Coefficienten und das Product der k Integrale hat die Form

$$\zeta = y_1, y_2, \cdots y_k = e^{\int \left(S_1 \left(\frac{C}{B}\right)^{n-1} + \cdots + S_{n-1} \left(\frac{C}{B}\right) + S_n \right) dx},$$

wo

$$S_r = A_r^{(1)} + \cdots + A_r^{(k)}.$$

Die Coefficienten $S_1, \ldots S_n$ sind wie die A_r rationale Functionen von x, und das Product ζ ist demnach selbst das Integral einer

linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten von der Ordnung $\geqq n$. Hr.

F. Brioschi. Sopra un sistema di equazioni differenziali. Brioschi Ann. (2) X. 233-240.

Das betrachtete System ist

$$(1) \quad u'_\varkappa = u_\varkappa^2 + \alpha_\varkappa f'(u_\varkappa) + \varphi(x) \qquad (\varkappa = 1,2,3),$$

wo $f(u) = (u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)$ und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ Constanten sind. Setzt man

$$(u_1-u_3):(u_3-u_2) = (t:1-t),$$

so ergiebt sich, dass die Function $t(x)$ der Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{d^2 \log t'}{dx^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log t'}{dx}\right)^2 + \frac{Lt^2+Mt+N}{2t^2(1-t^2)^2} - 2\varphi(x) = 0$$

genügen muss. L, M, N stehen mit den $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ durch folgende Gleichungen in Verbindung:

$$L = 1-m^2, \quad M = l^2+m^2-n^2-1, \quad N = 1-l^2,$$

$$\varrho n = \alpha_1+1, \quad \varrho l = \alpha_2+1, \quad \varrho m = \alpha_3+1, \quad \varrho = 1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3.$$

Ist t aus (2) gefunden, so erhält man die Lösung von (1) in der Form

$$u_\varkappa = a_\varkappa \frac{d \log t'}{dx} + b_\varkappa \frac{d \log t}{dx} + c_\varkappa \frac{d \log(1-t)}{dx} \qquad \varkappa = 1,2,3,$$

wo $a_\varkappa, b_\varkappa, c_\varkappa$ constante Coefficienten sind, die mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in einfacher Beziehung stehen. Es folgen nunmehr specielle Annahmen für $\varphi(x)$, bei welchen die Gleichung (2) und in Folge dessen auch das System (1) in geschlossener Form integrirbar wird, und die mit den Bedingungen der algebraischen Integrirbarkeit einer linearen Differentialgleichung in Zusammenhang stehen. Hr.

G. Halphén. Sur un système d'équations différentielles. C. R. XCII. 1101-1103.

Das betrachtete System ist

$$\frac{d(u_1+u_2)}{d\alpha} = u_1 u_2, \quad \frac{d(u_2+u_3)}{d\alpha} = u_2 u_3, \quad \frac{d(u_1+u_3)}{d\alpha} = u_1 u_3.$$

Dasselbe transformirt sich in ein System derselben Gestalt, wenn man setzt

$$\beta = \frac{a\alpha+b}{a'\alpha+b'}, \quad u_s = -\frac{2a'}{a'\alpha+b'} + \frac{ab'-a'b}{(a'\alpha+b')^2} v_s \quad (s = 1,2,3),$$

wo a, b, a', b' Constanten bedeuten. Es genügt demnach ein particuläres Integral, um das vollständige zu erhalten. Nimmt man nun $\alpha = \log q$, so ist eine Lösung

$$U_1 = \frac{d \log \theta^4(K)}{d\alpha}, \quad U_2 = \frac{d \log \theta^4(0)}{d\alpha}, \quad U_3 = \frac{d \log H^4(K)}{d\alpha},$$

folglich die allgemeine Lösung

$$u_s = -\frac{2a'}{a'\alpha+b'} + \frac{ab'-ba'}{(a'\alpha+b')^2} U_s\left(\frac{a\alpha+b}{a'\alpha+b'}\right) \quad (s = 1,2,3).$$

Schliesslich wird noch die Gruppe der linearen Substitutionen für α angegeben, welche U_1 und U_2, U_2 und U_3 unter sich vertauschen. Es ist diejenige, welche den von Herrn Hermite für die Theorie der Modulargleichungen eingeführten Functionen $\varphi(\varrho)$ und $\psi(\varrho)$ zugehörig ist. Hr.

F. Brioschi. Sur un système d'équations différentielles. C. R. XCII. 1389-1393.

G. Halphén. Sur certains systèmes d'équations différentielles. C. R. XCII. 1404-1407.

Im Anschluss an die im Vorhergehenden besprochene Note des Herrn Halphén betrachtet Herr Brioschi das System

$$(1) \qquad \frac{d(u_r+u_s)}{d\alpha} = u_r u_s + \varphi(\alpha) \quad (r,s = 1,2,3),$$

welches für $\varphi(\alpha) = 0$ in das Halphén'sche übergeht. Er zeigt, dass, wenn ξ ein Integral der Gleichung

$$(2) \qquad \varphi(\alpha) = \frac{2\xi'''}{\xi'} + \frac{3\xi''^2}{\xi'^2} + \frac{1-\xi+\xi^2}{\xi^2(1-\xi)^2} \xi'^2 \qquad \left(\xi^{(\varkappa)} = \frac{d^\varkappa \xi}{d\alpha^\varkappa}\right)$$

ist, die Gleichungen (1) zu Lösungen haben:

$$u_1 = \frac{\xi''}{\xi'} - \frac{1-2\xi}{\xi(1-\xi)} \xi', \quad u_2 = \frac{\xi''}{\xi'} - \frac{\xi'}{\xi}, \quad u_3 = \frac{\xi''}{\xi'} + \frac{\xi'}{1-\xi}.$$

Die Gleichung (2) stimmt aber mit der Differentialgleichung dritter Ordnung überein, die Herr Kummer (Crelle J. XV.) aus zwei linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung abgeleitet hat, wenn man für die unabhängigen Variablen bezüglich α und ξ nimmt. Von diesen ist in dem hier vorliegenden Falle die eine

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{1-2\xi}{\xi(1-\xi)}\frac{dw}{d\xi} - \frac{1}{4\xi(1-\xi)} w = 0$$

und hat zu Integralen

$$w_0 = \frac{2}{\pi} K, \quad w_1 = \frac{2}{\pi} K',$$

worin K und K' die Perioden der elliptischen Functionen mit $\sqrt{\xi}$ als Modul bezeichnen. Sind die Integrale y_0 und y_1 der anderen Differentialgleichung als Functionen von α ebenfalls bekannt, so ist das allgemeine Integral der Gleichung (2) durch die Relation

$$\frac{w_1}{w_0} = \frac{K'}{K} = \frac{y_1}{y_0}$$

gegeben. Im Falle $\varphi(\alpha) = 0$, ist die andere Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d\alpha^2} = 0.$$

Man kann dann $\alpha = \log q$ setzen, wo $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$ ist, und es findet sich das Halphén'sche Resultat verificirt.

Herr Halphén zeigt, dass man durch eine Aenderung der Variablen in dem System (1) stets $\varphi(\alpha)$ zum Verschwinden bringen kann. Ist nämlich $f(\alpha)$ eine Lösung der Gleichung

$$2f'(\alpha) = f^2(\alpha) + \varphi(\alpha)$$

und ferner $F(\alpha)$ durch die Gleichung

$$f(\alpha) = [\log F(\alpha)]'$$

definirt, und macht man die Substitutionen

$$(3) \qquad \beta = \int F(\alpha) d\alpha, \quad u_r = f(\alpha) + v_r F(\alpha),$$

dann wird das transformirte System

$$\frac{d(v_r + v_s)}{d\beta} = v_r v_s.$$

Diese Eigenschaft kommt auch dem allgemeineren Systeme

$$(4) \qquad \frac{du_r}{dx} = \psi_r(u_1, u_2, \ldots u_n) + \varphi(\alpha) \qquad (r = 1, 2 \ldots n)$$

zu, wo $\psi_1, \dots \psi_n$ quadratische Formen von der Beschaffenheit bedeuten, dass

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} = \frac{\partial \psi_2}{\partial u_2} = \dots = \frac{\partial \psi_n}{\partial u_n} = 2\lambda u$$

ist, wenn $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u$, während die anderen Derivirten erster Ordnung sämmtlich Null sind. Bestimmt man $f(\alpha)$ durch die Gleichung

$$f'(\alpha) = \lambda f^2(\alpha) + \varphi(\alpha),$$

und setzt

$$2\lambda f(\alpha) = [\log F(\alpha)]',$$

so transformiren die Substitutionen (3) das System (4) in

$$(5) \qquad \frac{dv_r}{d\beta} = \psi_r(v_1, \dots v_n) \qquad (r = 1, 2 \dots n).$$

Diese letzteren Gleichungen reproduciren sich unverändert, wenn man setzt

$$\beta = \frac{a\alpha + b}{a'\alpha + b'}, \quad u_r = -\frac{a'}{\lambda(a'\alpha + b')} + \frac{ab' - a'b}{(a'\alpha + b')^2} v_r.$$

Hierdurch ist der Zusammenhang dieser Systeme mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gegeben. Zum Schluss giebt der Verfasser die Integration des Systems (5) für den Fall $n = 3$ durch die hypergeometrischen Functionen X, Y, Z, die er in einer vorhergehenden Note (C. R. XCII. 856, siehe p. 266) definirt hat. Hr.

Capitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

L. Tanner. Notes on a general method of solving partial differential equations of the first order with several dependent variables. Lond., M. S. Proc. XI. 72-83. 1880.

Für die Auflösung eines Systems von r partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit m abhängigen Variablen $z_1, \dots z_m$ und n unabhängigen Variablen $x_1, \dots x_n$ werden zwei

Methoden angegeben. Die erste ist eine Ausdehnung des Verfahrens für den Fall einer abhängigen Variablen. Man bestimmt die Werte der mn Derivirten $\frac{\partial z_i}{\partial x_\varkappa}$, indem man zu den gegebenen Gleichungen

$$\mathfrak{F}_1 = 0, \dots \mathfrak{F}_r = 0$$

noch $mn-r$ andere Gleichungen

$$\mathfrak{F}_{r+1} = 0, \dots \mathfrak{F}_{mn} = 0$$

derart ableitet, dass die sich daraus ergebenden Werte von $\frac{\partial z_i}{\partial x_\varkappa}$ die Identitäten

$$\frac{\partial}{\partial x_\varkappa}\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_\varkappa}\right)$$

erfüllen, oder das System

$$dz_i = \frac{\partial z_i}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial x_n} dx_n \qquad (i = 1,\dots m)$$

integrirbar machen; die Integration desselben ergiebt dann die z.

Die andere Methode erfordert zunächst, dass die simultanen partiellen Differentialgleichungen auf die sogenannte homogene Form gebracht seien, die der Verfasser in einer früheren Schrift (Proc. L. M. S. IX. 41, s. F. d. M. X. 1878. 255) definirt hat. Die Derivirten kommen darin nur in den Functionaldeterminanten

$$\frac{\partial(z_1 \dots z_m)}{\partial(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m})} = (i_1 i_2 \dots i_m)$$

vor, wo $i_1, i_2, \dots i_m$ eine Combination von m aus den n Indices $1, 2, \dots n$ bedeuten; und zwar sind die Gleichungen in Beziehung auf sie homogen und enthalten ausserdem nur die unabhängigen Variablen x. Die Anzahl der von einander unabhängigen Determinanten ist $m(n-m)+1$, die anderen sind mit ihnen durch algebraische Relationen verknüpft. Es werden nun die gegebenen Gleichungen

$$\mathfrak{F}_1 = 0, \dots \mathfrak{F}_r = 0$$

noch durch $m(n-m)+1-r$ andere Gleichungen ähnlicher Form

$$\mathfrak{F}_{r+1} = 0, \dots \mathfrak{F}_{m(n-m)+1} = 0$$

derart ergänzt, dass die aus ihnen sich ergebenden Werte der

erwähnten Determinanten die Identitäten

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(i_2 i_3 \dots i_m) - \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}(i_1 i_3 \dots i_m) + \frac{\partial}{\partial x_{i_3}}(i_1 i_2 i_4 \dots i_m) - M = 0$$

erfüllen, dann sind $z_1, z_2, \dots, z_m$ die m Lösungen des Systems

$$(1, 2, 3, \dots m)\frac{\partial z}{\partial x_i} - (i, 2, 3, \dots m)\frac{\partial z}{\partial x_1} - (1, i, 3, \dots m)\frac{\partial z}{\partial x_2} - \cdots$$

$$-(1, 2, \dots m-1, i)\frac{\partial z}{\partial x_m} = 0, \qquad i = m+1, m+2 \dots n,$$

welches alsdann unbeschränkt integrirbar ist. Betreffs der Hilfssysteme zur Bestimmung der unbekannten $\mathfrak{F}$, auf deren Integration in beiden Methoden die Aufgabe zurückgeführt ist, werden einige Bemerkungen angefügt. Hr.

Alexéeff. Sur l'intégration des équations partielles du premier ordre à plusieurs variables dont les coefficients sont constants. Pét. Bull. XXVII.

Von geometrischen Betrachtungen in dem Falle zweier Veränderlichen ausgehend beweist der Verfasser dieser Note, dass sich das vollständige Integral der Gleichung

$$f(p_1, p_2, \dots p_n) = 0$$

mit constanten Coefficienten durch Elimination der p aus dem Systeme der Gleichungen

$$1) \quad z = \sum_{i=1}^{i=n} (x_1 - A_i) p_i;$$

$$2) \quad \frac{x_1 - A_1}{f' p_1} = \frac{x_2 - A_2}{f' p_2} = \cdots = \frac{x_n - A_n}{f' p_n};$$

$$3) \quad f(p_1, p_2, \dots p_n) = 0$$

ergiebt, wo

$$f' p_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

ist. Ty.

E. Padova. Sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali del primo ordine. Cheilni, Coll. Math. 105-117.

Es wird gezeigt, dass die Cauchy'sche Integrationsmethode für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung (Exercices d'Analyse etc. t. II.; cfr. z. B. Mayer, Clebsch Ann. III. 435 ff. s. F. d. M. III. 1871. p. 171) aus der von Ampère (J. de l'Éc. polyt. cah. 17 und 18) deducirt werden kann, wenn man letztere auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Variabeln ausdehnt.

T.

P. Mansion. Rectification. Brux. S. sc. V. A. 50-52.

Die Arbeit enthält die Darstellung eines Versuchs zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei abhängigen und zwei unabhängigen Variablen. Es handelt sich dabei der Hauptsache nach um Verbesserung der Irrtümer in der Arbeit, die sich im IV. Bd. 65-75 (s. F. d. M. XII. 1880. 289) finden.

Mn. (O.).

P. Mansion. Notes sur les équations aux dérivées partielles. Brux. S. sc. V. B. 17-33.

P. Gilbert. Rapport sur ce mémoire. Brux. S. sc. V. A. 58-64.

Der Verfasser zeigt, dass die Methode von Cauchy es möglich macht, die Theorie linearer Gleichungen mit partiellen Derivirten streng aufzustellen (s. F. d. M. XII. 1880. 283-284). Dann integrirt er in allen Fällen die Gleichung der Regelflächen mit Hülfe linearer Gleichungen, welchen Gegenstand er schon früher (siehe F. d. M. VIII. 1876. 490-491) im allgemeinen Fall behandelt hatte.

Mn. (O.)

P. Gilbert. Sur une propriété de la fonction de Poisson et sur la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Brux. S. sc. V. B. 1-16.

P. Mansion. Rapport sur ce mémoire. Brux. S. sc. V. A. 52-57.

Der Hauptteil der Abhandlung des Herrn Gilbert ist in den C. R. XCI. 541-544 und 613-616 erschienen und bereits in F. d. M. XII. 1880. 290 besprochen worden. Der Fehler Jacobi's und seiner Nachfolger rührt daher, dass sie Gleichungen mit Identitäten verwechselt haben. Die Ableitung des Herrn Gilbert ist einfacher und strenger, als die seiner Vorgänger.

Mn. (O.).

A. V. Bäcklund. Zur Theorie der Flächentransformationen. Klein Ann. XIX. 387-422.

Die Arbeit knüpft an die frühere in derselben Zeitschrift XVII. 285ff. (cf. F. d. M. XII. 1880. 290f.) veröffentlichte an. Es werden zunächst Betrachtungen über die durch die Gleichungen

$$f(z, z', x, y, p, q, p', q') = 0, \quad \varphi = 0$$

definirten räumlichen Gebilde angestellt. Die Existenz einer Transformation vom Raume (x, y, z) zum Raume (x, y, z'), die für alle Integralflächen eines gewissen Paares linearer partieller Differentialgleichungen dritter Ordnung, nämlich derjenigen, durch welche die Lösungen

$$z = F(x, y), \quad z' = \Phi(x, y)$$

jenes Systems dargestellt werden, eine Flächentransformation ist, und bei der ausserdem die Berührung zweiter Ordnung erhalten bleibt, giebt gegenüber dem Umstand, dass es keine specielle Berührungstransformation zweiter Ordnung giebt, die für den ganzen Raum (x, y, z) eine Flächentransformation ist, und dass es keine derartige Transformation giebt, die alle Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung wiederum in Flächen überführt (cf. die Abhandlung des Verfassers in Clebsch Ann. IX. 297-320, s. F. d. M. VII. 1875. 233), Anlass zur Erörterung der Frage, welcher Umstand für Systeme mehrerer Differentialgleichungen die Existenz derartiger Transformationen ermöglicht. Nach Behandlung einiger specieller Flächentransformationen, welche durch drei Gleichungen von der Form

$$F(z, x, y, p, q, z', x', y', p', q') = 0$$

definirt sind, wendet sich der Verfasser zu der durch vier derartige Gleichungen begründeten Transformation; sie ist im Allgemeinen nur für ein von gewissen zwei partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung bestimmtes Gebiet eine eindeutige Flächentransformation (cf. Clebsch Ann. XIII. p. 313). Unter Umständen kann jedoch das Gebiet enger werden; hiermit beschäftigt sich der übrige Teil der Arbeit. Im Anschluss an die entwickelten allgemeinen Sätze wird schliesslich einiges aus der von Bianchi und Lie herrührenden Theorie, welche aus einer gegebenen Fläche von constanter Krümmung neue derartige Flächen erzeugen lehrt, kurz aus einander gesetzt. T.

S. Lie. Discussion der Differentialgleichung $s = F(z)$.
Lie Arch. VI. 112-124.

Nach Moutard's alten, leider noch nicht in extenso publicirten Untersuchungen kennt man alle partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form

$$(1) \qquad s = F(x, y, z, p, q),$$

deren Integrale Ampère's erster Classe angehören. Diese Gleichungen sind bekanntlich zugleich die allgemeinsten der Form (1), die vermöge Darboux's allgemeiner Integrationstheorie erledigt werden können. Wie es scheint, hat noch Niemand die Frage beantwortet oder nur behandelt, ob es Gleichungen zweiter Ordnung giebt, deren Integrale nicht Ampère's erster Classe angehören, welche nach Lévy's Integrationstheorie (C. R. LXXV. 1094, s. F. d. M. IV. 1872. 172) integrirbar sind. Diese Frage wird im ersten Teile der vorliegenden Note für die Gleichungen der einfachen Form $s = F(z)$ entschieden. Das Interesse dieser Untersuchung beruht übrigens wesentlich nur darin, dass die angewandte Methode sich mit vollständigem Erfolge auf alle Gleichungen der Form $s = F(x, y, z)$ anwenden lässt.

Der zweite Teil der Note giebt eine vollständige Transformations-Theorie der Gleichung $s = F(z)$. Besonderes Interesse bietet die Liouville'sche Gleichung $s = A\,e^{kz}$ dar. Dieselbe wird nämlich durch unbegrenzt viele Berührungstransformationen, die sämmtlich

bestimmt werden, in sich transformirt. Alle anderen Gleichungen der Form $s = F(z)$ gestatten nur die folgende, sozusagen evidente Transformation in sich, nämlich

$$x' = mx + a, \quad y' = \frac{1}{m} y + b,$$

wobei m, a und b willkürliche Constante bezeichnen.

Diese letzte einfache Bemerkung findet eine bemerkenswerte Anwendung in der Theorie der Flächen constanter Krümmung, die sich bekanntlich durch eine partielle Differentialgleichung der Form

$$s = K . \sin z \qquad (K = \text{Const.})$$

definiren lassen. Man erkennt in der Tat, dass sich aus einer vorgelegten Fläche constanter Krümmung immer einfach unendlich viele derartige Flächen durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung herleiten lassen. Diesen ∞^1 Flächen entsprechen Parallelflächen mit constanter mittlerer Krümmung, die auf einander abwickelbar sind. L.

S. Lie. Ueber die Integration durch bestimmte Integration von einer Classe linearer partieller Differentialgleichungen. Lie Arch. VI. 328-368.

Diese Abhandlung giebt zuerst eine vollständige Transformationstheorie aller linearen und homogenen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen und einer abhängigen Variabeln. Eine jede solche Gleichung gestattet unbegrenzt viele Transformationen in sich. Ist nämlich $z = f(xy)$ ein beliebiges Integral, so gestattet die Gleichung eo ipso die Transformation

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = cz + f,$$

wo c eine beliebige Constante bezeichnet. Bei dieser gewissermassen evidenten Transformation bleiben x und y invariant. Es giebt mehrere Classen derartiger Gleichungen, welche ausserdem Transformationen in sich gestatten, bei denen auch x und y transformirt werden. Alle solche Gleichungen können durch

zweckmässige Coordinatenwahl auf eine der folgenden Formen gebracht werden:

$$1)\quad s+Y(y)q+z=0,$$

$$2)\quad s+Q(x-y)q+Z(x-y)z=0,$$

$$3)\quad s+\text{Const.}\,yq+z=0,$$

$$4)\quad s+\frac{A}{x-y}q+\frac{B}{(x-y)^2}z=0,$$

$$5)\quad r+q+Z(x)z=0,$$

$$6)\quad r+q=0,$$

$$7)\quad r+q+\frac{A}{x^2}z=0.$$

Gleichungen mit den canonischen Formen (1), (2) oder (5) gestatten nur eine infinitesimale Transformation, bei der x und y geändert werden. Die Gleichungen (3), (4) und (7) gestatten drei unabhängige infinitesimale Transformationen, die x und y ändern. Endlich gestattet die Gleichung (6) fünf derartige infinitesimale Transformationen. Es verdient bemerkt zu werden, dass die Differentialgleichung der Minimalflächen ein specieller Fall der Classe 4) ist; dieselbe umfasst im Uebrigen eine Reihe leicht bestimmbarer Gleichungen, deren Integrale Ampère's erster Classe angehören.

Die im Vorhergehenden besprochenen Gleichungen können nun im Allgemeinen nicht nach Laplace's Methode integrirt werden. Dagegen ist es im Allgemeinen möglich, ein particuläres Integral mit zwei willkürlichen Constanten aufzustellen. Diese Constanten treten nicht in linearer Weise auf, und daher findet man ohne Weiteres ein Integral mit zwei willkürlichen Functionen, die in particulären Integralen vorkommen. Zur Ausführung dieser Integration ist es keineswegs notwendig, die betreffende Gleichung zuerst auf die zugehörige canonische Form zu bringen. Wenn daher eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen z, x, y eine infinitesimale Transformation gestattet, bei der x und y geändert werden, so ist es immer möglich, durch Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen ein Integral mit willkürlichen Functionen aufzustellen. So unvollkommen die hiermit geleistete Integration auch sein mag, insofern

die willkürlichen Functionen in partiellen Integralen auftreten, so scheint doch diese Theorie einen nicht unwichtigen Fortschritt zu bilden. Es liegt in der Natur der Sache, dass diese Untersuchungen sich auf lineare Gleichungen beliebiger Ordnung mit beliebig vielen Variabeln ausdehnen lassen. L.

J. W. L. Glaisher. Note on certain symbolic operators and their application to the solution of certain partial differential equations. Lond., M. S. Proc. XII. 201-207.

Aus dem Poisson'schen Integral

$$\sqrt{\pi}.e^{a^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2au}du$$

folgt, da diese Relation identisch für a besteht, die symbolische Formel

$$\sqrt{\pi}e^{a^2D^2}\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\varphi(x+2au)\,du,$$

worin $e^{a^2D^2}\varphi(x)$ bedeutet, dass man in e^{y^2} die Potenzen y^ν durch $a^\nu \dfrac{d^\nu\varphi(x)}{dx^\nu}$ ersetzen soll. Setzt man hierin speciell $\varphi(x) = e^{kx^2}$, so ergiebt sich die von Crofton (Phil. Trans. 1870 p. 186ff.) gegebene Formel, die sich aber auch direct aus der Poisson'schen Formel ableiten lässt, wenn man von der Relation

$$\varphi(D)e^{mx} = e^{mx}.\varphi(m)$$

Gebrauch macht, wo $\varphi(D)e^{mx}$ bedeutet, dass man in $\varphi(u)$ für die Potenzen von u die entsprechende Ableitung von e^{mx} nach x setzen soll. Dieselbe Methode giebt allgemeiner:

$$\varphi(D)e^{kx^2} = \frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2k}+xu}\varphi(u)\,du.$$

In ähnlicher Weise wie $e^{a^2D^2}\varphi(x)$, kann man $e^{a^4D^4}\varphi(x)$, $e^{a^8D^8}\varphi(x)$,... durch resp. zwei-, drei-, ..., -fache Integrale ausdrücken, z. B.

$$\pi^{\frac{3}{2}}e^{a^8D^8}\varphi(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^4-w^8}\varphi(x+2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}a u v^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{4}})\,du\,dv\,dw.$$

Umgekehrt ergeben sich auch Darstellungen für $e^{-aD^{\frac{1}{3}}}\varphi(x)$, $e^{-aD^{\frac{1}{4}}}\varphi(x)$, ... durch einfache, resp. mehrfache Integrale.

Dies wird auf die Darstellung der Lösungen gewisser partieller Differentialgleichungen angewandt. T.

G. Eastwood. Some examples of a new method of solving partial differential equations of the second order. Anal. VIII. 154-159.

Die Arbeit enthält einige Beispiele zu einer Methode, in welcher die zusammengesetzten symbolischen Factoren der Glieder der zweiten Ordnung durch Symbole der einfachen Differentiation ersetzt werden. Jn. (O.).

F. G. Teixeira. Sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre. C. R. XCIII. 702-703.

Es wird gezeigt, wie man die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$As+Bq+\psi(r, p, q, z, y, x) = 0,$$

wo A und B Functionen von x, y, z, p sind, in eine andere transformiren kann, welche in r und s linear ist. Zu diesem Zweck wird die durch $A\frac{\partial f}{\partial z} - B\frac{\partial f}{\partial p} = 0$ definirte Function f von x, y, z, p benutzt. T.

L. V. Turquan. Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. C. R. XCII. 1200-1202.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

hängt von einem gewissen System von sieben gewöhnlichen

Differentialgleichungen mit den acht Variabeln $x, y, \ldots, t$ ab; man erhält ein vollständiges Integral jener Gleichung, wenn man dieses System integrirt und aus den erhaltenen sieben Integralgleichungen eine von den in ihnen auftretenden sechs willkürlichen Constanten, nebst den fünf Derivirten p, q, r, s, t eliminirt. Im Falle des Fehlens einer oder mehrerer der letzten fünf Grössen, wodurch dies Verfahren illusorisch wird, führt eine vorhergehende lineare Transformation der x, y, z zum Ziele.

Es werden einige specielle Fälle angeführt, auf welche sich diese Methode anwenden lässt. T.

Picard et Appell. Sur certaines équations différentielles linéaires simultanées aux dérivées partielles. C. R. XCII. 692-695.

Der Satz des Herrn Picard betreffs der linearen Differentialgleichungen mit doppelt-periodischen Coefficienten (vgl. F. d. M. XI. 1879. 241, XII. 1880. 256, 257) wird auf die simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z, \\ t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z \end{cases}$$

ausgedehnt, wo die Coefficienten a_i, b_i eindeutige Functionen von x und y mit vier Paaren von conjugirten Perioden α_i und β_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ vorstellen. Es wird angenommen, dass das allgemeine Integral der Gleichung (1) eindeutig ist und im Endlichen keinen wesentlich singulären Punkt hat. Ist $F(x, y)$ ein Integral, dann sind auch $F(x+\alpha_i, y+\beta_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ Integrale, und es wird gezeigt, dass man ein Integral $\Phi(x, y)$ derart finden kann, dass

$$\Phi(x+\alpha_i, y+\beta_i) = \mu_i \Phi(x, y) \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Sind insbesondere α_i, β_i die Normalperioden von Abel'schen Normalintegralen erster Gattung vom Geschlecht 2, so kann man in

$$\Psi(x, y) = e^{h_1 x + h_2 y} \frac{\theta(x+g_1, y+g_2)}{\theta(x, y)}$$

die Constanten h_1, h_2, g_1, g_2 so bestimmen, dass $\Phi(x, y) : \Psi(x, y)$ eine eindeutige Function von x, y ist, welche die erwähnten

Normalperioden besitzt. Man erhält also $\Phi(x,y)$ mit Hülfe von θ-Functionen ausgedrückt. Die vorstehenden Sätze lassen sich auf das System totaler Differentialgleichungen

$$dz_i = (a_{i1}z_1 + \cdots + a_{in}z_n)dx_1 + \cdots + (l_{i1}z_1 + \cdots + l_{in}z_n)dx_p,$$
$$i = 1, 2, \ldots n$$

ausdehnen, wo die Coefficienten $a_{i\varkappa}, b_{i\varkappa}, \ldots l_{i\varkappa}$ eindeutige Functionen von $x_1, \ldots x_p$ mit $2p$ Gruppen von Perioden sind. Hr.

M. Falk. En anmärkning om partiela Differential-eqvationer. Zeuthen T. (4) V. 97-101.

Wenn eine Monge'sche partielle Differentialgleichung

$$Rr + Ss + Tt = W$$

vorgelegt ist, und man aus derselben mittels der vom Verfasser früher gegebenen Methoden (Nova Acta Reg. Soc. Scient. Ups. Ser. III. (1872) und Upsala Universitets Årsskrift. 1875, siehe F. d. M. VII. 1875. 223 eine neue Gleichung von der Form

$$U_0 \frac{d^3z}{dx^3} + U_1 \frac{d^3z}{dx^2dy} + U_2 \frac{d^3z}{dxdy^2} + U_3 \frac{d^3z}{dy^3} = V$$

ableitet, so kann es sich ereignen, dass diese Gleichung und dadurch die vorgelegte integrirt werden kann, selbst in Fällen, wo die Monge'sche Methode nicht zutrifft. Als Beispiel behandelt der Verfasser die Gleichung $x(r-t) = 2p$. Gm.

Capitel 7.

Variationsrechnung.

G. Erdmann. Ueber die Variationen n^{ter} Ordnung. Schlömilch Z. XXVI. 73-98.

Es handelt sich um die Fälle, in denen die Betrachtung der höheren Variationen für die Bestimmung eines Maximums oder

Minimums erforderlich ist. Es sei

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y')\,dx$$

das vorgelegte Integral; vorausgesetzt werde, dass die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \varphi}{\partial y'},$$

die notwendig zu erfüllen ist, wenn V ein Maximum oder Minimum werden soll, wirklich von der 2ten Ordnung sei, ihre Lösung also zwei von einander unabhängige Constante enthalte, dass ferner alle Differentialquotienten $\frac{\partial^{m+n}\varphi}{\partial y^m \partial y'^n}$ für die aus (1) sich ergebenden Functionen von y im Intervalle $x_0, \ldots x_1$ endlich und stetig seien, endlich, dass sämmtliche Ableitungen von y und y' nach den willkürlichen Constanten endlich bleiben. Bestimmt man die eine Integrationsconstante so, dass y für $x = x_0$ den Wert y_0 erhält, bezeichnet man die zweite Integrationsconstante durch c und setzt man $\frac{dy}{dc} = u$, welche Grösse innerhalb der Integrationsgrenzen nicht verschwinden soll, so lässt sich die zweite Variation auf die Form bringen:

$$\delta V = \varepsilon^2 \int_{x}^{x_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} g'^2 u^2\,dx,$$

wenn man $\delta y = \varepsilon g u$ setzt, wo ε eine unendlich kleine Constante ist. Hieraus ergiebt sich, dass die zweite Variation verschwindet, aber nicht negativ werden kann, die höheren Variationen also zu untersuchen sind, (abgesehen von dem Falle $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} \equiv 0$), falls $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2}$ stets positiv ist, und u für $x = x_1$ verschwindet. Durch eine Transformation, die für die n^{te} Variation von V gegeben wird, gelangt der Verfasser zu folgendem Ergebnis: Wenn alle Differentialquotienten $\frac{dy}{dc}, \frac{d^2 y}{dc^2}, \ldots, \frac{d^{2m-2} y}{dc^{2m-2}}$ für $x = x_1$ verschwinden, so hängt das Stattfinden eines Minimums von dem Vorzeichen der $(2m)^{\text{ten}}$ Variation ab, indem die $2m-1$ ersten Va-

riationen von V zum Verschwinden gebracht werden können, wenn $\delta^{x} y = \varepsilon^{x} u_{x}$ gesetzt wird für jedes x, welches kleiner als m. Die $(2m)^{\text{te}}$ Variation von V wird für alle beliebigen Werte der Variationen $\delta^{m} y$, $\delta^{m+1} y, \dots$ nur dann grösser als 0 sein, wenn $\frac{d^{2m-1} y}{dc^{2m-1}}$ und $\frac{dy'}{dc}$ für $x = x_1$ verschiedenes Zeichen haben. Verschwindet $\frac{d^{2m-1} y}{dc^{2m-1}}$ für $x = x_1$, so kann auch die $(2m)^{\text{te}}$ Variation zum Verschwinden gebracht werden.

Dieser Satz wird dann geometrisch interpretirt und schliesslich auf das Problem des Princips der kleinsten Wirkung für die Bewegung eines von einem festen Punkte angezogenen Körpers angewendet, wenn die Anziehung entweder umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung oder direct proportional derselben geschieht. T.

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

E. JABLONSKI. Note sur les limites et les nombres incommensurables. Nouv. Ann. (2) XX. 241-250.

Kurze Zusammenstellung der Sätze über Grenzbetrachtungen nebst einigen Anwendungen, z. B. auf die Subtraction zweier Zahlen, welche beide rational sind. No.

K. WEIERSTRASS. Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques. Darb. Bull. (2) V. 157-183.

Uebersetzung der Abhandlung „Zur Functionenlehre“ aus den Berl. Monatsber. 1880, 719-743, (s. F. d. M. XII. 1880. 310) und der folgenden Mitteilung aus den Berl. Monatsber. 1881. M.

K. WEIERSTRASS. Mitteilung zur Functionenlehre. Berl. Monatsber. 1881. 228-230.

Herr Tannery hat Herrn Weierstrass darauf aufmerksam gemacht, dass die in § 4 der Abhandlung „Zur Functionenlehre“ (Berl. Monatsber. 1880, s. F. d. M. XII. 1880. 310) aus rationalen Functionen einer Veränderlichen x gebildete unendliche Reihe, welche

den Wert $+1$ oder -1 hat, je nachdem der reelle Teil von x positiv oder negativ ist, durch höchst einfache Reihen ähnlicher Art ersetzt werden kann, welche dem gleichen Zwecke dienen und zugleich zu ihrer Aufstellung und zum Nachweise ihrer characteristischen Eigenschaften nur der elementarsten Sätze der Functionenlehre bedürfen. M.

K. Weierstrass. Sur un théorème de M. Mittag-Leffler. Darb. Bull. (2) V. 113-124.

Uebersetzung der Abhandlung: „Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn G. Mittag-Leffler", Berl. Ber. 1880. 707-711 (s. F. d. M. XII. 1880. 311). M.

G. Mittag-Leffler. Recherches sur la théorie des fonctions. Darb. Bull. (2) V. 388-392.

Uebersetzung einer Note, welche in schwedischer Sprache in der Öfv. af Finska Vet. Soc. Forh. t. XXIII. erschienen ist. Sie berichtet über die Untersuchungen von Weierstrass, Hermite, Poincaré, dem Verfasser u. A., welche die Darstellung einer Function mit dem Character einer rationalen Function und die Reihen von algebraischen Functionen, resp. die Integralausdrücke betreffen, welche für verschiedene Bereiche der Ebene verschiedene analytische Functionen darstellen. Am Schlusse wird eine demnächst zu veröffentlichende grössere Abhandlung des Herrn Verfassers angekündigt über die verschiedenen Singularitäten, die in den eindeutigen analytischen Functionen auftreten, und über die Herstellung allgemeiner Formeln, mittels deren man allgemein die verschiedenen Classen von solchen Functionen, die möglich sind, darstellen kann. M.

Ch. Hermite. Sur quelques points de la théorie des fonctions. Extrait d'une lettre à M. Mittag-Leffler. Kronecker J. XCI. 54-78.

Dieser Brief enthält mehrere wichtige, die allgemeine Theorie der Functionen betreffende Bemerkungen.

Veranlasst durch das Studium der Abhandlung des Herrn Weierstrass (Berl. Monatsber. 1880, 707; s. F. d. M. XII. 1880. 311) über einen Satz des Herrn Mittag-Leffler, betreffend die Darstellung einer eindeutigen analytischen Function mit der einen wesentlichen singulären Stelle ∞ und vorgeschriebenen Unendlichs, hat Herr Hermite zum Beweise dieses Satzes eine etwas verschiedene Methode befolgt, welche er hier entwickelt. Er beweist nämlich zunächst diesen Satz für den Fall, dass die betrachtete Function die logarithmische Ableitung einer in der ganzen Ebene einwertigen Function ist, und wird dadurch auf die Zerlegung dieser Functionen in primäre Factoren geführt, wie sie zuerst Herr Weierstrass entdeckt hat.

Alsdann wird gezeigt, wie aus diesem Satze des Herrn Mittag-Leffler eine Methode sich ergiebt, um den von Herrn Weierstrass gefundenen Ausdruck für eine Function $\varphi(x)$ zu erhalten, die eine unendliche Reihe von Polen und eine bestimmte Anzahl wesentlicher singulärer Stellen hat. Herr Bourguet, ein Schüler des Herrn Hermite, hat diese Darstellung in seiner Inauguraldissertation ausführlich behandelt.

Hierauf geht der Herr Verfasser zu einer anderen Frage über. Er zeigt, wie die analytische Bedeutung der Flächenschnitte, welche Riemann in die allgemeine Theorie der Functionen eingeführt hat, rein elementaren Ursprungs ist und sich wie von selbst bei dem Studium des Integrals

$$\varphi(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)}{G(t, z)}\, dt$$

darbietet, wo t eine reelle von t_0 bis t wachsende Variable und $F(t, z)$ und $G(t, z)$ reelle oder imaginäre holomorphe Functionen von t und z sind. Als Beispiel dient die Function

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^a \sin z}{1+2t\cos z+t^2}\, dt.$$

Am einfachsten zeigt sich die Bedeutung der Schnitte in dem besonderen Falle

$$\varphi(z) = \int_{t_0}^{t_1} f(t+z)\,dt,$$

wo $f(t)$ eine eindeutige Function ist, die z nicht enthält und eine endliche oder unendliche Zahl von Polen besitzt. Angewendet wird das Resultat auf die Ermittelung des bestimmten Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt,$$

wo $f(t)$ als rationale Function angenommen wird; ferner auf die Bestimmung der Function

$$\varphi(z) = \int_{t_0}^{2\pi+t_0} f(t+z)\,dt,$$

worin $f(t)$ eine rationale Function von $\sin t$ und $\cos t$ ohne ganzen Teil und folglich endlich für unendliche imaginäre Werte der Variabeln ist; ferner auf das bestimmte Integral

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(t-z)}}{t-z}\,dt,$$

und auf den Fall, wo $f(t)$ eine eindeutige Function mit den Perioden $2k$ und $2ik'$ ist. Ein Theorem über die Zerlegung der doppelt-periodischen Functionen in einfache Elemente, welches mit der letzten Anwendung zusammenhängt, wird in einem Postscriptum zu obigem Briefe bewiesen.

Nimmt man die Grenzen des Integrals

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t+z)\,dt$$

imaginär und setzt

$$t = \varphi(u) + i\psi(u),$$

so dass die Variable irgend einen Weg zwischen diesen Grenzen durchläuft, so wird der geradlinige Schnitt, der dem Pole $p = a+ib$ entspricht, die durch die Gleichungen

$$x = a - \varphi(u), \quad y = b - \psi(u)$$

dargestellte Curve, d. h. der symmetrische Weg zu dem von der Variabeln beschriebenen, parallel mit sich selbst vom Anfangspunkt der Coordinaten zum Pol verschobenen Wege. M.

Ch. Hermite. Sur quelques points de la théorie de fonctions. Darb. Bull. (2) V. 312-320.

Ausführlicher Bericht des Herrn Tannery über die soeb besprochene Mitteilung des Herrn Hermite an Herrn Mittag-Lef ler, die auch Act. Soc. Sc. Fenn. t. XII. erschienen ist.

M.

U. Dini. Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabi complessa. Chelini, Coll. Math. 258-276.

In der bekannten Abhandlung von Herrn Weierstrass (Be Abh. 1876) sind Functionen dargestellt, die in der ganzen Ebe eindeutig sind und in beliebig gegebenen Punkten in endlich Ordnung unendlich werden. Specielle Functionen dieser A zu denen die Jacobi'sche ϑ-Function gehört, hatte schon He Betti untersucht (Annali di Tortolini vol. III. p. 82). Eine M dification des Betti'schen Verfahrens führt den Herrn Verfass auch zur Construction der allgemeinen Weierstrass'schen Fun tion. Eine Function, die nur in den Punkten $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots$ Null wird resp. in der Ordnung $m_1, m_2, \dots m_n, \dots$, wird in d Form vorausgesetzt

$$\Pi\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)^{m_n}\cdot e^{\varphi_n(z)},$$

wo $\varphi_n(z)$ eine ganze Function ist. Der Convergenzfactor e^{φ_n} wird nun so bestimmt, dass nicht nur die Reihe der Logarithme sondern auch die Reihe ihrer Derivirten, dass also die zw Reihen

$$\Sigma\left\{m_n\log\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right)+\varphi_n(z)\right\} \text{ und } \Sigma\left\{-\frac{m_n}{\alpha_n-z}+\varphi'_n(z)\right\}$$

unbedingt und gleichmässig convergiren (Herr Betti hatte n die erste Reihe in Betracht gezogen und daher nur engere R sultate erhalten). Das nämliche Princip dient alsdann zur H leitung des von Herrn Mittag-Leffler gegebenen Satzes, na welchem immer eine Function existirt, die in beliebig gegeben Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots$ unendlich wird in den Ordnung

$m_1, m_2, \dots m_n, \dots$ und zwar in α_n wie eine bestimmt vorgegebene Function

$$\frac{A_{n1}}{z-\alpha_n}+\frac{A_{n2}}{(z-\alpha_n)^2}+\cdots+\frac{A_{nm_n}}{(z-\alpha_n)^{m_n}}+W_n(z),$$

wo $W_n(z)$ in der Umgebung von α_n den Character einer ganzen Function hat, also von der Form ist:

$$W_n(z)=B_{n0}+B_{n1}(z-\alpha_n)+\cdots+B_{nq_n}(z-\alpha_n)^{q_n}+\cdots.$$

Die Mittag-Leffler'sche Function wird hergestellt zuerst für den Fall, dass nur die Coefficienten $A_{n1}, A_{n2}, \dots A_{nm_n}$, zweitens für den Fall, dass zugleich die q_n-1 ersten Coefficienten $B_{n0}, B_{n1}, \dots B_{nq_n-1}$ gegeben sind. Da der Beweis nicht ausschliesst, dass einige oder alle Zahlen $m_1, m_2, \dots m_n, \dots$ und einige der Coefficienten B gleich Null sind, so folgt weiter: Es giebt unendlich viele einwertige Functionen, die in beliebig gegebenen Punkten in endlicher Ordnung unendlich, in anderen Punkten in endlicher Ordnung unendlich klein oder auch endlich sind, derart, dass in den Entwickelungen der Function in der Umgebung aller dieser Punkte für die Punkte der ersten Art die Coefficienten in dem Bruchteil der Entwickelung, für die Punkte der anderen Art die Coefficienten der ersten Glieder der Entwicklung oder, was dasselbe, dass für die letzteren Punkte die Werte der Function und einer endlichen Zahl ihrer Derivirten gegeben sind. Für besondere einfache Fälle werden zum Schluss noch andere Constructionen solcher Functionen angegeben.

H. St.

H. A. Schwarz. Verallgemeinerung eines analytischen Fundamentalsatzes. Brioschi Ann. (2) X. 129-137.

Wenn $\varphi(t)$ eine reelle Function der reellen Variabeln t bezeichnet, welche nebst ihrer ersten Ableitung innerhalb des Intervalls $t_1 \dots t_2$ eindeutig, endlich und stetig ist, so besteht der Satz, dass $\frac{\varphi(t_2)-\varphi(t_1)}{t_2-t_1}$ nicht grösser als der grösste und nicht kleiner als der kleinste unter den Werten ist, welche $\varphi'(t)$ inner-

halb des Intervalles $t_1 \dots t_2$ annimmt. In vorliegender Note wird die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes aufgestellt und bewiesen:

„Es seien $f_1(t), f_2(t), \dots f_n(t)$ n Functionen derselben stetig veränderlichen Grösse t, welche nebst ihren Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ einschliesslich für alle in Betracht kommenden Werte des Argumentes t endlich, stetig und eindeutig sind. Sowohl die Grösse t, als auch die betrachteten Functionen nehmen nur reelle Werte an. Unter diesen Voraussetzungen ist, wenn $t_1, t_2, \dots t_n$ n von einander verschiedene, dem Intervalle $a \dots b$ angehörende Werte des Argumentes t bezeichnen, der Wert des Quotienten

$$\begin{vmatrix} f_1(t_1), & f_2(t_1), & \dots & f_n(t_1) \\ f_1(t_2), & f_2(t_2), & \dots & f_n(t_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(t_n), & f_2(t_n), & \dots & f_n(t_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, & t_1, & \dots & t_1^{n-1} \\ 1, & t_2, & \dots & t_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & t_n, & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

nicht grösser als $\frac{g}{1!2!3!\dots(n-1)!}$ und nicht kleiner als $\frac{k}{1!2!3!\dots(n-1)!}$, wo g den grössten, k den kleinsten unter denjenigen Werten bezeichnet, welche die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(t') & , f_2(t') & , \dots & f_n(t') \\ f'_1(t'') & , f'_2(t'') & , \dots & f'_n(t'') \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1^{(n-1)}(t^{(n)}), & f_2^{(n-1)}(t^{(n)}), & \dots & f_n^{(n-1)}(t^{(n)}) \end{vmatrix}.$$

in dem Gebiete

$$a \leqq t' \gtreqless b,\ t' \leqq t'' \gtreqless b,\ t'' \leqq t''' \gtreqless b,\ \dots\ t^{(n-1)} \leqq t^{(n)} \gtreqless b$$

annimmt.“ Von diesem Satze werden zwei geometrische Anwendungen gemacht, welche eine fundamentale Eigenschaft der Schmiegungsebenen und Schmiegungskugeln einer Raumcurve ergeben.

Hz.

A. Markoff. Sur une question de Jean Bernoulli.
Klein Ann. XIX. 27-36.

J. Bernoulli hat in seiner Abhandlung: „Sur une nouvelle espèce de calcul, Recueil pour les astronomes T. I., die Aufgabe vorgelegt: Für die gegebenen reellen Grössen a und b die Reihe der ganzen Zahlen

$$F(b),\ F(a+b),\ F(2a+b),\ F(3a+b),\ \dots$$

zu bilden, welche die den resp. Zahlen

$$b,\ a+b,\ 2a+b,\ 3a+b,\ \dots$$

möglichst benachbarten ganzen Zahlen sind. Ist a eine rationale Zahl, so ist die Reihe der Differenzen

$$F(a+b)-F(b),\ F(2a+b)-F(a+b),\ F(3a+b)-F(2a+b),\dots$$

periodisch, und diese Periodicität lässt sich leicht ermitteln, wie J. Bernoulli gezeigt hat. Hier wird nun der Fall untersucht, wo a irrational ist. Auch in diesem Falle kann man gewisse Perioden ermitteln, sobald man sich auf eine begrenzte Anzahl von Gliedern beschränkt. Es wird folgender Satz bewiesen: „Wie auch immer die reellen Grössen a und b beschaffen sein mögen, die kürzeste Periode des Systems

$$F(a+b)-F(b),\ F(2a+b)-F(a+b),\dots,\ F(Na+b)-F((N-1)a+b),$$

wo N eine positive ganze Zahl ist, wird zugleich die Periode der Reihe

$$\dots,\ F\left(-\frac{p}{q}+\theta\right)-F\left(-2\frac{p}{q}+\theta\right),\quad F(\theta)-F\left(-\frac{p}{q}+\theta\right),$$
$$F\left(\frac{p}{q}+\theta\right)-F(\theta),\dots$$

sein, wo $\frac{p}{q}$ einer der Näherungswerte von a, und die Zahl θ durch die Gleichungen

$$F(b)=F(\theta),\quad F(a+b)=F\left(\frac{p}{q}+\theta\right),\quad F(2a+b)=F\left(2\frac{p}{q}+\theta\right),$$
$$\cdots F(Na+b)=F\left(N\frac{p}{q}+\theta\right)$$

bestimmt werden kann.“ M.

E. Schering. La formule d'interpolation de M. Hermite exprimée algébriquement. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. C. R. XCII. 510-513.

Der von Herrn Hermite (Sur la formule d'interpolation de Lagrange, Borchardt J. LXXXIV. 70; s. F. d. M. IX. 1877. 312) gegebene Ausdruck einer algebraischen Function, deren Wert zugleich mit den Werten mehrerer ihrer Ableitungen vorgeschrieben war, enthält ein Integral

$$\int \frac{f(z)\varphi(x)dz}{(x-z)\varphi(z)}.$$

Herr Schering ersetzt diese Darstellung durch eine rein algebraische von der Form:

$$F(x) = \sum_{\sigma=1}^{t} \varphi_0(x) \left\{ \mathfrak{P}\left[\frac{F_\sigma(x)}{\varphi_\sigma(x)} \,|\, x-a_\sigma \,|\, -1\right] + \psi_\sigma(x) \right\},$$

wo

$$\varphi_\sigma(x) = \prod_{\varrho=1}^{t} (x-a_\varrho)^{1+n_\varrho} \varphi_{\sigma,\varrho}(x)$$

ist, und die eindeutigen willkürlichen Functionen $\varphi_{\sigma,\varrho}(x)$ und $\psi_\sigma(x)$ für hinreichend kleine Werte des Moduls von $(x-a_r)$ nach Potenzen von $(x-a_r)$ mit nicht negativen Exponenten entwickelbar sind, und wo die Functionen $\mathfrak{P}$ definirt werden durch die Gleichungen

$$\mathfrak{P}[F(x)\,|\,x-a\,|\,n] = \sum_{\mu=-M}^{\nu} A_\mu (x-a)^\mu$$

oder

$$\mathfrak{P}\left[F(x)\,\Big|\,\frac{1}{x}\,\Big|\,n\right] = \sum_{\mu=-m}^{\nu} B_\mu \left(\frac{1}{x}\right)^\mu.$$

Herr Schering nennt diese Functionen „Berührungsfunctionen" für die Function $F(x)$:

$$F(x) = \sum_{\mu=-M}^{+N} A_\mu (x-a)^\mu \text{ oder } F(x) = \sum_{\mu=-m}^{+n} B_\mu \left(\frac{1}{x}\right);$$

ν bezeichnet den grössten Wert, den der Exponent μ annehmen kann, ohne den Wert n zu überschreiten. M.

A. GENOCCHI. Sopra una proprietà delle funzioni interpolari. Torino, Atti XVI. 269-275.

In seiner Abhandlung über die von Ampère (Gergonne Ann. XVI. a. 1825-1826, 346) eingeführten Interpolations-Functionen, welche durch die successiven Gleichungen

$$f(a_1, a_2) = \frac{f(a_1)-f(a_2)}{a_1-a_2}, \quad f(a_1, a_2, a_3) = \frac{f(a_1, a_2)-f(a_1, a_3)}{a_2-a_3} \text{ etc.}$$

definirt werden, hat Cauchy für die Function $f(a_1, a_2, \dots a_n)$ den Ausdruck

$$\frac{f^{(n-1)}(u)}{1.2\dots(n-1)}$$

gegeben, wo $f^{(n-1)}(u)$ ein mittlerer Wert unter denen ist, welche die Ableitung $f^{(n-1)}(x)$ annimmt, wenn x successive die Werte $a_1, a_2, \dots a_n$ durchläuft. Werden diese Werte einander gleich, so reducirt sich die Function auf den Wert

$$\frac{f^{(n-1)}(a_1)}{1.2\dots(n-1)},$$

den schon Ampère gefunden hat. Diese Resultate fliessen sofort aus der Darstellung der Interpolationsfunction durch vielfache Integrale, die Herr Genocchi früher (Atti di Torino XIII. 716; s. F. d. M. X. 1878. 212) gezeigt hat. Im Vorliegenden werden nun diese Eigenschaften der Interpolationsfunction auf einem anderen Wege, ohne Zuhülfenahme der Integralrechnung, bewiesen. M.

F. CASORATI. Osservazioni sui modi comunemente usati nella trattazione di parecchie questioni fondamentali dell' analisi infinitesimale. Rom., Acc. L. (3) V. 216-217.

Es wird folgender Satz durch den Schluss von n auf $n+1$ bewiesen. „Sind

$$f_1(z), \ f_2(z), \ \dots \ f_n(z)$$

n algebraische rationale ganze Functionen der Variabeln z, und $c_1, c_2, \dots c_n$ n verschiedene Constanten, und bildet man die Determinante

$$\begin{vmatrix} c_1^z f_1(z) & c_2^z f_2(z) & \dots & c_n^z f_n(z) \\ \theta c_1^z f_1(z) & \theta c_2^z f_2(z) & \dots & \theta c_n^z f_n(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{n-1} c_1^z f_1(z) & \theta^{n-1} c_2^z f_2(z) & \dots & \theta^{n-1} c_n^z f_n(z) \end{vmatrix}$$

$$= c_1^z c_2^z \dots c_n^z \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ c_1 \theta f_1 & c_2 \theta f_2 & \dots & c_n \theta f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^{n-1}\theta^{n-1} f_1 & c_2^{n-1}\theta^{n-1} f_2 & \dots & c_n^{n-1}\theta^{n-1} f_n \end{vmatrix},$$

wo $\theta f(z)$, $\theta^2 f(z)$ etc., $f(z+1)$, $f(z+2)$ etc. bezeichnen, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung, dass diese Determinante identisch Null werde, die, dass eine der Functionen f Null wird."

M.

E. Picard. Sur la décomposition en facteurs primaires des fonctions uniformes ayant une ligne de points singuliers essentiels. C. R. XCII. 690-692.

Analog der Zerlegung der ganzen Functionen in primäre Factoren, wie sie Herr Weierstrass gelehrt hat, wird hier die entsprechende Zerlegung einer eindeutigen Function $G(z)$ behandelt, die für alle Punkte der Ebene stetig ist, mit Ausnahme einer unendlichen Zahl von Punkten, die alle auf der Peripherie eines mit dem Radius R um den Anfangspunkt geschlagenen Kreises liegen. Es ergeben sich Darstellungen, die für $R=0$ in die von Herrn Weierstrass gegebenen übergehen. Die Zerlegung dieser Functionen $G(z)$ unterscheidet sich aber wesentlich dadurch von der ganzen Function, dass verschiedene Formen der Darstellung möglich sind.

M.

H. v. Höpflingen-Bergendorf. Zur Zerlegung einer rationalen algebraischen Function in Partialbrüche. Hoppe Arch. LXVI. 314-320.

Es wird die echt gebrochene Function $\frac{f(x)}{F(x)}$ unter der Vor-

aussetzung, dass $F(x) = 0$ lauter verschiedene Wurzeln habe, in der Form

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$$

dargestellt, und es werden die Constanten $A_1, A_2, \ldots A_n$ nach der Methode der unbestimmten Coefficienten, mittels einer sehr umständlichen Rechnung bestimmt. M.

G. Darboux. Sur les différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes. Darb. Bull. (2) V. 376-384, 395-424.

Die Resultate des ersten Abschnittes sind bereits in einer Note der C. R. XCIII. 1123-1125 mitgeteilt, über welche auf p. 209 berichtet worden ist. M.

Kr. Gade. Beviser for to Sätninger af de periodiske Funktioners Theori. Zeuthen T. (4) V. 181-184.

Der Satz, dass eine periodische Function nur zwei unabhängige Perioden haben kann, wird mittels geometrischer Betrachtungen geführt. Angenommen, dass innerhalb eines gegebenen Parallelogrammes oder auf einer endlichen Geraden nur eine endliche Anzahl von Periodenpunkten liegt, wird erstens gezeigt, dass, wenn zwei solche auf einer Geraden durch O liegen, sie Multipla der nämlichen Periode sein müssen. Betrachtet man demnächst ein durch O, ω_1, ω_2 bestimmtes Parallelogramm, so können alle Perioden aus Ω_1 und Ω_2 gebildet werden, wenn Ω_1 den Periodenpunkt, welcher O am nächsten auf $O\omega_1$ liegt, und ferner Ω_2 denjenigen innerhalb des Parallelogramms $O\omega_1\omega_2$, der von $O\omega_2$ die kleinste Entfernung hat, bezeichnet. Gm.

O. Rausenberger. Theorie der allgemeinen Periodicität. Klein Ann. XVIII. 379-410.

Eine Function $F(x)$, die der Gleichung

$$(1) \qquad F(\varphi_1(x)) = F(x)$$

genügt, wobei $\varphi_1(x)$ eine beliebige algebraische Function bedeutet, heisst eine periodische Function (im weiteren Sinne). Die Gleichung $y = \varphi_1(x)$ oder die entsprechende implicite Gleichung $f(x, y) = 0$ heisst die zu $F(x)$ gehörige Periodicitätsgleichung. Es gilt folgender Satz, der ein bekanntes von Herrn Weierstrass herrührendes Theorem erweitert: „Jede Function, die ein algebraisches Functionaltheorem besitzt, derart, dass

$$F[\psi(x, y)] = \varphi[F(x), F(y)]$$

ist, wobei φ und ψ algebraische Functionen bezeichnen, ist entweder algebraisch oder periodisch oder die Umkehrung einer periodischen Function." Ist $F(x)$ eine periodische Function der oben genannten Art und $F_1(x) = F(\psi_1(x))$, wo $\psi_1(x)$ eine algebraische Function, dann ist $F_1(x)$ ebenfalls periodisch und ihre Periodicitätsgleichung ist

$$y = \psi_{-1}\, \varphi_1\, \psi_1(x),$$

wo ψ_{-1} die Umkehrung von ψ_1 bedeutet, oder implicite

$$f(\psi_1(x), \psi_1(y)) = 0.$$

Durch diese Functionalsubstitution kann man verschiedene Arten von Perioden auf gewisse Normalfälle zurückführen. So wird gezeigt, dass alle Periodicitätsgleichungen $y = \varphi_1(x)$ von der Art, dass

$$\varphi_n(x) = \varphi_1\, \varphi_1\, \varphi_1 \ldots (x) = x$$

sich in der Form

$$y = \psi_{-1}\, \alpha\, \psi(x)$$

darstellen lassen, wo α eine n^{te} Einheitswurzel ist. Diese führen, da sie wiederkehrende Perioden liefern, zu algebraischen Functionen. Unter den Periodicitätsgleichungen, die zu transscendenten Functionen führen, werden zunächst die linearen Gleichungen $y = \dfrac{bx+d}{ax+c}$ betrachtet, welche sich, wie bekannt, auf zwei Normalformen $y = px$ (die multiplicatorische) und $y = x+n$ (die additive Periode) zurückführen lassen, die, wie bewiesen wird, nicht durch eine algebraische Substitution in einander übergeführt werden können. Jede andere Art von Periodicität wird als irrational bezeichnet. Es zeigt sich hier, dass ein-

deutige oder endlich vieldeutige Functionen im Allgemeinen eine solche irrationale Periodicität nicht zulassen. Zwei Ausnahmefälle werden in Betracht gezogen, erstens der Fall, dass die Periodicitätsfunction $y = \varphi_1(x)$ der Art ist, dass keine Iterirung derselben $\varphi_\varkappa(x)$ mehr als eine bestimmte endliche Anzahl von Werten besitzt, zweitens der Fall, dass die Zahl der Werte von $\varphi_\varkappa(x)$ zwar in's Beliebige wächst, aber nur eine bestimmte endliche Zahl derselben von den Werten früherer Iterirungen verschieden ist. Der erste Fall wird allein vom Verfasser vollständig erledigt. Es genügt hierzu, solche Periodicitätsfunctionen $\varphi_1(x)$ zu untersuchen, deren Iterirungen von derselben Vieldeutigkeit wie $\varphi_1(x)$ sind. Hierbei kommt ein bemerkenswerter Satz betreffs des Zusammenhangs zwischen zwei Werten y_r, y_s einer algebraischen Function y zur Anwendung. Genügt diese nämlich einer irreductiblen Gleichung n^{ten} Grades, so lassen sich sämmtliche n Werte von y in Reihen von je k Gliedern (k ein Teiler von n) derart ordnen, dass

$$y_2 = \varphi_1(y_1), \quad y_3 = \varphi_2(y_1) \cdots y_k = \varphi_{k-1}(y), \quad y_1 = \varphi_k(y_1),$$
$$y_{k+2} = \varphi_1(y_{k+1}), \cdots y_{2k} = \varphi_{k-1}(y_{k+1}), \quad y_{k+1} = \varphi_k(y_{k+1}) \cdots.$$

$y_2 = \varphi_1(y_1)$ heisst die algebraische Zusammenhangsgleichung, φ_r bedeutet wieder die Iterirung von φ_1. Mit Hülfe dieses Satzes wird nun gezeigt, dass alle Periodicitätsgleichungen n^{ten} Grades, die iterirt vom n^{ten} Grade bleiben, sich in der Form

$$\psi(y) = \varepsilon\,\varphi(x)$$

darstellen lassen, wo ψ eine rationale Function n^{ten} Grades und ε eine lineare Function bezeichnet. Den Schluss bildet die Betrachtung mehrfach periodischer Functionen unter der Beschränkung auf rationale Periodicitätsgleichungen. Sind die Perioden vertauschbar, so giebt es nur drei Arten von zugehörigen eindeutigen oder endlich vieldeutigen Functionen, diejenigen mit einfacher additiver, mit einfacher multiplicatorischer und mit doppelter additiver Periode. Die letzteren lassen sich mittels einer transcendenten Substitution in solche mit einfacher multiplicatorischer Periode verwandeln (Reduction elliptischer Functionen auf Modularfunctionen). Der Fall der Nicht-Vertauschbarkeit mehrfacher Perioden wird nicht näher untersucht; es müssen

dann, wie bemerkt wird, die zugehörigen Functionen im Allgemeinen unendlich viele wesentlich singuläre Punkte besitzen.

Hr.

H. Poincaré. Sur les fonctions fuchsiennes. C. R. XCII. 333-336, 395-398, 859-861, 957-958, 1198-1200, 1274-1276, 1484-1487; XCIII. 301-303, 581-582.

Siehe Abschn. VI. Cap. 5. p. 247.

H. Poincaré. Sur une propriété des fonctions uniformes. C. R. XCII. 1335-1336.

Anstatt der discontinuirlichen Gruppen linearer Substitutionen, die der Verfasser in den Arbeiten über die Fuchs'schen Functionen behandelt (siehe das bezügliche Referat in diesem Bande p. 247) werden hier die allgemeineren Substitutionen $(z, f_i(z))$ betrachtet, wo $f_i(z)$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ beliebige eindeutige Functionen bezeichnen, von der Art, dass die Substitutionen mit einander combinirt eine discontinuirliche Gruppe bilden. Die Aufgabe ist, die Existenz solcher eindeutigen Functionen $F(z)$ nachzuweisen, für welche identisch $F(f_i(z)) = F(z)$ ist. Zu dem Ende werden die beiden Reihen

$$\theta(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} H[f_i(z)]\left(\frac{df_i(z)}{dz}\right)^m,$$

$$\theta_1(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} H_1[f_i(z)]\left(\frac{df_i(z)}{dz}\right)^m$$

eingeführt, wo $m > 1$ und H und H_1 zwei beliebige rationale Functionen des Arguments bedeuten. Dann ist

$$\theta[f_i(z)] = \theta(z)\left(\frac{df_i(z)}{dz}\right)^{-m}, \quad \theta_1[f_i(z)] = \theta_1(z)\left(\frac{df_i(z)}{dz}\right)^{-m},$$

und der Quotient $\theta(z):\theta_1(z) = F(z)$ stellt dann die gesuchte Function dar. Es existirt demnach eine unendliche Anzahl von eindeutigen Functionen von der verlangten Eigenschaft.

Hr.

L. Fuchs. Ueber Functionen zweier Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale zweier gegebenen Functionen entstehen. Gött. Abh. XXVII.

In wesentlicher Verallgemeinerung des vom Verfasser in einer früheren Arbeit (Borchardt J. LXXXI., siehe F. d. M. XII. 1880. 241) behandelten Umkehrproblems bezüglich der Integrale von Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen zweiter Ordnung wird in der vorliegenden Abhandlung die Aufgabe gelöst: „Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen anzugeben, damit durch die Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} \int_{\delta_1}^{z_1} f(z)dz + \int_{\delta_2}^{z_2} f(z)dz = u_1, \\ \int_{\delta_1}^{z_1} \varphi(z)dz + \int_{\delta_2}^{z_2} \varphi(z)dz = u_2, \end{cases}$$

in denen zwischen denselben Grenzen übereinstimmende Integrationswege gedacht werden, zwei Functionen z_1, z_2 der willkürlichen Veränderlichen u_1, u_2 definirt werden, die einer quadratischen Gleichung genügen, deren Coefficienten in der Umgebung aller endlichen Wertepaare von u_1, u_2 sich eindeutig verhalten. δ_1 und δ_2 sind willkürliche Constanten, für welche $f(z), \varphi(z)$ vorgeschriebene Anfangswerte haben." Durch diese principielle Fragestellung gewinnt die Untersuchung neben der Allgemeinheit an Einfachheit und Durchsichtigkeit, indem die Punkte, auf die es wesentlich ankommt, in helleres Licht gesetzt werden. Die Frage hat naturgemäss nur dann einen Sinn, wenn der Character der Functionen $f(z), \varphi(z)$ in gewisser Weise näher präcisirt wird. Dies geschieht durch folgende Voraussetzungen: Die genannten Functionen, deren Quotient nicht constant sein darf, werden für keinen Wert von z unbestimmt; für jeden singulären Wert $z = a$, für welchen sie unendlich werden oder sich verzweigen, sowie für $z = \infty$ lassen sie Entwickelungen zu nach ganzen Potenzen resp. von $(z-a)^{\frac{1}{n}}$, $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{n}}$ (n eine positive ganze Zahl) mit nur einer endlichen An-

zahl negativer Exponenten, multiplicirt mit ganzen positiven Potenzen resp. von $\log(z-a)$ und $\log\frac{1}{z}$. Hierbei sollen die kleinsten Exponenten der mit logarithmischen Factoren behafteten Potenzen von $z-a$ und $\frac{1}{z}$ resp. $\leqq -1$ und $\leqq 1$ sein. Setzt man nun $\varphi(z):f(z)=\zeta$ und betrachtet z als Function von ζ, so kann es in der ζ-Ebene eine oder mehrere wesentliche Stellen $\zeta=\gamma$, im Weierstrass'schen Sinne genommen, geben, für welche z jeden beliebigen Wert annimmt, wobei z unzählig viele Umläufe ausführt. Es soll alsdann wenigstens eines der Integrale

$$\int f(z)dz, \quad \int \varphi(z)dz$$

nach Vollziehung dieser Umläufe für jeden Wert von z unendlich gross werden. Endlich soll, wenn ausserdem für $z=b$, ohne dass z unzählig viele Umläufe gemacht hat, ζ einen der Werte γ erreicht, wenigstens eines der angegebenen Integrale für $z=b$ unendlich gross sein.

Wie man sieht, ist der Umfang der so characterisirten Functionen von weit greifender Ausdehnung. So gehören zu ihnen z. B. die Lösungen linearer Differentialgleichungen beliebiger Ausdehnung mit algebraischen Coefficienten (natürlich also auch die algebraischen Functionen). Für die Möglichkeit der verlangten Umkehrung der Gleichungen (1) ergeben sich folgende Bedingungen als notwendig und hinreichend: Die beiden Functionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ dürfen nicht für denselben endlichen Wert von z verschwinden; der Exponent der niedrigsten Potenz von $z-a$ in der Entwickelung von

$$\lambda f(z)+\mu\,\varphi(z), \quad (\lambda, \mu \text{ willkürliche Grössen}),$$

in der Umgebung eines singulären Punktes a muss entweder $\leqq -1$ oder $=-1+\frac{1}{n}$ (n eine positive ganze Zahl), der Exponent der niedrigsten Potenz von $\frac{1}{z}$ für $z=\infty$ entweder $\leqq 1$ oder $=1+\frac{1}{n}$ sein. Die durch die Gleichung $\varphi(z):f(z)=\zeta$ defi-

nirte Function z von ζ darf nicht mehr als zweiwertig sein, während $f(z)^2$ und $\varphi'(z)f(z)-\varphi(z)f'(z)$ als Functionen von ζ mit z gleich verzweigt sind. Hr.

J. Thomae. Ueber die algebraischen Functionen, welche zu gegebenen Riemann'schen Flächen gehören.

Klein Ann. XVIII. 443-448.

Der Verfasser hat in einem, im sechsten Bande der mathematischen Annalen veröffentlichten Aufsatze „Darstellung des Quotienten zweier Thetafunctionen, deren Argumente sich um ein Drittel ganzer Periodicitätsmoduln unterscheiden, durch algebraische Functionen" das folgende Problem gelöst: Gegeben ist eine geschlossene Riemann'sche Fläche $\mathfrak{T}$ über der z-Ebene dreifach ausgebreitet, welche an $2p+4$ Stellen $k_1, k_2, \dots k_{2p+4}$ der z-Ebene einfache Verzweigungspunkte besitzt und sonach vom Geschlechte p ist. Man construire eine in dieser Fläche einwertige Function σ, welche in p Punkten unendlich gross erster Ordnung wird. Der Verfasser benutzt dabei dreiwertige Functionen, wie sie sich durch ϑ-Functionen und die überall endlichen Integrale einer über der z-Ebene zweiblättrig ausgebreiteten Fläche $\mathfrak{T}_1$ ergeben, die an den gleichen Stellen $k_1, k_2, \dots k_{2p+4}$ verzweigt und also vom Geschlechte $p+1$ ist.

Der vorliegende Aufsatz setzt diese Betrachtungen fort durch die Aufstellung einer algebraischen Function s für eine vierblättrige Fläche T mit einfachen Verzweigungspunkten an den vorgegebenen Stellen $k_1, k_2, \dots k_{2p+4}$, welche demnach vom Geschlechte $p-1$ ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass die vorgenannte Function σ für die dreiblättrige Fläche $\mathfrak{T}$ bereits aufgestellt sei. Wir teilen die Schlussformel, welche s als Function von σ und z darstellt, mit.

Bezeichnen zu dem Ende $u_1, u_2, \dots u_p$ die überall endlichen Integrale der dreiblättrigen Fläche $\mathfrak{T}$ in der canonischen Form mit den Periodicitätsmoduln

$$0, 0, \dots i\pi, 0, \dots 0; \; a_{\mu 1}, a_{\mu 2}, \dots a_{\mu p} \qquad (\text{für } u_\mu),$$

führt man weiter die Abkürzungen ein:

$$e_\mu = u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} + \cdots + u_\mu^{(p)}$$

(unter $u_\mu^{(1)}, \ldots u_\mu^{(p)}$ die Werte von u_μ in p den Punkten σ_1, z_1; σ_2, z_2; $\ldots \sigma_p, z_p$ von $\mathfrak{T}$ verstanden); ferner

$$\omega_\mu = g_\mu i\pi + h_1 u_{\mu 1} + h_2 u_{\mu 2} \cdots + h_p u_{\mu p}, \qquad (g, h \text{ ganze Zahlen});$$

setzt man endlich für das System

$$(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots u_p - e_p)$$

kurz $(u - e)$ und analog für

$$\left(u_1 - e_1 + \frac{\omega_1}{2},\quad u_2 - e_2 + \frac{\omega_2}{2}, \ \ldots\ u_p - e_p + \frac{\omega_p}{2}\right),$$

kurz $\left(u - e + \frac{\omega}{2}\right)$, und ist

$$\Sigma h u = h_1 u_1 + h_2 u_2 + \cdots + h_p u_p,$$

so hat man für s den Ausdruck

$$s = \frac{e^{\Sigma h u}\,\vartheta\left(u - e + \frac{\omega}{2}\right)}{\vartheta(u - e)} + \frac{e^{\Sigma h u'}\,\vartheta\left(u' - e + \frac{\omega}{2}\right)}{\vartheta(u' - e)}$$
$$+ \frac{e^{\Sigma h u''}\,\vartheta\left(u'' - e + \frac{\omega}{2}\right)}{\vartheta(u'' - e)},$$

wo u, u', u'' die Werte von u in drei übereinander liegenden (also einem Werte z entsprechenden) Punkten $\sigma, \sigma', \sigma''$ der Fläche $\mathfrak{T}$ bedeuten. Die in obiger Formel auf der rechten Seite stehenden Quotienten sind algebraische Functionen von σ, z; σ', z; σ'', z. Bezeichnet man ihre Quadrate mit f, f', f'', so ergiebt sich für die obige Formel die Gleichung:

$$s^4 - 2(f + f' + f'')s^2 - 8\sqrt{ff'f''}\,s + (f + f' + f'')^2 - 4(ff' + f''f + ff') = 0,$$

deren Coefficienten jetzt in z rational sind.

Aus beiden Formeln ergiebt sich die Discussion der Verzweigung der vierblättrigen Fläche $(s, z) = 0$, wobei man es durch die Wahl der Grössen h_i, g_i in der Hand hat, die bei $k_1, k_2, \ldots k_{2p+4}$ statthabenden Verzweigungen auf alle mögliche Weisen in den vier Blättern zu verteilen.

Den Schluss der Abhandlung bildet ein Beispiel für eine vierblättrige Fläche vom Geschlechte Null.

Es sei hier noch die Bemerkung gestattet, dass die Möglichkeit der in beiden Abhandlungen durchgeführten Reduction des Problems für eine vierblättrige Fläche auf das analoge Problem für eine dreiblättrige und für letzteres wieder auf das für eine zweiblättrige aus der Art der Zusammensetzung der „Gruppen der Monodromie" dieser Flächen fliesst und sich in diesem Sinne auch noch für weitere Fälle eine solche Zurückführung als möglich erschliessen lässt. Dk.

E. Schröder. Ueber eine eigentümliche Bestimmung einer Function durch formale Anforderungen. Kronecker J. XC. 189-220.

Der Herr Verfasser betrachtet eine Gruppe von Functionalgleichungen, d. h. Beziehungen von Functionen mehrerer Argumente zu sich selbst und zu ihren Umkehrungen, welche vollständig hinreichen, die Function nicht nur innerhalb algebraischer Zahlensysteme vollständig zu definiren, sondern überhaupt Aufschluss über rein formale Zuordnungen zu geben. Fasst man nämlich eine Function f_1 mehrerer Argumente nur hinsichtlich zweier dieser Argumente (a, b) in's Auge, so bestimmt irgend ein Argumenten-Wertepaar a_ν, b_ν ein gewisses System von Argumenten-Wertepaaren $(a_1\ b_1;\ a_2 b_2; \dots a_\nu, b_\nu; \dots a_n, b_n)$, deren Anzahl für die betrachtete Gruppe von Functionalgleichungen characteristisch ist. Dieses System von Wertepaaren wird ein „endliches, dem Argumentenpaare a_ν, b_ν zugeordnetes Zahlensystem" genannt. Alsdann lassen sich die zugehörigen Functionswerte, die ebenfalls immer nur Zahlen des genannten Systems sind, den Argumentenwerten in ganz bestimmter und durch die Functionalgleichungen mit Notwendigkeit bedingter Weise zuordnen.

Die Bedingungen, denen die Function $f_1(a, b)$ unterworfen werden soll, sind nun folgende: 1) soll $f_1(a, b)$ sammt ihren nach a und b genommenen beiden Umkehrungen vollkommen eindeutig sein, namentlich also auch für jedes Wertesystem der Argumente wirklich einen dem Wertgebiet der letzteren angehörigen Zahlen-

wert besitzen; 2) soll $f_1(a, b)$ der Functionalgleichung $f_1(a, a) = a$ genügen; 3) soll sie die Functionalgleichung

$$f_1[f_1(c, b), \quad f_1\{b, f_1(a, c)\}] = a$$

befriedigen, wo a, b, c beliebige von einander unabhängige Zahlen bedeuten. Alsdann ist, (bei Ausschluss derjenigen Zahlengebiete, die nur eine einzige Zahl enthalten würden), die Anzahl der Werte, welche die Function $f_1(a, b)$ und ihre Argumente a, b annehmen können, nicht kleiner als 8, und die Definition der Function kann für ein Zahlensystem von acht Werten zum Abschluss gebracht werden. Für jedes Octupel von Werten, das durch zwei unter ihnen bestimmt wird, bestehen Beziehungen von Functionswerten, die aus einander hergeleitet werden können.

Der Herr Verfasser bedient sich bei diesen Entwickelungen anstatt der Schreibweise $f_1(a, b)$ der kürzeren ab, welche er „symbolisches Product“ nennt. Diese Bezeichnung ist durch den im Folgendem angewandten Algorithmus gerechtfertigt.

Bei diesen Untersuchungen ergeben sich zugleich bemerkenswerte Aufschlüsse über gleichzeitige Geltung von Functionalgleichungen oder Gleichungsgruppen, sowie über gegenseitige Bedingungen oder auch einseitiges Zurfolgehaben solcher Gleichungen.

Zum Schlusse werden für die behandelten Gruppen von Functionalgleichungen diejenigen Lösungen angegeben, welche auf dem Gebiete der linearen Functionen der gemeinen complexen Zahlen existiren. M.

W. Veltmann. Bestimmung einer Function auf einer Kreisfläche aus gegebenen Randbedingungen, nebst Nachschrift. Schlömilch Z. XXVI. 1-15, 72.

Das vom Verfasser behandelte Problem ist Gegenstand eingehender Untersuchungen von Neumann, Schwarz, Prym, Schläfli u. A. gewesen, deren diesbezügliche Arbeiten das Problem vollständig erledigen. Es ist daher auch nicht die Absicht des Verfassers, neue Resultate zu geben; vielmehr erstrebt er eine Vereinfachung der Methoden, welche zu den bekannten Resultaten

führen. Diese Vereinfachung besteht darin, dass der Verfasser von einem speciellen Falle des bekannten Cauchy'schen Fundamentaltheorems ausgeht, welchen er auf eine originelle Art beweist. Auf diesen speciellen Fall, welcher den Wert der Function im Mittelpunkte der Kreisfläche ergiebt, wird vermöge einer linearen Transformation des Kreises in sich die Wertbestimmung der Function in einem beliebigen Punkte der Kreisfläche zurückgeführt. Durch einen directen Ansatz erhält der Verfasser den Ausdruck der gesuchten Function durch das Poisson'sche Integral, dessen Verhalten am Rande der Kreisfläche auch für den Fall untersucht wird, wo die gegebenen Randwerte Discontinuitäten darbieten. Die Lösung des entsprechenden Theorems für eine Kreisfläche mit einem Windungspunkte von endlicher Ordnungszahl macht den Beschluss der Arbeit.

Hz.

P. du Bois-Reymond. Sur les formules de représentation des fonctions. C. R. XCII. 915-918, 962-964.

P. du Bois-Reymond. Ueber Darstellungsfunctionen. Klein Ann. XVIII. 593-603.

In den beiden ersten Mitteilungen giebt der Herr Verfasser eine Uebersicht der Resultate seiner Untersuchungen über die darstellenden Integrale (vergl. d. Jahrbuch VI. 1874. p. 244 und IX. 1877. p. 298) und zugleich Folgerungen aus der Darstellungsbedingung, dass

$$\int_0^a d\alpha \, \text{mod.} \, \frac{d}{d\alpha} \, \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(\beta) . d\beta$$

endlich ist. Er leitet daraus den Satz ab: „Ist

$$\lim. \int_0^a \Phi(\alpha, h) d\alpha \qquad (h = +\infty)$$

endlich und unabhängig von a,

$$\lim. x\,\Phi(x, h) = 0 \qquad (\lim. x = 0)$$

und $x\,\Phi(x, h)$ für beliebige Werte h unter einer endlichen Grenze

gelegen, ist ferner $f(x)$ integrirbar und

$$\int_0^a \frac{d\alpha}{\alpha} \text{ mod.}[f(\alpha)-f(0)]$$

convergent, so hat man immer

$$\lim_{h=+\infty} \int_0^a d\alpha f(\alpha) \Phi(\alpha, h) = f(0) \lim_{h=+\infty} \int_0^a \Phi(\alpha, h).$$

Einen ganz ähnlichen Satz hat auch Herr Dini (Serie di Fourier 1880. I. p. 46, s. F. d. M. XII. 177) aufgestellt.

Die dritte Mitteilung beschäftigt sich mit der Frage, welcher Spielraum der Function $\Phi(x, h)$ gestattet werden kann, wenn die vorstehende Gleichung unter Voraussetzung der abteilungsweisen Monotomie von $f(x)$ (d. i. der ursprünglichen Dirichlet'schen Bedingung) bestehen soll. Dazu ist notwendig, dass

1) $\lim. \int_0^a d\alpha \Phi(\alpha, h)$ bestimmt und von a unabhängig sei;

2) für jeden festen Wert $a > 0$

$$\lim_{a_1 = a,\ h=+\infty} \int_a^{a_1} dx\, \Phi(x, h) = 0$$

sei, während a_1, h unabhängig von einander zu den bezüglichen Grenzwerten convergiren. St.

J. M. Rodrigues. Sobre una formula de Wronski. Teixeira J. III. 55-64. (Portugiesisch.).

Der Verfasser leitet die Integrale einiger Functionen mit Hülfe des Algorithmus der analytischen Facultäten her. Ausgehend von der Wronski'schen Formel

$$\int F(x)dx = \log \{e^{\psi(x_0)}\}^{x|1} + \text{Const.},$$

(wo

$$\psi(x) = F(x) + \frac{1}{2} \frac{dF(x)}{dx} + \frac{1}{2.3} \frac{d^2F(x)}{dx^2} \cdots$$

und nach der Differentiation $x = x_0$ zu setzen ist), sucht er die Fälle, in denen man die Addition der Reihe mit Hülfe bestimm-

ter Integrale erreichen kann. Er gelangt so zu Formeln, welche das allgemeine Integral immer dann geben, wenn man ein gewisses bestimmtes Integral direct finden kann. So giebt er z. B. die Formel:

$$\int F(x)\,dx = \log\left\{e^{\int_0^1 F(x_0+t)\,dt}\right\}^{x|1} + \text{Const.}$$

Tx. (O.).

J. M. Rodrigues. Sobre a theoria das faculdades. Teixeira J. III. 87-96. (Portugiesisch.).

Nach einer Besprechung der Derivation analytischer Facultäten giebt der Verfasser einen Beweis der Wronski'schen Formel:

$$\int F(x)dx = \log\{e^{\psi(x_0)}\}^{x|1} + \text{Const.},$$

wo

$$\psi(x) = F(x) + \frac{1}{2}\,\frac{dF(x)}{dx} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{d^2F(x)}{dx^2} + \cdots.$$

Ferner wird die entsprechende Formel für endliche Differenzen hergeleitet. Zum Schluss wird die Transformation von Functionen mit Hülfe des Algorithmus der Facultäten besprochen.

Tx. (O.).

H. Krey. Einige Anwendungen eines functionentheoretischen Satzes. Schlömilch Z. XXVI. 357-377.

Der Verfasser giebt neue Anwendungen des bekannten Cauchy'schen Satzes über das längs eines geschlossenen Weges genommene Integral $\int F(z)dz$. Der erste Teil des Aufsatzes beschäftigt sich mit dem Fall, dass $F(z)$ eine durch beliebig viele simultane algebraische Gleichungen definirte algebraische Function von z ist. Es ergiebt sich hierbei eine von Clebsch herrührende Verallgemeinerung eines Jacobi'schen Satzes, sowie das Bézout'sche Theorem über die Zahl der Lösungen simultaner algebraischer Gleichungen und eine bemerkenswerte Erweiterung

dieses Theorems. Der letzte Teil der Arbeit enthält eine Ableitung der Additionstheoreme der elliptischen Integrale auf Grund des Cauchy'schen Satzes. Hz.

H. LÉAUTÉ. Développement d'une fonction à une seule variable dans un intervalle donné suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives dans cet intervalle. Résal J. (3) VII. 185-200.

Es soll ein Polynomen y vom Grade n in x durch die Bedingung bestimmt werden, dass die mittleren Werte des Polynomens und seiner n ersten Differentialquotienten in einem gegebenen Intervalle, etwa von $-h$ bis $+h$, $n+1$ gegebenen Grössen $Y_0, Y_1, \dots Y_n$ gleich seien. Die zu erfüllenden Gleichungen sind also

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}\frac{d^\varkappa y}{dx^\varkappa} = Y_\varkappa, \qquad \varkappa = 0,1,2\dots n.$$

Die Analyse liefert für y den Ausdruck

$$(1) \qquad y = P_0 Y_0 + P_1 Y_1 + \cdots + P_n Y_n,$$

worin $P_\varkappa$ ein von den Werten der Y unabhängiges Polynomen vom Grade $\varkappa$ bedeutet, welches durch die $\varkappa+1$ Gleichungen

$$\int_{-h}^{+h} P_\varkappa dx = 0, \quad \int_{-h}^{+h}\frac{dP_\varkappa}{dx} = 0 \dots \int_{-h}^{+h}\frac{d^\varkappa P_\varkappa}{dx^\varkappa} = 2h$$

vollständig bestimmt ist. Aus ihnen folgt die Relation

$$P_{\varkappa-1} = \frac{dP_\varkappa}{dx}.$$

Die P gehören daher in die von Herrn Appell (Ann. de l'Éc. N. (2) IX. 119-144, s. F. d. M. XII. 1880. 312) untersuchte Klasse von Polynomen. Setzt man

$$\varphi(x, z) = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \cdots$$

(erzeugende Function der P), so erhält man

$$\varphi(x, z) = \frac{2hz}{e^{hz} - e^{-hz}} e^{xz},$$

woraus die P zu berechnen sind. Die Werte der fünf ersten sind:

$$P_0 = 1,\quad P_1 = \frac{3x}{3.1!},\quad P_2 = \frac{3x^2-h^2}{3.2!},\quad P_3 = \frac{3x^3-3h^2x}{3.3!},$$

$$P_4 = \frac{3x^4-6h^2+\frac{7}{5}h^4.}{3.4!}.$$

Wenn h gegen Null convergirt, so geht die Reihe (1) für y in die Maclaurin'sche Reihe über. Hr.

G. Halphén. Sur certaines séries pour le développement des fonctions d'une variable. C. R. XCIII. 781-783, 833-835; Darb. Bull. (2) V. 462-488.

Eine Verallgemeinerung der von Herrn H. Léauté (C. R. XC. 1404; s. F. d. M. XII. 1880. 330) für die Entwickelung einer Function mit einer Variabeln gegebenen Reihe. Ist

$$\lambda(\xi) = Ae^{a\xi}+Be^{b\xi}+Ce^{c\xi}+\cdots$$

und $P_m(x)$ der Coefficient des $(m+1)^{\text{ten}}$ Gliedes in der Entwickelung von $e^{\xi x}:\lambda(\xi)$ nach steigenden Potenzen von ξ, so existirt eine Klasse von Functionen $f(x)$, welche durch die Reihe

$$f(x) = [Af^{(m)}(a)+Bf^{(m)}(b)+Cf^{(m)}(c)+\cdots]P_m(x)$$

dargestellt werden, wenn $\lambda(\xi)$ nicht die Wurzel Null hat. Kommt Null von der Ordnung k als Wurzel vor, so stellt die Reihe die Function $f^{(k)}(x)$ dar.

Ferner erhält Herr Halphén für die Entwickelung von $f(x+y)$, für beliebige x und y, nach den Ableitungen einer beliebigen Function die Reihe

$$P_0V(y)+P_1(x)V'(y)+P_2(x)V''(y)+\cdots+P_m(x)V^{(m)}(y)+\cdots,$$

wo $P_m(x)$ der Coefficient des $(m+1)^{\text{ten}}$ Gliedes in der Entwickelung der Function

$$\frac{e^{\xi x}}{\int_b^c \theta(x)e^{\xi x}dx}$$

nach wachsenden Potenzen von ξ ist, und $\theta(x)$ durch die Bedingung

$$\int_b^c \theta(x) f(x+y) dx = V(y)$$

bestimmt wird. b und c sind willkürliche Constanten. Als besonderer Fall erscheint die von Herrn Hermite C. R. LVIII. gegebene Reihe.

M.

G. Halphén. Sur quelques séries pour le développement des fonctions à une seule variable. Darb. Bull. (2) V. 462-488.

Bei Aufstellung derjenigen Bedingungen, für welche die von Herrn Léauté (C. R. XC. 1404 und Résal J. (3) VII. 185; F. d. M. XII. 1880. 330 und d. Bd. p. 330) gegebene Reihe existirt, ist der Herr Verfasser auf allgemeinere Reihen geführt worden, welche theoretisch nicht ohne Interesse sind. Sie liefern die Entwickelung einer Function entweder nach den Ableitungen einer anderen Function oder nach successiven Polynomen, die auseinander durch Integration hergeleitet werden können. Diese Polynome bilden eine grosse Klasse, auf welche zuerst Herr Appell (Ann. de l'Éc. Norm. (2) IX. 119; s. F. d. M. XII. 1880. 342) aufmerksam gemacht hat. Es ergiebt sich das folgende Resultat. Eine Function $f(x)$, welche in jedem begrenzten Intervall in eine trigonometrische Reihe entwickelbar ist, lässt sich für alle reellen Werte der Variabeln in eine nach den Polynomen $P_0, P_1(x), P_2(x), \ldots$ fortschreitende Reihe entwickeln. Der allgemeine Ausdruck dieser Polynome ist

$$P_m(x) = \frac{1}{1.2\ldots m}\left(\frac{d^m}{d\xi^m}\, e^{\xi x+(-1)^n a \xi^{2n}}\right)_{\xi=0}$$
$$= \frac{x^m}{m!} + (-1)^n \frac{a}{1}\frac{x^{m-2n}}{(m-2n)!} + \frac{a^2}{2!}\frac{x^{m-4n}}{(m-4n)!} + \cdots$$
$$+ (-1)^{sn}\frac{a^s}{s!}\frac{x^{m-2sn}}{(m-2sn)!}\cdots,$$

und das allgemeine Glied der Reihe:

$$\frac{(-1)^m}{2\pi} P_m(x) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, f(x) e^{-a\omega^{2n}} \omega^m \cos\left(x\omega + \frac{m\pi}{2}\right).$$

Die Entwickelung ist unter der Bedingung möglich, dass sich die Integration nach x in dem Coefficienten eines jeden Gliedes bis $\pm\infty$ erstrecken lässt. M.

Ch. Hermite. Sur une représentation analytique des fonctions, au moyen des transcendantes elliptiques. Brioschi Ann. (2) X. 137-144.

Diese Notizen betreffen die Entwickelung der Functionen in Reihen, deren Glieder proportional den Grössen

$$\frac{H(x+a)}{\Theta(x)} \quad \text{oder} \quad \frac{\Theta(x+b)}{\Theta(x)}$$

sind, wo man für die Constanten a und b die Wurzeln der Gleichungen $\Theta'(x) = 0$ und $H'(x) = 0$ nimmt. Mit Hülfe der Formeln

$$\frac{2K}{\pi}\,\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \sum_{m=1,3,5,\dots}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(x+miK') + \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(x-miK')\right],$$

$$\frac{2K}{\pi}\,\frac{H'(x)}{H(x)}$$

$$= \operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2K} + \sum_{n=2,4,6,\dots}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(x+niK') + \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(x-niK')\right]$$

lässt sich zeigen, dass die Gleichung $\Theta'(x) = 0$ zu reellen Wurzeln nur die Vielfachen von K und zu imaginären $x = nK + i\omega$ hat, wo die Grössen ω, deren Anzahl unendlich ist, successive zwischen zwei aufeinanderfolgenden ungraden Vielfachen von K' liegen. Sieht man von den graden Vielfachen von K ab, so kann man also schreiben: $a = 0$, $a = K$, $a = i\omega$. Aehnlich findet man $b = K$, $b = i\varpi$, wo die ϖ zwischen zwei aufeinanderfolgenden graden Vielfachen von K' liegen. Dasselbe gilt von $H'(x) = 0$. Ebenso folgt für den allgemeineren Ausdruck

$$\Pi(x) = \Sigma\left[\alpha_m \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(x+miK') + \beta_m \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2K}(x-miK')\right],$$

wo α_m und β_m reelle positive Constante sind, dass $\Pi(x) = 0$ für $x = i\omega$ und $x = K + i\omega$, und für $x = 0$ und $x = K$, wenn $\alpha_m = \beta_m$.

Alsdann werden die Entwickelungen

$$F(x) = \Sigma A \frac{kk'H(x+a)}{\Theta(a)\Theta''(a)}, \quad G(x) = \Sigma B \frac{kk'\Theta(x+b)}{H(b)H''(b)}$$

betrachtet, in denen

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^{2K} F(x)\frac{H(x-a)}{\Theta(x)}dx, \quad B = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2K} G(x)\frac{\Theta(x-b)}{\Theta(x)}dx,$$

welche gelten, wenn $F(x)$ und $G(x)$ eindeutige Functionen sind, die den Bedingungen

$$F(x+2K) = -F(x), \quad F(x+2iK') = \mu F(x),$$
$$G(x+2K) = +G(x), \quad G(x+2iK') = \mu G(x),$$

worin μ constant, genügen, und wenn sie nur eine endliche Zahl von Polen in dem Periodenrechteck $2K$ und $2iK'$ zulassen.

Zum Schluss bemerkt Herr Hermite, dass ihn die von Gyldén gefundene Lösung der linearen Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - k^2\,\frac{\sin x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}\cdot\frac{dy}{dx} + \mu^2 \operatorname{dn}^2 x . y = 0,$$

nämlich

$$y = C \sin\mu . \operatorname{am} x + C' \cos\mu . \operatorname{am} x,$$

auf die Frage geführt habe, ob sich nicht die Fourier'sche Reihe

$$F(x) = \Sigma[Ap \cos px + Bp \sin px]$$

durch die Formel

$$F(x) = \Sigma[Ap \cos p . \operatorname{am} x + Bp \sin p . \operatorname{am} x]$$

verallgemeinern lasse. M.

U. Dini. Intorno agli sviluppi delle funzioni di una variabile reale per serie di funzioni Jacobiane. Brioschi Ann. (2) X. 145-153.

Anknüpfend an die Formeln für die Entwickelung einer Function nach Jacobi'schen Functionen, wie sie Herr Hermite in seinen Vorlesungen ohne Beweis gegeben und in obigem Briefe weiter entwickelt hat, legt Herr Dini im Vorliegenden die Methoden dar, welche er zum Beweise der Hermite'schen Formeln und zur Herleitung weiterer Entwickelungen befolgt hat. Dieselben sind schon zum Teil in dem Werke: „Serie di Fourier ed altre

rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale" Pisa, 1880 (siehe F. d. M. XII. 177) veröffentlicht. M.

H. Gyldén. Sur un mode de représentation des fonctions. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. C. R. XCII. 213.

Die kurze Notiz betrifft die Methode, wie man aus der gegebenen Entwickelung

$$F(x) = \Sigma(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

die Entwickelung

$$F(x) = \Sigma\left(Ap \cos p \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} + Bp \sin p \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}\right)$$

erhalten kann. (Siehe p. 334). M.

Ch. Wiener. Geometrische und analytische Untersuchung der Weierstrass'schen Function. Kronecker J. XC. 221-252.

Herr P. du Bois-Reymond hat in seinem Aufsatze: „Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente", Borchardt J. LXXIX. 29ff., (s. F. d. M. VI. 1874. 241) einer ihm von Herrn Weierstrass mitgeteilten stetigen Function

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x)\pi,$$

(wo x eine reelle Variable, a ungrade und >1, b positiv und <1) Erwähnung getan, „welche an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten hat, sobald der Wert des Productes ab eine gewisse Grenze übersteigt." Durch eine gründliche geometrische und analytische Untersuchung dieser sogenannten Weierstrass'schen Function (ohne Zusatz ist diese Benennung nicht zweckmässig, da man ja auch die Functionen $Al(x)$, $\wp(u)$ und $\sigma(u)$ als Weierstrass'sche bezeichnet) gelangt Herr Wiener zu dem Resultat, dass die obige Behauptung eines fehlenden bestimmten Differentialquotienten nicht durchweg aufrecht erhalten werden kann. Es wird zunächst der analytische Beweis des Herrn Weierstrass, wonach für gewisse Werte ab der Differentialquotient der Func-

tion in einem vorwärts- und einem rückwärtsgerichteten Intervall des x entgegengesetzte Zeichen hat, in geometrischer Form dargestellt. Alsdann wird gezeigt, dass bei der Wahl anderer Intervalle diese beiden Differentialquotienten im Allgemeinen gleiche Zeichen besitzen. Auch für diese Intervalle hat der Satz des Herrn Weierstrass im Allgemeinen noch seine Gültigkeit, für besondere Stellen aber nicht, da für diese besonderen Stellen sich ein bestimmter Differentialquotient ergiebt. Der geometrische Beweis wird durch eine graphische Darstellung der Function veranschaulicht. M.

J. Boussinesq. Sur une raison générale, propre à justifier synthétiquement l'emploi des divers développements de fonctions arbitraires usités en physique mathématique. C. R. XCII. 513-515.

Dass die Reihen, welche man in der mathematischen Physik zur Entwickelung einer beliebig gegebenen Function anwendet, convergiren, kann man bekanntlich nur in wenigen Fällen streng nachweisen. Herr Boussinesq glaubt nun, dass man diesen Nachweis entbehren könne, da ein plausibler Grund für die Notwendigkeit der Convergenz in den Voraussetzungen liege, die bei der Ableitung der in der Physik gebrauchten Differentialgleichungen zu Grunde gelegt werden. Nach diesen Voraussetzungen besitzen benachbarte Molecüle sehr nahe denselben mittleren Zustand. Die dadurch eingeführte Beschränkung bringt es nun mit sich, dass in den Reihen, durch welche die genannten Differentialgleichungen integrirt werden, die Glieder höherer Ordnung nur einen verschwindenden Einfluss haben. Dies gilt für jeden Moment, mithin auch für den Anfangszustand, um dessen Reihenentwickelung es sich handelt. Nach des Referenten Ansicht ist eine derartige Schlussfolgerung wohl als Notbehelf zulässig, überhebt aber den Mathematiker nicht der Aufgabe, nach strengeren Beweisen für die Convergenz zu suchen. Wn.

C. NEUMANN. Die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwickelungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwertsatzes. Leipzig. Teubner.

Die Fourier'sche Reihenentwickelung steht bekanntlich zur Kreisperipherie in derselben Beziehung, wie die Laplace'sche nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe zur Kugelfläche. Auch ist bekannt, dass man, was die Bestimmung der Coefficienten in diesen Reihen betrifft, Gebrauch zu machen hat von folgenden Formeln:

$$(\alpha) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(n\varphi)\sin(s\varphi)\,d\varphi = 0, \text{ resp. } = \pi,$$

und

$$(\beta) \qquad \int_{-1}^{+1} P_n(\mu)P_s(\mu)\,d\mu = 0, \text{ resp. } = \frac{2}{2n+1},$$

sowie von einigen ähnlichen Formeln, welche einerseits die Functionen Cosinus, Cosinus oder Sinus, Cosinus, andererseits die sogenannten adjungirten Kugelfunctionen, d. i. die $P_{nj}(\mu)$ betreffen.

Lässt man nun den Radius der Kreisperipherie resp. der Kugelfläche in's Unendliche wachsen, so verwandelt sich, wie der Verfasser zeigt, die Fourier'sche Reihe in das Fourier'sche Integral, andererseits aber die Laplace'sche Reihe in ein gewisses mit den Cylinderfunctionen (d. i. Bessel'schen Functionen) behaftetes Integral; wobei bemerkt sein mag, dass dieses letztere Integral vom Verfasser schon früher (1862) gefunden und publicirt worden ist.

Bei Erwägung dieser einfachen Beziehungen wird man unwillkürlich aufgefordert, auch die Formeln (α), (β) in Betracht zu ziehen, und die Metamorphose zu erforschen, welche denselben bei einem solchen unendlichen Anwachsen des Kreis- resp. Kugel-Radius zu Teil wird. Diese Untersuchung führt den Verfasser, was die Formeln (α) anbelangt, zu folgenden neuen Sätzen:

„Ist γ eine positive Constante, und sind die Functionen $F(q)$ und $\Phi(q)$ im Intervall $q = 0 \dots \gamma$ abteilungsweise stetig und

abteilungsweise monoton, so gelten die Formeln:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\gamma F(q).(\cos qx)\,dq\right)dx = \frac{\pi}{2}F(+0),$$

$$\int_0^\infty \left\{\left(\int_0^\gamma F.(\cos qx)\,dq\right)\left(\int_0^\gamma \Phi.(\cos qx)\,dq\right)\right\}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\gamma$$

$$\int_0^\infty \left\{\left(\int_0^\gamma F.(\sin qx)\,dq\right)\left(\int_0^\gamma \Phi.(\sin qx)\,dq\right)\right\}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\gamma$$

wo in den beiden letzten Formeln zur Abkürzung F für und Φ für $\Phi(q)$ gesetzt ist." Welche Wichtigkeit diesen Formeln zukommt, hat der Verfasser in einem kleinen A über die Mehler'schen Kugelfunctionen (in Klein Ann. 195-237, s. Abschn. VII. Cap. 2) dargelegt. Auch sind Formeln von Nutzen für gewisse Probleme der conformen dung, wie der Verfasser später zu zeigen gedenkt. Nachtr ist hinzuzufügen, dass der Verfasser eine Function in eine gebenen Intervall monoton nennt, wenn sie in demselben ent niemals wächst oder aber niemals abnimmt. Und gleichzeitig eine Function in einem gegebenen Intervall abteilungsw monoton genannt, wenn dieses Intervall in eine endlich zahl von Strecken zerlegbar ist, derart, dass die Function jeder einzelnen Strecke monoton ist. In analogem Sinne b der Verfasser die Ausdrücke: abteilungsweise stetig, a lungsweise constant u. s. w.

Ebenso wie die Formeln (α), werden auch die Fo (β) für den Fall in Betracht gezogen, dass der Kreis- Kugel-Radius unendlich gross ist. Die hierbei sich ergeb neuen Sätze, welche näher anzugeben zu weit führen w betreffen aber nicht mehr die in (β) enthaltenen Kugelfunct sondern die Cylinderfunctionen.

Abgesehen von den soeben angedeuteten neuen Sätze hält das vorliegende Werk

1) die Theorie der Fourier'schen Reihe,

2) die Fourier'sche und Hamilton'sche Integraldarste

3) die Laplace'sche, nach Kugelfunctionen fortschrei Reihe,

4) die nach Cylinderfunctionen (Bessel'schen Functionen) fortschreitenden Integraldarstellungen.

Es bleibt noch übrig, über die Grenzen und die Methoden des vorliegenden Werkes einiges hinzuzufügen. In ersterer Beziehung beschränkt sich das Werk, wie der Verfasser ausdrücklich hervorhebt, auf die gewöhnlich vorkommenden Functionen, welche Jacobi gesprächsweise die „vernünftigen" zu nennen pflegte. Demgemäss werden z. B., was Functionen einer Variablen betrifft, nur solche in Betracht gezogen, die innerhalb des gegebenen Intervalls abteilungsweise stetig und abteilungsweise monoton sind. Ausgeschlossen von der Untersuchung bleiben daher z. B. Functionen mit unendlich vielen Maximis und Minimis.

Innerhalb dieser Grenzen ist nun der Verfasser bemüht gewesen, seiner Darstellung eine möglichst vollständige Strenge und zugleich eine möglichst grosse Einfachheit zu verleihen. Zu diesem Zweck hat derselbe die ihrer Zeit Epoche machenden Dirichlet'schen Methoden durch diejenigen einfacheren Methoden zu ersetzen gesucht, welche der vortreffliche Du Bois-Reymond'sche Mittelwertsatz an die Hand giebt. Auch stützen sich die Darlegungen des Verfassers, was speciell die Kugelfunctionen und Cylinderfunctionen betrifft, wesentlich auf die bekannten Arbeiten von Dini und Heine. Hierbei wird die von diesen Autoren angegebene Methode einer noch weiteren Vereinfachung unterworfen. So wird z. B. gezeigt, dass der mühsam abzuleitende und auch in seiner Anwendung sehr beschwerliche Satz über die asymptotischen Werte der Function $P_n(\mu)$ (für $n = \infty$) für die vorliegenden Zwecke, d. i. für die Theorie der Laplace'schen Reihe durchaus entbehrlich ist, dass man dieses Ziel mit einfacheren Mitteln zu erreichen vermag.

Nn.

V. Volterra. Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue. Batt. G. XIX. 76-87.

Hz.

M. W. Crofton. On symbols of operation. Sylv., Am. J. IV. 269-272.

Siehe Anhang. M.

J. J. Walker. Theorems in the calculus of operations. Part. 2. Lond. M. S., Proc. XII. 193-200.

Dies ist die versprochene Fortsetzung des Artikels aus Band XI. 408-413, worüber in F. d. M. XII. 1880. 339 berichtet ist. Die daselbst aufgestellte Entwickelungsformel wird jetzt verallgemeinert. Sie enthält alsdann speciell in sich Hargreave's Reihe I. (Phil. Trans. 1848). Obgleich ihre Symmetrie in Bezug auf u, v durch die Form nicht kenntlich ist, ergiebt sie eine explicit symmetrische Relation. Diese trifft mit einem Resultat von Crofton zusammen. Wie aus Hargreave's Satz I. durch Vertauschung der Variabeln mit dem Operationszeichen sein Satz II. hervorgeht, so schreitet der Verfasser von jener Formel nun zu einer entsprechenden fort. Die gleiche Vertauschung wendet er darauf an, um die Integrabilitätsbedingungen aufzustellen. H.

Capitel 2.

Besondere Functionen.

G. Jung. Intorno al principio della media aritmetica. Politecnico XXIX. 1-8.

Das Princip des arithmetischen Mittels ist schon früher von Schiaparelli (Politecnico XXVI. 1878. 143-146) in eleganter und unumstösslicher Weise bewiesen worden. Hier zerstreut Herr Jung die Zweifel, welche neuerdings (siehe Battaglini XVIII. 159-173; F. d. M. XII. 1880. 163) an der Gültigkeit dieses Princips erhoben sind. M.

K. Posse. Ueber eine Minimalfrage. Petersb. Abh. XXXVIII. (Russisch).

Die gestellte Frage: Ein Polynom m^{ten} Grades zu finden, das den Ausdruck

$$\int_0^a [f(x)]\,dx + (-1)^m \int_0^b f(x)\,dx,$$

wo $[f(x)]$ den absoluten Betrag der Function bezeichnet und $1 < a < b$ ist, zum Minimum macht, wird hier unter Anwendung der Theorie der θ-Functionen gelöst. Ty.

Tanner, J. A. Kealy. Solution of a question (6320). Ed. Times XXXIV. 54.

Ist $ax+by$ kleiner als c und grösser als d und $cx+dy$ kleiner als a und grösser als b, so liegt x zwischen $\frac{cd-b^2}{ad-bc}$ und $\frac{d^2-ab}{ad-bc}$ und y zwischen $\frac{a^2-cd}{ad-bc}$ und $\frac{ab-c^2}{ad-bc}$, worin a, b, c, d alle positiv sind. O.

P. Mansion. On the harmonic series and Stirling's formula. Mess. (2) XI. 38-41.

Ist θ kleiner als 1, so ist

$$\log(1.2.3\dots N) = \frac{1}{2}(1+C) + \left(N+\frac{1}{2}\right)\log N - N + \frac{1}{2}\theta.$$

Dies wird durch elementare Untersuchungen bewiesen, die sich an geometrische Betrachtungen der Hyperbel $xy = 1$ anlehnen.

Glr. (O.).

J. Cohn. Ueber die Irrationalität der Zahl e. Warsch. J. 1881. (Polnisch).

Enthält die Beweise von Lambert, Fourier, Liouville und den ersten Beweis von Hermite aus der Schrift: „Sur la fonction exponentielle“. Dn.

R. Götting. Die Functionen Cosinus und Sinus beliebiger Argumente in elementarer Darstellung. Berlin. Wohlgemuth.

Der Herr Verfasser definirt die goniometrischen Zahlen durch folgende Bedingungsgleichungen:

$$a_{\varkappa-1}+a_{\varkappa+1} = a_1 a_\varkappa,$$
$$a_{\varkappa-1}-a_{\varkappa+1} = b_1 b_\varkappa$$

unter der Voraussetzung, dass $a_0 = 2$, a_1 eine beliebige reelle oder imaginäre Zahl und $b_1 = \pm\sqrt{a_0-a_2}$ sei, wo über das Vorzeichen beliebig verfügt werden kann. Es ergiebt sich in elementarer Weise eine Reihe von Formeln, welche den Fundamentalformeln für sin und cos entsprechen, z. B.

$$a_1 a_\varkappa \mp b_1 b_\varkappa = 2a_{\varkappa\pm 1},$$
$$a_1 b_\varkappa \pm b_1 a_\varkappa = 2b_{\varkappa\pm 1},$$

welche dem Additionstheorem gleich sind, und die Relation

$$\frac{1}{4} a_n^2 + \frac{1}{4} b_n^2 = 1.$$

Alsdann wird mit Hülfe des regelmässigen $2n$-Ecks der Nachweis geführt, dass

$$\frac{1}{2} a_\lambda = \cos\left(\lambda \frac{\pi}{2n}\right), \quad \frac{1}{2} b_\lambda = \sin\left(\lambda \frac{\pi}{2n}\right).$$

Der zweite Abschnitt enthält Anwendungen auf regelmässige $2n$-Ecke, wo $n = 2k+1$ ($k = 1, 2, \ldots 8$) ist. Im folgenden Abschnitt wird die Darstellung der Grössen a_n und b_n durch a_1 und b_1 für jeden beliebigen Wert von a_1 gegeben, und im letzten eine Methode zur Berechnung des cos und sin beliebiger ganzer Vielfachen eines beliebig gegebenen Argumentes dargestellt.

M.

Rouyaux. Relations algébriques entre les sinus supérieurs d'un même ordre. C. R. XCII. 1276-1279.

Was die Definition und die Theorie der Sinus höherer Ordnungen betrifft, so vergleiche man die Referate über die Arbeiten

der Herren Y. Villarceau und J. Farkas in den Bänden X. 1878. 301 und XII. 1880. 345-347 der F. d. M. Hier werden die Sinus der Ordnung n durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= e^{x\alpha_1}+e^{x\alpha_2}+\cdots+e^{x\alpha_j}+\cdots+e^{x\alpha_k}+\cdots+e^{x\alpha_n},\\
\pm\varphi_1 &= \alpha_1^{n-1}e^{x\alpha_1}+\cdots+\alpha_j^{n-1}e^{x\alpha_j}+\cdots+\alpha_k^{n-1}e^{x\alpha_k}+\cdots+\alpha_n^{n-1}e^{x\alpha_n},\\
\pm\varphi_2 &= \alpha_1^{n-2}e^{x\alpha_1}+\cdots+\alpha_j^{n-2}e^{x\alpha_j}+\cdots+\alpha_k^{n-2}e^{x\alpha_k}+\cdots+\alpha_n^{n-2}e^{x\alpha_n},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\pm\varphi_{n-1} &= \alpha_1\;e^{x\alpha_1}+\cdots+\alpha_j\;e^{x\alpha_j}+\cdots+\alpha_k\;e^{x\alpha_k}+\cdots+\alpha_n\;e^{x\alpha_n}
\end{aligned}$$

definirt, worin die α die Wurzeln der Gleichung $r^n\pm 1=0$ bedeuten. Zwischen den so definirten höheren Sinus derselben Ordnung werden nun algebraische Relationen hergeleitet. Für den Fall, wo n eine Primzahl ist, hat diese Relation die Form:

$$\prod_{j=1}^{j=n}(\varphi_0+\varphi_1\alpha_j+\varphi_2\alpha_j^2+\cdots+\varphi_{n-1}\alpha_j^{n-1})=\prod_{j=1}^{j=n}e^{x\alpha_j}=e^{x\Sigma\alpha_j}=e^0=1.$$

M.

E. West. Sur les sinus d'ordres supérieurs. C. R. XCII. 1279-1281.

Aus der von Herrn Y. Villarceau gefundenen Formel:

$$e^{\varrho x}=\varphi_0 x+\varrho\varphi_1 x+\varrho^2\varphi_2 x+\cdots+\varrho^{m-1}\varphi_{m-1}x,$$

worin die ϱ n^{te} Einheitswurzeln sind, werden algebraische Relationen zwischen den höheren Sinus derselben Ordnung abgeleitet. M.

S. Günther. Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunctionen. Halle a. S. Nebert.

Wie der vollständige Titel ergiebt, sind bei der Bearbeitung dieses 440 Seiten umfassenden Buches von dem Herrn Verfasser die Werke zweier auswärtiger Gelehrten benutzt worden; Laisant's „Essai sur les fonctions hyperboliques“ hat dem vorliegenden Buche gleichsam als Grundlage und Gerüste gedient; und einiges, besonders die Geschichte betreffende, ist der Einleitung entlehnt, die Herr Forti seinen „Tavole logaritmiche“ vorausgeschickt hat. Durch ein gründliches Studium aller die Hyperbel-

functionen betreffenden Arbeiten, deren Zahl nicht unbeträchtlich ist, hat Herr Günther das Material, welches sich in Laisant's Essai findet, um mehr als das Doppelte bereichert und so ein Compendium geschaffen, in welchem die Lehre von den Hyperbelfunctionen sammt ihren zahlreichen Anwendungen in systematischer Weise entwickelt ist.

In dem ersten Capitel: „Historisch-bibliographische Einleitung", (S. 1-63), wird die Entwickelung, welche die Lehre von den Hyperbelfunctionen in den letzten beiden Jahrhunderten erfahren hat, zusammengestellt. Die ersten Spuren dieser Functionen finden sich bei Gregorius a St. Vincentio 1647; seiner Entdeckung der Hyperbel-Quadratur verlieh zuerst einen exacten mathematischen Ausdruck Nicolaus Mercator. Mit welchem Fleisse Herr Günther die Geschichte dieser Functionen bis in die neueste Zeit studirt hat, davon giebt schon das Verzeichnis der in dem ersten Capitel citirten zahlreichen Schriften (S. 54-63) eine Vorstellung.

Die eigentliche Theorie der Hyperbelfunctionen beginnt mit Capitel II.: „Die Kreis- und Hyperbelfunctionen, aus einer gemeinsamen algebraischen Quelle abgeleitet" (S. 64-86). Hier lehnt sich der Herr Verfasser an Herrn Eduard Lucas an, der in seiner „Théorie des fonctions numériques simplement périodiques" den Zusammenhang zwischen Kreisfunctionen und Hyperbelfunctionen durch Einführung der Functionen

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n,$$

wo a und b die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - Px + Q = 0$$

sind, nachgewiesen hat. Diese Zusammengehörigkeit der Hyperbelfunction mit der Kreisfunction rechtfertigt auch den von Herrn Günther durchgängig gebrauchten Namen „Hyperbelfunction", statt der bisherigen Bezeichnung „hyperbolische Function". Dazu kommt, dass mehrere englische Mathematiker die bei der Rectification der Hyperbel auftretenden Integrale und deren Umkehrungen als „hyperbolische" bezeichnen, analog den elliptischen Functionen.

In Capitel III.: „Theorie der einfachen Hyperbelfunctionen"

(S. 87-151) werden zunächst die Hyperbelfunctionen geometrisch definirt. Die hieraus folgenden Fundamentalgleichungen, die Beziehungen zwischen Kreis- und Hyperbelfunctionen, die Periodicität u. a. werden behandelt. Zwischen dem Winkel τ, der hyperbolischen Amplitude von u, welcher nach Lambert hier „transcendenter Winkel" genannt wird, und der hyperbolischen Länge u besteht die einfache Relation $\text{tang}\,\frac{\tau}{2} = \mathfrak{Tang}\,\frac{u}{2}$. Die Theorie wird nun weiter ausgebildet durch das Additionstheorem, die Ableitungen, Reihenentwickelungen, Darstellungen als unendliche Producte und Kettenbruchentwickelungen.

Capitel IV. und V. (S. 152-189, 190-296) enthalten: „Anwendungen der Hyperbelfunctionen auf Fragen der Algebra und Analysis und auf Fragen der Geometrie und mathematischen Physik." Es zeigt sich hier die Anwendbarkeit der Hyperbelfunctionen auf eine überraschend grosse Zahl der mannigfaltigsten Probleme. Aus der ersteren Gruppe erwähnen wir die Summen- und Differenz-Logarithmen, die Lösung der quadratischen, der cubischen, der Moivre-Riccati'schen Gleichungen, die Integrale irrationaler gebrochener Functionen, den hyperbolischen Integralsinus und Integralcosinus, die Integration gewisser totaler Differentialgleichungen, die Bernoulli'schen Zahlen und Functionen, die Kugelfunctionen, eine Reihe bestimmter Integrale, die doppelte Periodicität der Thetareihen. Die Anwendungen auf Geometrie betreffen zuerst goniometrische und trigonometrische Fragen, Probleme der sphärischen Astronomie; ferner Rectificationen, imaginäre elliptische und hyperbolische Kreispunkte, verschiedene analytisch-geometrische Fragen. Auch die elliptischen und hyperbolischen Radlinien, die Kettenlinie und ihre Evolute und Curven doppelter Krümmung werden hier mit Hülfe von Hyperbelfunctionen behandelt. Verschiedene mechanische Probleme, wie die Attraction des Drehungs-Ellipsoides, der Schwerpunkt einer Kettenlinien-Gewölbfläche, die Bewegung eines Atoms in der Verticalrichtung, das ballistische Problem gestatten ebenfalls die Anwendung der vorhergehenden Theorie. Endlich werden einige Sätze aus der mathematischen Physik, der Hydrodynamik, Optik,

mechanischen Wärmetheorie und Electrostatik durch Einführung der Hyperbelfunctionen umgeformt.

Capitel VI.: „Die rechnerischen Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie“ (S. 297-336) soll zeigen, dass die Hyperbelfunctionen in der sogenannten nichteuklidischen oder absoluten Geometrie eine ähnliche Rolle spielen, wie die Kreisfunctionen in der Trigonometrie. Bei diesem Abriss des calculatorischen Teiles der absoluten Geometrie wurden mehrfach die Schriften von Frischauf zum Ausgangspunkte genommen.

In Capitel VII. (S. 337-358) finden sich: „Allgemeine Betrachtungen über die Generalisirung mathematischer Begriffe und Probleme; Ausdehnung des Begriffes goniometrischer Functionen auf Curven, welchen die Gleichung $x^m \pm y^m = 1$ zukommt.“ Der Herr Verfasser zeigt, dass zur Discussion solcher Curven, die durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$$

bestimmt sind, die verallgemeinerten goniometrischen Functionen als „Anomalien“ weit wichtigere Dienste leisten, als die gewöhnlichen.

Andere Erweiterungen bringt das Capitel VIII.: „Schiefwinklige goniometrische Linien des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel; rechtwinklige goniometrische Linien der Ellipse und willkürlichen Hyperbel“ (S. 359-392).

In Capitel IX.: „Die verallgemeinerten goniometrischen Reihen und die verallgemeinerten goniometrischen Operationsgesetze“ (S. 393-413) werden als Erweiterungen der trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus gewisse Categorien von beliebig vielen zusammengehörigen Functionen behandelt, welche ein Additionstheorem, den Character einfacher Periodicität u. s. w. besitzen, aber statt der Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = 1 \text{ und } \begin{vmatrix} \mathfrak{Sin}\, x & \mathfrak{Cof}\, x \\ \mathfrak{Cof}\, x & \mathfrak{Sin}\, x \end{vmatrix} = 1$$

einer allgemeineren symmetrischen Determinante, auch gleich 1 gesetzt, genügen. Bei der Durchsicht der hierher gehörigen Arbeiten kann man, wie Herr Günther hervorhebt, die betrübende

Erfahrung machen, dass die Kenntnis des früher Geleisteten sich nur äusserst wenig verbreitet zeigt.'

Das letzte Capitel X.: „Uebertragung der goniometrischen Functionen auf den Raum; Hyperboloidfunctionen" enthält diejenigen Erweiterungen, welche sich ergeben, wenn man an Stelle der die goniometrischen Functionen definirenden partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

die entsprechende partielle Differentialgleichung für drei Variable

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \pm \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

zu Grunde legt. M.

F. J. Studnička. Ueber geometrische Darstellung der cyklischen und hyperbolischen Functionen. Cas. X. 80. (Böhmisch).

Nach durchgeführter Parallelisirung wird die graphische Darstellung gegeben und erörtert, beides unter Bezugnahme auf Günther's diesbezügliches Werk. Std.

Formenti. Riduzione di integrali di funzioni algebriche ad integrali di funzioni razionali. Rend. di Lomb. (2) XIV. 667-672.

M.

J. W. L. Glaisher. On the general analogy between the formulae of singly and doubly periodic functions. Brit. Ass. Rep. 1881.

Der Herr Verfasser betrachtet diejenigen Gruppen von Gleichungen in der Theorie der elliptischen Functionen, welche ihr Analogon bei den trigonometrischen Functionen haben. Die ersteren zeigen beim Vergleich eine grössere Regelmässigkeit als die letzteren. Verglichen werden Formeln, welche von der Ver-

tauschung des Arguments abhängen, dann solche, die durch Integration gewonnen werden, und drittens Reductionsformeln. Was die erstere Gruppe betrifft, so lassen sich die sechs trigonometrischen Grundfunctionen in drei Paare $\sin u, \cos u$; $\operatorname{tg} u, \cot u$; $\sec u$, $\operatorname{cosec} u$ teilen, und nimmt man aus jedem Paar eine heraus, so lässt sich aus diesem Tripel jedes andere gewinnen, wenn man $\frac{\pi}{2}+u$ für u setzt. Die Zahl dieser Tripel ist 8; und die Gesammtzahl aller aus den sechs Functionen zu bildenden Tripel ist 20. Bei den elliptischen Functionen giebt es zwölf solcher Grundfunctionen:

$$\operatorname{sn} u,\ \operatorname{cn} u,\ \operatorname{dn} u,\ \frac{1}{\operatorname{sn} u},\ \frac{1}{\operatorname{cn} u},\ \frac{1}{\operatorname{dn} u},\ \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},\ \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u},\ \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u},\ \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$
$$\frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u},\ \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u},$$

welche in drei Gruppen zu je vier:

$$\operatorname{sn} u,\ \frac{1}{\operatorname{sn} u},\ \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u},\ \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$
$$\operatorname{cn} u,\ \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u},\ \frac{1}{\operatorname{cn} u},\ \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u},$$
$$\operatorname{dn} u,\ \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u},\ \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},\ \frac{1}{\operatorname{dn} u}$$

geteilt werden können. Aus jedem beliebigen Tripel können die neun anderen Functionen (abgesehen von den Constanten-Factoren $\frac{1}{k}$, k' etc.) durch Substitution von $k+u$, $ik'+u$, $k+ik'+u$ für u erhalten werden. Die Anzahl dieser Tripel ist 64, die Gesammtzahl aller aus zwölf Functionen zu bildenden Tripel aber 220. Betrachten wir nur die reelle Substitution $k+u$ für u, so lassen sich die zwölf Functionen in sechs Paare:

$$\operatorname{sn} u, \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u};\ \operatorname{cn} u, \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u};\ \operatorname{dn} u, \frac{1}{\operatorname{dn} u};\ \frac{1}{\operatorname{sn} u}, \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u};$$
$$\frac{1}{\operatorname{cn} u}, \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u};\ \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$$

gruppiren, wo je eine Function, aus jedem Paar genommen, die zweite Function aus demselben Paar nach der Substitution er-

giebt. Aehnliche Analogien werden für die durch Integration entstandenen Formeln und für die Reductionsformeln dargetan.

Csy. (M.)

A. G. Greenhill. Reduction of the elliptic integrals $\int \frac{dz}{(z^3-1)\sqrt{(z^3-b^3)}}$ and $\int \frac{z\,dz}{(z^3-1)\sqrt{(z^3-b^3)}}$ to Jacobi's functions. Quart. J. XVIII. 66-73.

Für diese, bei der Reduction des Integrals

$$\int \frac{dy}{(1+py^2)\sqrt{1+qy^2}}$$

(s. Legendre, Fonctions elliptiques I. cap. XXVI.) vorkommenden Integrale, auf welche auch das Problem der Bewegung eines Projectils in einem proportional dem Cubus der Geschwindigkeit widerstehenden Mittel führt, erhält der Herr Verfasser die Formeln:

$$\sqrt{3}\sqrt{b}\int_z^\infty \frac{dz}{(z^3-1)\sqrt{z^3-b^3}}$$

$$= \frac{(k'+k\operatorname{cn}a)(1-\operatorname{cn}a)}{b(k'+k)\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a}\left\{\log\frac{1-\operatorname{cn}(a+x)}{1-\operatorname{cn}(a-x)}\,\frac{\theta(a+x)}{\theta(a-x)}\right.$$

$$+\omega\log\frac{1-\operatorname{cn}(\omega a+x)\,\theta(\omega a+x)}{1-\operatorname{cn}(\omega a-x)\,\theta(\omega a-x)}$$

$$+\omega^2\log\frac{1-\operatorname{cn}(\omega^2 a+x)}{1-\operatorname{cn}(\omega^2 a-x)}\,\frac{\theta(\omega^2 a+x)}{\theta(\omega^2 a-x)}$$

$$\left.-2(Za+\omega Z\omega a+\omega^2 Z\omega^2 a)x\right\} - \frac{(k'+k\operatorname{cn}a)^3x}{(k'+k\operatorname{cn}a)^3+k^3(1-\operatorname{cn}a)^3};$$

$$\sqrt[4]{3}\sqrt{b}\int_z^\infty \frac{z\,dz}{(z^3-1)\sqrt{z^3-b^3}} = \text{id.}-\frac{k(k'+k\operatorname{cn}a)^2(1-\operatorname{cn}a)x}{(k'+k\operatorname{cn}a)^3+k^3(1-\operatorname{cn}a)^3},$$

wo

$$\operatorname{cn}x = \frac{z-(\sqrt{3}+1)b}{z+(\sqrt{3}-1)b},\quad \operatorname{cn}a = \frac{1-(\sqrt{3}+1)b}{1+(\sqrt{3}-1)b}$$

ist, und ω und ω^2 die imaginären dritten Wurzeln der Einheit sind.

M.

G. Battaglini. Sull' equazione differenziale ellittica. Batt. G. XIX. 65-75.

Die hier ganz allgemein gelöste Aufgabe ist die, zu zeigen, wie eine Gleichung zwischen drei Variabeln, welche in Bezug auf jede dieser Variabeln quadratisch ist, unter gewissen Bedingungen ein particuläres Integral der elliptischen Differentialgleichung mit drei Variabeln darstellen kann, und das allgemeine Integral der elliptischen Differentialgleichung mit zwei Variabeln, wo die dritte Variable die Stelle der willkürlichen Constanten vertritt. Zu dem Zweck wird die zwischen den drei Variabeln

$$x = x_1 : x_2, \quad y = y_1 : y_2, \quad z = z_1 : z_2$$

bestehende quadratische Function in die Form gebracht:

$$\varphi(x, y, z) = (S_1 s_1 + S_2 s_2 + S_3 s_3 + S_4 s_4)^2 = S_s^2,$$

wo

$$a_1 b_1 c_1 = S_1, \quad b_1 c_1 a_2 = c_1 a_1 b_2 = a_1 b_1 c_2 = S_2,$$
$$b_2 c_2 c_1 = c_2 a_2 b_1 = a_2 b_2 c_1 = S_3, \quad a_2 b_2 c_2 = S_4,$$

und

$$x_1 y_1 z_1 = s_1, \quad y_1 z_1 x_2 + z_1 x_1 y_2 + x_1 y_1 z_2 = s_2,$$
$$y_2 z_2 x_1 + z_2 x_2 y_1 + x_2 y_2 z_1 = s_3, \quad x_2 y_2 z_2 = s_4$$

gesetzt ist; und nun werden die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten

$$S_{ij} = S_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

in der algebraischen Entwickelung der quaternären quadratischen Form S_s^2 aufgestellt. M.

G. F. W. Baehr. Sur le théorème d'Abel et sur les formules goniométriques qui s'en déduisent. Versl. en Meded. XVI. 195-204; Arch. Néerl. XVI. 116-125.

Das Abel'sche Theorem, das diesem Aufsatz zu Grunde liegt, ist das Folgende: „Es sei

$$\int_0^x \frac{dx}{\Delta x} = F(x),$$

worin

$$\Delta = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

dann ist

$$F(x_1)+F(x_2)+\cdots+F(x_\mu)=C$$

für alle Werte von $x_1, x_2 \ldots x_\mu$, deren Quadrate der Gleichung genügen:

$$f(x)^2-\varphi(x)^2(\varDelta x)^2=0.$$

Hierin sind die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ willkürlich, aber eine von beiden von gradem, die andere von ungradem Grad mit veränderlichen Coefficienten.

Aus diesem Theorem werden einige Folgerungen abgeleitet, dadurch, dass die Coefficienten gleich Null gesetzt werden und von den elliptischen Integralen auf die elliptischen Functionen übergegangen wird.

Weiter werden dadurch, dass $k=0$ gesetzt wird, die elliptischen Functionen in goniometrische übergeführt und darauf das Theorem angewendet, wodurch einige goniometrische Beziehungen entstehen, die für die Entwickelung des Sinus und des Cosinus der Summe mehrerer Bogen von Bedeutung sind. G.

M. Pasch. Ueber die Umkehrung des elliptischen Integrales. Klein Ann. XIX. 155-158.

Bei der Umkehrung des elliptischen Integrals erster Gattung in die Legendre'sche Normalform

$$u=\int^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

mit den Perioden $4A$ und $2(B-A)$, wo z eine complexe Variable, $\varkappa$ eine complexe Zahl mit negativer Ordinate und A, B die mit dem Anfangswerte $y=1$ geradlinig ausgeführten Integrale

$$A=\int_0^1 \frac{dz}{y}=-\int_0^{-1}\frac{dz}{y},$$

$$B=\int_0^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{dz}{y}=-\int_0^{-\frac{1}{\varkappa}}\frac{dz}{y} \qquad (y=\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)})$$

sind, ist es von Wichtigkeit zu zeigen, dass der Quotient

$$\frac{B-A}{A}$$

eine positive Ordinate besitzt. Dies wird hier durch geeignete Begrenzung des Gebietes der Variabeln z bewiesen.

M.

J. W. L. Glaisher. On elliptic functions. Mess. (2) XI. 81-95, 120-138.

Während Jacobi die Functionen $\sin am u$, $\cos am u$, $\varDelta am u$, $\operatorname{tang} am u$, $\sin \operatorname{coam} u$, $\varDelta \operatorname{coam} u$, $\operatorname{tang} \operatorname{coam} u$ benutzt, welche Gudermann bekanntlich abgekürzt mit $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $\operatorname{tn} u$, $\operatorname{snc} u$, $\operatorname{cnc} u$, $\operatorname{dnc} u$, $\operatorname{tnc} u$ bezeichnet, betrachtet Herr Glaisher Formelgruppen, die sich aus zwölf elliptischen Functionen, nämlich $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, deren Reciproken und deren Quotienten, gewinnen lassen, und führt für die letzteren neun Functionen folgende besonderen Bezeichnungen ein:

$$\operatorname{ns} u = \frac{1}{\operatorname{sn} u}, \quad \operatorname{nc} u = \frac{1}{\operatorname{cn} u}, \quad \operatorname{nd} u = \frac{1}{\operatorname{dn} u},$$

$$\operatorname{cs} u = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad \operatorname{sc} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \operatorname{cd} u = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$

$$\operatorname{ds} u = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad \operatorname{dc} u = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \operatorname{sd} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}.$$

Dadurch gewinnt der Gegenstand an Einfachheit und Uebersichtlichkeit. Die Formeln betreffen 1) die Functionen der Argumente $u+K$, $u+K+iK'$, $u+iK'$, z. B.

$$\operatorname{ns}(u+K) = \operatorname{dc} u, \quad \operatorname{ns}(u+iK') = k \operatorname{sn} u, \quad \operatorname{ns}(u+K+iK') = k \operatorname{cd} u;$$

2) die Ableitungen, z. B.

$$\frac{d}{du} \operatorname{ns} u = -\operatorname{cs} u . \operatorname{ds} u, \quad \frac{d}{du} \operatorname{cs} u = -\operatorname{ns} u . \operatorname{ds} u, \text{ etc.};$$

3) Integrationen, z. B.

$$\int \operatorname{ns} u . du = -\log \frac{\operatorname{cn}\frac{u}{2} . \operatorname{dn}\frac{u}{2}}{\operatorname{sn}\frac{u}{2}}$$

$$= -\log \sqrt{\frac{\operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u}} = \log(\operatorname{ds} u . \operatorname{cs} u).$$

Der zweite Teil der Arbeit enthält 1) Formeln, welche sich aus

der Verwandlung des Moduls k in k', $\frac{1}{k}$ und $\frac{ik}{k'}$ ergeben, z. B.

$$cd(iu, k') = ndu, \quad cd\left(ku, \frac{1}{k}\right) = dc\,u, \quad cd\left(k'u, \frac{ik}{k'}\right) = cnu;$$

2) Differentialformeln, wie

$$\frac{d^2}{du^2}(k.cd\,u)^n$$

$$= n(n-1)\,k'^2\,(k.cd\,u)^{n-2} - n^2(1+k^2)\,(k.cd\,u)^n + n(n-1)(k.cd\,u)^{n+2};$$

3) Integralformeln zur Reduction, wie

$$(n+1)\int (k.cd\,u)^{n+2}\,du - n(1+k^2)\int (k.cd\,u)^n\,du$$

$$+ (n-1)\,k'^2 \int (k.cd\,u)^{n-2}\,du + k^n k'^2.cd^{n-1}sdu.ndu = 0;$$

4) Werte von $\int cd^2u.du$, etc.; 5) Werte von $\int cd^3u.du$, etc. und $\int cd^4u.du$, etc.; und 6) Formeln, welche $\int (cd\,u)^n\,du$ etc. durch $\int cdu.du$, etc. oder $\int cd^2u.du$, etc. ausdrücken, je nachdem n ungrade oder grade ist.

Die Reductionsformeln sind der Form nach für alle zwölf Functionen dieselben und unterscheiden sich von einander nur dadurch, dass für die darin vorkommenden Buchstaben verschiedene Grössen und Functionen gesetzt werden müssen. Es ist z. B.

$$u_5 = \frac{1}{8}(3a^2+2ab+3b^2)\,u_1 + \frac{3}{8}(a+b)\,h_1 + \frac{1}{4}h_3,$$

und wenn

$$u_n = \int (k\,snu)^n\,du,$$

so ist

$$a = 1, \quad b = k^2, \quad h_n = k^n\,sn^{n-1}u.cnu.dnu;$$

wenn

$$u_n = \int (dsu)^n\,du,$$

so ist

$$a = k'^2, \quad b = -k^2, \quad h_n = -ds^{n-1}u.csu.nsu,$$

und so fort für alle zwölf Functionen.

Einige dieser Formeln sind dadurch erhalten worden, dass in bekannte Formeln die neue Bezeichnung eingeführt worden ist, andere dagegen sind hier wohl zum ersten Male entwickelt.

Glr. (M.).

J. W. L. Glaisher. A system of differential formulae in elliptic functions. Mess. (2) XI. 78-79.

Die Formeln sind

$$\frac{d^2}{du^2}\log \operatorname{sn} u = k^2(\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(u+iK')),$$

$$\frac{d^2}{du^2}\log \operatorname{cn} u = k^2(\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(u+K+iK')),$$

$$\frac{d^2}{du^2}\log \operatorname{dn} u = k^2(\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(u+K)),$$

woraus

$$\frac{d^2}{du^2}\log \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} = k^2\{\operatorname{sn}^2(u+K+iK') - \operatorname{sn}^2(u+iK')\}, \text{ etc.}$$

Glr. (M.).

Much. Ueber die Sturm'sche Methode der Ableitung des Additionstheorems der elliptischen Integrale erster Gattung. Schlömilch Z. XXVI. 333-335.

Die bekannte Sturm'sche Methode lässt nicht ersehen, weshalb man die von den Nennern befreite elliptische Differentialgleichung

$$\Delta y\, dx + \Delta x\, dy = 0$$

grade mit dem Ausdruck $1-k^2x^2y^2$ dividiren muss, um eine integrirbare Gleichung zu erhalten. Um diesen Mangel zu beseitigen, modificirt Herr Much die Methode dahin, dass er die gegebene Differentialgleichung behufs Integration mit einem vorläufig unbekannten Factor $\varphi(x, y)$ multiplicirt und hernach diesen Factor gleich $\frac{C'}{1-k^2x^2y^2}$ bestimmt.

M.

J. Farkas. Sur le développement des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce en séries entières récurrentes. C. R XCII. 181-183.

Die Entwickelung geschieht mit Hülfe der Formeln

$$\int x\,d\varphi = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\varphi - \sqrt{1-x^2}\left[\frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\frac{x^{2n-3}}{2n-2} + \cdots + \frac{(2n-1)\ldots 3}{2n\ldots 4}\cdot\frac{x}{2}\right],$$

$$\int \frac{d\psi}{y} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\log\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} - \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\left[\frac{1}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{y^2}{2n-2} + \cdots + \frac{(2n-1)\ldots 3}{2n\ldots 4}\frac{y^{2n-2}}{2}\right].$$

M.

E. H. Glaisher. Formulae for $\operatorname{sn} 8u$, $\operatorname{cn} 8u$, $\operatorname{dn} 8u$ in terms of $\sin u$. Lond., Proc. R. S. XXXII. 444.

Auszug aus einer in den Transactions zu publicirenden Arbeit, über die seiner Zeit referirt werden wird. Cly. (O.).

J. W. L. Glaisher. On the q-series in elliptic functions. Brit. Ass. Rep. 1881.

Csy.

A. Cayley. Table of $\Delta^m 0^n \div \Pi(m)$ up to $m = n = 20$. Cambr. Trans. XIII. 1-4.

Grunert hat eine Tafel für $\frac{\Delta^m 0^n}{m!}$ bis zu $m = n = 12$ in Crelle J. XXV. 279 gegeben; Herr Cayley hat diese Tafel nachgerechnet und bis zu $m = n = 20$ erweitert, mit Hülfe der Formel

$$\frac{\Delta^m 0^{n+1}}{m!} = m\frac{\Delta^m 0^n}{m!} + \frac{\Delta^{m-1} 0^n}{(m-1)!}.$$

Die besondere Methode der Berechnung wird auseinandergesetzt.

Glr. (M.).

J. PURSER. On certain mathematical identities occurring in Thomson and Tait's „Natural Philosophy.“ Mess. (2) XI. 26-32.

Diese Identitäten sind:

$$a^2\Sigma\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\frac{e^{(2n+1)\frac{\pi y}{a}}-e^{-(2n+1)\frac{\pi y}{a}}}{e^{(2n+1)\frac{\pi b}{2a}}+e^{-(2n+1)\frac{\pi b}{2a}}}\sin(2n+1)\frac{\pi x}{a}=-S,$$

wo S derselbe Ausdruck mit vertauschten a und b, x und y ist; und

$$a^3b\left\{\frac{1}{3}-\frac{2^6}{\pi^5}\frac{a}{b}\Sigma\frac{1}{(2n+1)^5}\frac{1-e^{-(2n+1)\frac{\pi b}{a}}}{1+e^{-(2n+1)\frac{\pi b}{a}}}=-S',\right.$$

wo S' derselbe Ausdruck wie auf der linken Seite mit vertauschten a und b ist.

Diese Identitäten treten in der Theorie der Drehung eines rechtwinkligen Prismas auf, und Herr Purser zeigt, dass sie in der Theorie der elliptischen Functionen durch Vertauschung der Moduln k und k' gewonnen werden. Es findet sich hier zugleich eine Bemerkung über die Convergenz der q-Reihen, welche für ein complexes u Sinus und Cosinus der Vielfachen von u enthalten. Glr. (M.).

J. W. L. GLAISHER. Formulae for the sn, cn, dn of $u+v+w$. Mess. (2) XI. 45-48.

Formeln für $\text{sn}(u+v+w)$, $\text{cn}(u+v+w)$, $\text{dn}(u+v+w)$, ausgedrückt durch $\text{sn}\,u$, $\text{cn}\,u$, $\text{dn}\,u$, $\text{sn}\,v$ etc. Sie entsprechen den bekannten Additionstheoremen, welche $\text{sn}(u+v)$, $\text{cn}(u+v)$, $\text{dn}(u+v)$ durch $\text{sn}\,u$ etc. darstellen. Glr. (M.).

H. J. S. SMITH. On some discontinuous series considered by Riemann. Mess. (2) XI. 1-11.

Riemann hat in einem Fragmente, das nach seinem Tode in seinen gesammelten Werken veröffentlicht worden ist, den Wert

gewisser q-Reihen in dem Grenzfall bestimmt, wo der analytische Modul von q gleich 1 ist. Wenn $q = \varrho e^{i\theta}$ gesetzt wird, so enthalten die von Riemann betrachteten Reihen θ allein und convergiren und divergiren für eine unendliche Zahl von Werten des θ zwischen irgend zwei noch so nahe bei einander genommenen Grenzen. Diese Eigenschaft war es wohl, die Riemann's Aufmerksamkeit auf sie gelenkt hatte. Zwei dieser Reihen, die als Beispiele für alle übrigen betrachtet werden können, werden in der vorliegenden Note untersucht und einige Specialeigenschaften, welche in Riemann's Fragment sich nicht finden, ergänzend erwähnt. Es sei

$$S(q) = 4\Sigma \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{q^n}{1+q^n},$$

wo n irgend eine ganze positive Zahl zwischen 1 und ∞ bezeichnet. Setzt man nun

$$q = \varrho e^{i\theta},$$

multiplicirt beide Seiten mit $\frac{dq}{q} = \frac{d\varrho}{\varrho}$ und nimmt das geradlinige Integral von 0 bis $\varrho e^{i\theta}$ längs des Vectors $e^{i\theta}$, so erhält man

$$\int_0^{\varrho e^{i\theta}} S(q) \frac{dq}{q} = 4\Sigma \frac{(-1)^n}{n^2} \log(1+\varrho^n e^{ni\theta}).$$

In dem Fall, wo $\varrho = 1$ ist, werden die beiden Reihen folgende:

$$(1) \qquad -2\log 2 + 2i\Sigma \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(n\theta)$$

und

$$(2) \qquad 2\Sigma \frac{(-1)^n}{n^2} \log\left\{4\cos^2 \frac{1}{2}(n\theta)\right\} + 4i\Sigma \frac{(-1)^n}{n^2}\left[\frac{1}{2}(n\theta)\right],$$

wo unter $\left[\frac{1}{2}(n\theta)\right]$ der absolut kleinste Winkel verstanden ist, welcher denselben Wert hat wie $\frac{1}{2}n\theta$, ausgenommen, wenn $\frac{1}{2}(n\theta)$ ein ungrades Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist, in welchem Falle jener Wert $= 0$ ist. Der imaginäre Teil von (2) ist stets convergent; die Convergenz oder Divergenz von (1) und von dem reellen Teil in (2) hängt von der Natur der dem θ beigelegten Werte

ab. Ist $\frac{\theta}{\pi}$ incommensurabel, so ist die Reihe (1) divergent, und Riemann sagt, der reelle Teil von (2) sei dann auch divergent. Aber das scheint ein Irrtum, denn der reelle Teil von (2) ist in der Tat divergent oder convergent, je nachdem die incommensurable Grösse θ gewissen Bedingungen genügt oder nicht; und im Besonderen kann gezeigt werden, dass sobald θ die incommensurable Wurzel einer Gleichung endlichen Grades mit ganzzahligen Coefficienten ist, der reelle Wert von (2) stets convergirt. Andererseits giebt es zwischen je zwei noch so nahen Grenzen immer eine unendliche Zahl von Werten des θ, für welche der reelle Teil von (2) divergent ist. Wenn

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{a}{b}$$

einen rationalen Bruch darstellt, der in den kleinsten Zahlen genommen ist, so enthalten für ein ungrades a die Reihen (1) und (2) Glieder, die unendlich sind. Ist aber a grade, so sind beide Reihen convergent, und Riemann hat ihre Summen bestimmt. Professor Smith recapitulirt Riemann's Untersuchung mit einigen Zusätzen. Er betrachtet den genauen Wert der Gleichungen in dem Falle $\varrho = 1$, und ergänzt Riemann's Behandlung durch den Beweis, dass die Grenze von

$$\Sigma \frac{(-1)^n}{n^2} \log(1+\varrho^n e^{ni\theta}),$$

wenn $\varrho = 1$, gleich $\Sigma \frac{(-1)^n}{n^2} \log(1+e^{ni\theta})$ ist.

Glr. (M.).

Ch. Hermite. Sur les fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$ de Jacobi. Chelini, Coll. Math. 1-5.

Der Herr Verfasser zeigt, wie die von Jacobi, Fundam. nova p. 187 gegebenen Formeln für die Reciproken der Functionen $\Theta(x)$ und $H(x)$, nämlich:

$$\frac{\sqrt{kk'\left(\frac{2\varkappa}{\pi}\right)^3}}{\Theta\left(\frac{2\varkappa x}{\pi}\right)} = \frac{2\sqrt[4]{q}(1-q^2)}{1-2q\cos x+q^2} - \frac{2\sqrt[4]{q^9}(1-q^6)}{1-2q^3\cos 2x+q^6}+\cdots$$

und

$$\frac{\sqrt{kk'\left(\frac{2\varkappa}{\pi}\right)^3}}{H\left(\frac{2\varkappa x}{\pi}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin x} - \frac{4q^2(1+q^2)\sin x}{1-2q^2\cos 2x+q^4} + \frac{4q^4(1+q^4)\sin x}{1-2q^4\cos 2x+q^8}+\cdots,$$

insofern diese Functionen vollständig characterisiren, als aus diesen Gleichungen allein die Haupteigenschaften dieser Functionen hergeleitet werden können, die in den Relationen

$$\Theta(x+2iK') = -\Theta(x).e^{-\frac{i\pi}{\varkappa}(x+iK')},$$

$$H(x+2iK') = -H(x).e^{-\frac{i\pi}{\varkappa}(x+iK')}$$

oder

$$\frac{1}{\theta(x+iK')} = \frac{-ie^{\frac{i\pi}{4\varkappa}(2x+iK')}}{H(x)}, \quad \frac{1}{H(x+iK')} = \frac{-ie^{\frac{i\pi}{4\varkappa}(2x+iK')}}{\theta(x)}$$

enthalten sind. M.

A. Cayley. On a diagram connected with the transformation of elliptic functions. Brit. Ass. Rep. 1881.

Das Diagramm ist eine Darstellung des analytischen Theorems, dass die ganze Reihe der Transformationen ω in $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganz und $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, durch Combinationen der Transformationen ω in $\omega+1$ und ω in $-\frac{1}{\omega}$ erhalten werden kann.

Csy. (M.).

O. Rausenberger. Beitrag zur linearen Transformation der elliptischen Functionen. Kronecker J. XCI. 335-340.

Alle linearen Transformationen der elliptischen Transcendenten lassen sich bekanntlich auf die Fälle zurückführen, in denen für τ

$$1)\qquad \tau' = -\frac{1}{\tau} \text{ und } 2)\qquad \tau'' = \tau+1$$

gesetzt wird. Der erstere, allein schwierige Fall wird hier noch einmal behandelt und die Constante C in der Gleichung

$$\vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) = C.e^{\pi i \tau w^2}.\vartheta_3(\tau, \tau w)$$

auf einem von den früheren verschiedenen, mehr algebraischen Wege bestimmt. M.

A. Hurwitz. Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen. Klein Ann. XIX. 67-71.

Der Modul k des elliptischen Integrals erster Gattung, als Function des Periodenverhältnisses ω aufgefasst, hat die Eigenschaft, dass, wenn zwischen zwei Argumenten ω und ω_1 die Relation

$$a\omega\omega_1 + b\omega + c\omega_1 + d = 0$$

besteht, wo a, b, c, d ganze Zahlen und $ad-bc$ positiv, die Werte $k(\omega)$ und $k(\omega_1)$ durch eine algebraische Gleichung verbunden sind. Im Vorliegenden wird nun gezeigt, dass die in ω und ω_1 bilineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten und positiver Determinante die einzige algebraische Gleichung zwischen ω und ω_1 ist, welche der Anforderung genügt, dass $k(\omega)$ und $k(\omega_1)$ ebenfalls algebraisch zusammenhängen. M.

H. J. S. Smith. On the differential equations satisfied by the modular equations. Brit. Ass. Rep. 1881.

Csy.

W. Dyck. Versuch einer übersichtlichen Darstellung der Riemann'schen Fläche, welche der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung für Primzahltransformation der elliptischen Functionen entspricht. Klein Ann. XVIII. 507-528.

Es handelt sich in dem vorliegenden Aufsatze um die anschauliche Darstellung gewisser, zunächst sehr unübersichtlich erscheinender regulärer Riemann'scher Flächen, wie sie in der von Herrn Klein entwickelten Form für die Galois'sche Resolvente der Modulargleichung für Primzahltransformation (n^{ter} Ordnung) der elliptischen Functionen sich ergeben. Die Beschreibung solcher regulären Flächen wird wesentlich durch die Einführung des Princips erleichtert, die gestaltliche Anordnung derselben an gewisse Untergruppen der durch die Ueberführung der sämmtlichen Blätter der Fläche ineinander ausgeprägten Gesammtgruppen zu knüpfen, und so die Gesammtheit dieser Blätter in gewisse, jenen Untergruppen entsprechende Systeme zusammenzuordnen. Im vorliegenden Falle, für die $\frac{n \cdot n^2 - 1}{2}$ -blättrige Fläche, wie sie der Gruppe der Modulargleichung entspricht, erweist sich unter allen möglichen, den verschiedenen Untergruppen entsprechenden Anordnungen besonders diejenige übersichtlich, welche die in der Gruppe der Modulargleichung enthaltenen cyklischen und metacyklischen Untergruppen hervortreten lässt. Für diese ist die Anordnung im Allgemeinen characterisirt und dann noch an den Beispielen 5, 7, 11 speciell illustrirt. Dk.

J. Gierster. Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen. Klein Ann. XVIII. 319-366.

Die vorliegende Arbeit liefert einen wesentlichen Beitrag zur Theorie der Gleichungen, welche bei der Transformation der elliptischen Functionen auftreten, und die bekanntlich nächst den algebraisch auflösbaren als die einfachsten algebraischen Gleichungen zu gelten haben.

Der Verfasser giebt die vollständige Lösung der Aufgabe: „Sämmtliche Untergruppen der Modulargleichung des q^{ten} Transformationsgrades zu bestimmen, wo q eine beliebige ungrade Primzahl bezeichnet.“ Es wird gezeigt, dass ausser den cyklischen und metacyklischen Untergruppen, welche von J. A. Serret eingehend untersucht sind, immer gewisse Untergruppen von zwölf Substitutionen, ferner für $q \equiv \pm 1$ (mod. 8) Gruppen von 24 Substitutionen, endlich für $q \equiv \pm 1$ (mod. 5) Gruppen von 60 Substitutionen als Untergruppen auftreten.

Dass diese Aufzählung die überhaupt existirenden Untergruppen erschöpft, wird im zweiten Abschnitt der Arbeit nachgewiesen. Hz.

A. Cayley. On the Jacobian sextic equation. Quart. J. XVIII. 52-66.

Dies ist die Multiplicatorgleichung sechsten Grades, die bei der Transformation fünfter Ordnung der elliptischen Functionen auftritt, und die hier an und für sich hinsichtlich ihrer invarianten Eigenschaften untersucht wird.

Die Arbeit zerfällt in drei Abschnitte.

Der erste giebt die Invariantencharacteristik der vorliegenden Gleichung (und zugleich aller linear in sie überführbaren).

Schreibt man die allgemeine Form sechsten Grades, wie gewöhnlich

$$f \equiv (a, b, c, \dots g)(x, y)^6 = 0,$$

so lässt sich die Jacobi'sche Gleichung immer in die Gestalt bringen, die durch die Relationen

$$c = 0, \quad e = 0, \quad ag + 9bf - 20d^2 = 0$$

bedingt ist. Dies kommt aber auf eine einzige Invariantenrelation zwischen den vier Invarianten $A, B, C, \varDelta$ hinaus. (Dabei sind A, B, C von den resp. Graden 2, 4, 6 und $\varDelta$ die Discriminante von f vom Grade 10). Diese lautet:

$$\frac{1}{25\sqrt{5}} \sqrt{-\varDelta} = \varphi + (60\beta^2 - 240\beta\delta + 256\delta^2)\sqrt{\delta},$$

wo

$$\beta = bf, \quad \delta = d^2, \quad \varphi = a^2 f^3 + b^3 g^2;$$

und zwar sind diese drei Grössen β, δ, φ als irrationale Invarianten von f aufzufassen, da sich die drei Invarianten A, B, C in einfacher Weise als ganze rationale Functionen der drei ersteren Grössen ausdrücken lassen.

Im zweiten Abschnitt wird nachgewiesen, dass die Gruppe der Jacobi'schen Gleichung die positive Halbgruppe der 120 Substitutionen ist, die die Serret'sche sechswertige Function von sechs Elementen ungeändert lassen.

Im dritten Abschnitt wird auf die Jacobi'sche Gleichung die Tschirnhausen-Transformation

$$\chi = -ax^3 - 6bx^2 - 10d$$

angewandt, wodurch man eine Form sechsten Grades erhält, die dann die Resolvente einer speciellen Form fünften Grades wird:

$$(1, 0, c, 0, e, f)\ (x, 1)^5,$$

wo c, e, f einfache ganze Functionen der Coefficienten von f und der vierten Wurzel ihrer Discriminante Δ sind. My.

KRONECKER. Zur Theorie der elliptischen Functionen.
Berl. Monatsber. 1881. 1165-1172.

Bereits im Juli 1867 hat Herr Kronecker der Berliner Akademie von einer bemerkenswerten Formel Mitteilung gemacht, in welcher die Formeln, welche Jacobi in der Einleitung zu seiner Abhandlung: „Sur la rotation d'un corps" gegeben hat, sich zusammenfassen lassen. Diese Formel besagt, dass der Quotient von Thetareihen

$$\frac{\Sigma(-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \mu q^{\frac{1}{4}\mu^2} \cdot \Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} q^{\frac{1}{4}\nu^2} (x^\nu y^\nu - x^{-\nu} y^{-\nu})}{\Sigma(-q)^{m^2} x^{2m}\, \Sigma(-q)^{n^2} y^{2n}},$$

worin μ, ν alle positiven ungraden Zahlen, m und n alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ bedeuten, eine Function $F(q, x, y)$ ist, welche der Gleichung

$$\text{I.} \qquad F(q, x, y) = \sum_\mu \sum_\nu q^{\frac{1}{2}\mu\nu} (x^\mu y^\nu - x^{-\mu} y^{-\nu})$$

genügt, für alle Werte von x und y, deren absoluter Betrag

zwischen $r^{\frac{1}{2}}$ und $r^{-\frac{1}{2}}$ liegt und wo mit r, welches kleiner als 1 ist, der absolute Betrag von q bezeichnet ist. Herr Kronecker zeigt nun, dass diese Formel I. unmittelbar aus dem Cauchy'schen Integralausdrucke

$$\int \frac{F(q, x, z)}{z-y} \cdot \frac{dz}{2\pi i}$$

hergeleitet werden kann. Aus der Formel I. ergeben sich dann weiter die Reihenentwickelungen für die Quotienten

$$\frac{\vartheta_1(\xi)}{\vartheta_0(\xi)}, \quad \frac{\vartheta_2(\xi)}{\vartheta_0(\xi)}, \quad \frac{\vartheta_3(\xi)}{\vartheta_0(\xi)}$$

und somit die in § 39 der Fundamenta enthaltenen Reihenentwickelungen für die elliptischen Functionen. Es bedarf dazu nur der Kenntnis der Unendlichkeitswerte der Function $F(q, x, y)$, welche aus der Productenentwickelung der Thetafunctionen resultiren. Da nun die letztere, wie Herr Kronecker (Berl. Monatsb. 1880. 696 und 857; siehe F. d. M. XII. 123) gezeigt hat, ebenfalls aus dem Cauchy'schen Integralsatze sich herleiten lassen, so kann dieser als die alleinige Quelle der ganzen Theorie angesehen werden. Im Folgenden zeigt nun Herr Kronecker, wie man direct, ohne die functionentheoretischen Eigenschaften von $F(q, x, y)$ zu Grunde zu legen, zu einem Beweise der Formel I. gelangen kann, indem man den formalen Zusammenhang des mit $F(q, x, y)$ bezeichneten Ausdrucks untersucht. Als besonderer Fall erscheint der am Schluss der Fundamenta entwickelte Fermat'sche Satz über die Darstellung der Zahlen als Summen von vier Quadraten auf wesentlich arithmetischem Wege hergeleitet. M.

A. Hurwitz. Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe. Diss. Leipzig, Klein Ann. XVIII. 528-592.

Bezeichnen wir einen aus der Gesammtheit von linearen ganzzahligen Substitutionen herausgegriffenen Complex von Substitutionen, der so beschaffen ist, dass die Zusammensetzung irgend zweier Substitutionen des Complexes wieder auf eine Sub-

stitution des Complexes führt, als „Untergruppe" der Gesammtheit der Transformationen, so lässt sich eine elliptische Modulfunction folgendermassen definiren: „Eine Modulfunction ist eine eindeutige analytische Function eines Argumentes ω, die ungeändert bleibt, wenn man das Argument irgend welchen linearen Transformationen einer in der Gesammtheit der letzteren enthaltenen Untergruppe unterwirft, während sie bei Anwendung aller übrigen linearen Transformationen ihren Wert im Allgemeinen ändert." Die vollständige Entwickelung einer unabhängigen Theorie dieser elliptischen Modulfunctionen auf den von Herrn Klein gegebenen Grundlagen bildet den ersten Teil der vorliegenden Arbeit. Von der geometrischen Figur, welche die linearen Substitutionen

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, \quad \alpha\delta-\beta\gamma = 1$$

in der complexen Ebene der ω repräsentirt, geht der Herr Verfasser aus und zeigt ihren Zusammenhang mit den Transformationen. Alsdann werden die Transformationen einer Untergruppe mit Hülfe der Klein'schen Fundamentalpolygone behandelt, und es folgt eine ausführliche Darstellung der analytischen Entwickelungen für die Modulfunctionen. Unter den Resultaten heben wir folgende Sätze hervor: „Eine eindeutige Form von ω_1 und ω_2 von negativem ganzen Grade, die sich bei allen linearen Transformationen nur um Einheitswurzeln ändert und im Ausgangsraum nur von endlicher Ordnung unendlich wird, lässt sich in der Form

$$\psi(\omega_1, \omega_2) = (\sqrt[12]{\varDelta})^r \cdot \frac{G_m(g_2, g_3)}{G_n(g_2, g_3)},$$

wo G_m und G_n ganze Functionen der Invarianten g_2 und g_3 sind, darstellen und kann sich folglich nur um 12te Wurzeln der Einheit ändern. In der Form $(\sqrt[12]{\varDelta})^r G_m(g_2, g_3)$ sind für $r<0$ alle im Ausgangsraume nur für $\omega = i\infty$ unendlich gross werdenden, für $r \geqq 0$ alle überhaupt nicht unendlich werdenden Formen enthalten, die sich bei linearen Transformationen nur um Einheitswurzeln als Factoren ändern." Der erste Abschnitt schliesst mit der Aufstellung algebraischer Relationen zwischen den G_μ

und mit der Betrachtung des Differentialquotienten der Modulfunctionen.

Im zweiten Abschnitt werden die neuen Multiplicatorgleichungen erster Stufe untersucht, welche in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen eine Rolle spielen. Auch hier führt der Herr Verfasser die Untersuchungen des Herrn Klein, deren Resultate bereits früher mitgeteilt sind (Rend. Ist. Lomb. (2) XII. und Clebsch Ann. XV. 86; s. F. d. M. XI. 1879. 299) weiter aus. Die Beschränkung auf Transformationen von einem Primzahlgrade wird hier fallen gelassen. Es werden die Gleichungen, deren Existenz zunächst nachgewiesen ist, für beliebig zusammengesetzte Transformationsgrade hergeleitet und nach ihren Haupteigenschaften untersucht. M.

A. Cayley. On the elliptic-function solution of the equation $x^3+y^3-1=0$. Cambr. Proc. IV. 106-109.

Es wird bewiesen, dass, wenn

$$m=\sqrt[3]{2},\quad r=\sqrt[4]{3},\quad k=\frac{1}{2}\sqrt{(2-r^2)},$$

dann

$$x=\frac{2r.\text{sn}u.\text{dn}u-(1+\text{cn}u)^2}{2r.\text{sn}u.\text{dn}u+(1+\text{cn}u)^2},$$

$$y=\frac{m(1+\text{cn}u)\,\{1+r^2+(1+r^2)\,\text{cn}u\}}{2r.\text{sn}u.\text{dn}u+(1+\text{cn}u)^2}$$

die Lösungen der Gleichung $x^3+y^3=1$ sind. Glr. (M.).

K. H. Schellbach. Eine geometrische Darstellung der Landen'schen Substitution. Kronecker J. XCI. 347-348.

Aus den Eigenschaften eines sphärischen Dreiecks wird 1) der bekannte Ausdruck eines elliptischen Integrals erster Gattung durch zwei elliptische Integrale zweiter Gattung und 2) die Relation

$$\int\frac{da}{\sqrt{1-\sin^2\gamma.\sin^2 a}}=\frac{1}{2\cos^2\frac{\gamma}{2}}\int\frac{d(a+b)}{\sqrt{1-\text{tg}^4\frac{\gamma}{2}\cdot\sin^2(a+b)}}$$

hergeleitet. M.

Kleiber. Ableitung eines Systems von Formeln für die elliptischen Functionen und ihr Zusammenhang mit der sphärischen Trigonometrie. II. Pr. Königsberg i. Pr.

Fortsetzung des Programms vom vorigen Jahre, s. F. d. M. XII. 1880. 356. Es werden die Bedingungen für ein sphärisches Dreieck untersucht, unter denen überhaupt Formeln der elliptischen Functionen sich auf die sphärische Trigonometrie übertragen lassen, und alsdann aus den im ersten Teile gewonnenen Formeln mehrere bekannte und neue Formeln für ein sphärisches Dreieck abgeleitet. M.

J. W. L. Glaisher. On the connexion between elliptic functions and spherical trigonometry. Quart. J. XVII. 353-364.

Nachdem in den ersten Paragraphen die bekannte Lösung der elliptischen Differentialgleichung durch Formeln der sphärischen Trigonometrie recapitulirt worden ist, wird in irgend einem sphärischen Dreieck ABC die Reihe der Functionen

$$\sin a,\ \sin b,\ \sin c,\ \cos a,\ \cos b,\ \cos c;$$
$$\sin A,\ \sin B,\ \sin C,\ \cos A,\ \cos B,\ \cos C$$

ersetzt durch resp.

$$\mathrm{sn}\, u,\ \mathrm{sn}\, v,\ \mathrm{sn}(u+v),\ \mathrm{cn}\, u,\ \mathrm{cn}\, v,\ \mathrm{cn}(u+v);$$
$$k\,\mathrm{sn}\, u,\ k\,\mathrm{sn}\, v,\ k\,\mathrm{sn}(u+v),\ \mathrm{dn}\, u,\ \mathrm{dn}\, v,\ \mathrm{dn}(u+v),$$

und umgekehrt. Die hierdurch gewonnene Beziehung zwischen den Formeln der sphärischen Trigonometrie und den Formeln für die elliptischen Functionen wird nun im Besonderen an den Additionstheoremen und anderen Fundamentalformeln der elliptischen Functionen untersucht. M.

A. Hurwitz. Ueber die Anwendung der elliptischen Functionen auf Probleme der Geometrie. Klein Ann. XIX. 56-66.

Das allgemeine Integral der elliptischen Differentialgleichung lässt sich auffassen als allgemeinste $(2-2)$-deutige Beziehung

zwischen den Elementen zweier rationaler einstufiger Mannigfaltigkeiten, und es ergiebt sich der Fundamentalsatz: „Sind zwei rationale einstufige Mannigfaltigkeiten (2—2)-deutig algebraisch auf einander bezogen, so ist bei geeigneter Wahl der Parameterverteilung die Beziehung so dargestellt, dass einem Elemente $\lambda_1 = \text{sn}\, u$ der einen Mannigfaltigkeit die Elemente

$$\lambda_2' = \text{sn}(u+C) \text{ und } \lambda_2'' = \text{sn}(u-C)$$

der anderen Mannigfaltigkeit entsprechen. Dabei bedeutet C eine der Beziehung eigentümliche Constante, und die Parameterverteilung ist so zu treffen, dass den Doppelelementen in der einen wie in der anderen Mannigfaltigkeit die Parameter

$$+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$$

beigelegt werden." Von diesem Satze und seiner Umkehrung werden Anwendungen gemacht auf die Tangentialpunkte einer Geraden in Bezug auf eine Raumcurve dritter Ordnung, auf die Steiner'schen Polygone, auf die Gesammtheit der Kreise, welche zwei feste Kreise berühren, und auf die Einteilung der ebenen Curven vierter Ordnung und vierter Klasse. M.

G. Humbert. Sur les courbes de Clebsch, dont les coordonnées s'expriment en fonctions elliptiques d'un paramètre. S. M. F. Bull. IX. 166-172.

Die fünf Functionen

$$P_1(z) = \theta_1(z),\quad P_2(z) = \theta_1\left(z+\frac{\omega}{5}\right),\quad P_3(z) = \theta_1\left(z+\frac{2\omega}{5}\right),$$
$$P_4(z) = \theta_1\left(z+\frac{3\omega}{5}\right),\quad P_5(z) = \theta_1\left(z+\frac{4\omega}{5}\right)$$

genügen den sechs Relationen

$$P_1^2 = aP_2P_5+bP_3P_4,$$
$$P_2^2 = aP_3P_1+bP_4P_5,$$
$$P_3^2 = aP_4P_2+bP_5P_1,$$
$$P_4^2 = aP_5P_3+bP_1P_2,$$
$$P_5^2 = aP_1P_4+bP_2P_3,$$
$$P_2^3+\lambda P_1P_2P_3 = \mu P_4P_1^2+\nu P_5P_3^2,$$

wo a eine von q abhängige Constante, $b = -\frac{1}{a}$ und λ, μ, ν von a unabhängige Constanten sind. Eliminirt man nun aus diesen Gleichungen P_4^2, P_5^2, $P_4.P_5$, P_4, P_5, so erhält man eine homogene Gleichung fünften Grades für P_1, P_2, P_3 von der Form

$$0 = P_1^5 + P_3^5 + a^5 P_2^5 + P_3^2 P_1^2 P_2 \left(3a^2 + \frac{1}{a^3}\right) - P_2^3 P_1 P_3 (2a + a^6).$$

In ähnlicher Weise ergeben sich analoge Gleichungen fünften Grades für je drei andere der fünf Functionen. Diese Gleichung fünften Grades wird nun auf die Curve fünfter Ordnung von Clebsch angewendet, und es wird gezeigt, dass diese Curve der Durchschnitt zweier Flächen dritter Ordnung ist, die einen gemeinsamen Kegel haben. M.

Ch. Hermite. Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. C. R. XCIII. 920-925, 1098-1103.

Fortsetzungen der Abhandlungen in den Bänden LXXXV. bis XCII. der C. R. (s. F. d. M. IX. 1877. 349flg.). Sie betreffen die Lösung der Lamé'schen Gleichung für den Fall $n = 2$. Es ergeben sich zu den drei früheren Lösungen noch zwei neue, welche doppelt-periodische Functionen mit der Periodicität von $\text{sn}^2 x$ sind. Im Folgenden wird diese Theorie angewendet auf die Theorie des conischen Pendels oder der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugel. Es ergeben sich u. a. die von Herrn Tissot (Liouville J. XVII. 88) gefundenen Resultate auf einem anderen Wege. M.

M. Ungar. Zur Reduction Abel'scher auf elliptische Integrale. Wien. Ber. LXXXIII. 759-790.

In den letzten Jahren hat Herr Königsberger mehrfache Untersuchungen allgemeiner Natur über die Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische und hyperelliptische veröffentlicht (Crelle J. LXXXV, LXXXVI. und Math. Ann. XVI.; s. F. d. M. X-XII). Im Anschluss daran wird im Vorliegenden die Frage specieller

gestellt. Es werden nämlich solche Abel'sche Integrale betrachtet, deren Irrationalitäten m^{te} Wurzeln sind, doch wird der Wurzelexponent als beliebige ganze Zahl, nicht blos als Primzahl, vorausgesetzt. Zunächst wird der Zusammenhang des Problems mit der complexen Multiplication der elliptischen Integrale nachgewiesen. Es ergiebt sich das Resultat, dass sich die Zahlen m, für welche die Reduction möglich ist, durch Auflösung eines Systems von Gleichungen wirklich finden lassen. Ferner können auch für jedes bestimmte m die elliptischen Integrale, auf welche die Reduction führt, aufgestellt und die in die Relation eintretenden Fundamentalintegrale angegeben werden. In vielen Fällen lassen sich nun auch, wie schliesslich gezeigt wird, die hinreichenden Bedingungen angeben, unter denen die Reduction stattfindet. M.

C. W. Borchardt. Sur deux algorithmes analogues à celui de la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments. Chelini, Coll. Math. 206-212.

Während der Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels, den der Verfasser in Borchardt J. LVIII. behandelt hat, durch die Gleichungen

$$m_1 = \frac{m+n}{2}, \quad n_1 = \sqrt{mn}$$

gegeben ist, sind die beiden Algorithmen, welche hier nach derselben Methode untersucht werden, bestimmt durch die resp. Gleichungssysteme:

$$(1)\quad \begin{cases} m_1 = \dfrac{m+n}{2}, & n_1 = \sqrt{m_1 n}, \\ m_2 = \dfrac{m_1+n_1}{2}, & n_2 = \sqrt{m_2 n_1}, \\ \dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

und

$$(2)\quad \begin{cases} m_1 = \dfrac{m+n_1}{2}, & n_1 = \sqrt{mn}, \\ m_2 = \dfrac{m_1+n_2}{2}, & n_2 = \sqrt{m_1 n_1}, \\ \dots\dots\dots\dots. \end{cases}$$

Die gemeinschaftliche Grenze von m_i und n_i für wachsende Werte von i wird auch hier durch eine Differentialgleichung erster Ordnung gefunden. M.

F. Brioschi. La relazione di Göpel per funzioni iperellittiche d'ordine qualunque. Brioschi Ann. (2) X. 161-173.

Die Göpel'sche Relation zwischen vier Thetafunctionen mit zwei Variablen ist neuerdings in den Arbeiten von Borchardt und Herrn Cayley (Borchardt J. LXXXIII. Ref. F. d. M. IX. 1877. 562 und 567) im Zusammenhange mit der Kummer'schen untersucht worden. In der vorliegenden Note giebt der Herr Verfasser zunächst eine Erweiterung dieser Relation, indem er sie auf hyperelliptische Functionen beliebiger Ordnung ausdehnt, und wendet dann seine Betrachtungen auch auf den speciellen Fall an, wodurch er im Wesentlichen auf die Resultate der oben genannten Arbeiten zurückgeführt wird. Es wird deshalb genügen, den ersten Teil der Arbeit zu besprechen. Setzt man

$$R(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2n+1}),$$
$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n),$$
$$Q(x) = A(x-a_{n+1})(x-a_{n+2})\dots(x-a_{2n+1}),$$
$$\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

und

$$l_m = P(a_m)-Q(a_m), \quad (m = 1,2,3\dots, 2n+1),$$

so sind die Ausdrücke:

$$p_m = \sqrt{\frac{\varphi(a_m)}{l_m}}$$

und

$$p_{r,s} = p_{s,r} = p_r \cdot p_s \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sqrt{R_{x_i}}}{(x_i-a_r)(x_i-a_s)\varphi'(x_i)}$$

nach den Untersuchungen des Herrn Weierstrass darstellbar als Quotienten zweier ϑ-Functionen mit n Argumenten, welche alle gleiche Nenner haben. Bezeichnet man dann n beliebige aus der Reihe $1, 2,\dots (2n+1)$ herausgegriffene, von einander verschiedene Zahlen mit $r_1, r_2,\dots r_n$, sind ferner μ und ν zwei andere Zahlen derselben Reihe, und ist

$$S(x) = (x-a_{r_1})(x-a_{r_2})\ldots(x-a_{r_n}),$$

so ist

$$Ap_\mu^2 = \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S(a_\mu)} - \sum_{r=r_1}^{r=r_n} l_r \frac{p_{r,\mu}^2}{S'(a_r)},$$

$$\frac{l_\nu}{S(a_2)} p_{\nu,\mu}^2 = \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu(a_\mu-a_\nu)S(a_\mu)} - \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu}^2}{(a_\nu-a_r)S'(a_r)},$$

$$A p_\mu p_\nu = -\sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu} p_{r,\nu}}{S'(a_r)}.$$

Die ersten beiden dieser Relationen rühren von Herrn Weierstrass, die letzte von Herrn Brioschi selbst her.

Aus diesen entwickelt der Herr Verfasser nun die Relation

$$0 = -\frac{(a_\mu-a_\nu)^2 l_\mu l_\nu}{S(a_\mu)S(a_\nu)} H^2 + (a_\mu-a_\nu)MHG + M^2 F,$$

wo

$$M = \frac{R'(a_\nu)}{S^2(a_\nu)} + \frac{R'(a_\mu)}{S^2(a_\mu)},$$

$$H = \frac{R'(a_\nu)}{l_\nu S(a_\nu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu}^2}{(a_\nu-a_r)S^3(a_r)} + \frac{R'(a_\mu)}{l_\mu S'(a_\mu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\nu}^2}{(a_\mu-a_r)S'(a_r)},$$

$$G = \frac{l_\mu}{S(a_\mu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\mu-a_r)l_r}{(a_\nu-a_r)S'(a_r)} p_{r,\mu}^2 - \frac{l_\nu}{S(a_\nu)} \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\nu-a_r)l_r}{(a_\mu-a_r)S'(a_r)} p_{r,\nu}^2,$$

$$F = \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\mu-a_r)l_r}{(a_\nu-a_r)S'(a_r)} p_{r,\mu}^2 \cdot \sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{(a_\nu-a_r)l_r}{(a_\mu-a_r)S'(a_r)} p_{r,\nu}^2 - \left[\sum_{r=r_1}^{r=r_n} \frac{l_r p_{r,\mu} p_{r,\nu}}{S'(a_r)}\right]^2.$$

Die Relation ist vom vierten Grade und homogen; sie enthält die vierten Potenzen der $p_{r,\mu}$ und $p_{r,\nu}$, die Producte der Quadrate derselben Functionen und die Producte zu vier der Functionen $p_{r_1,\mu}$, $p_{r_1,\nu}$, $p_{r_2,\mu}$, $p_{r_2,\nu}$ etc. Für $n = 2$ erhält man daraus die Göpel'sche Relation. A.

W. R. W. Roberts. On the periods of the first class of hyperelliptic integrals. Lond. M. S. Proc. XII. 37-45. Dublin Trans. 1881.

Herleitung der linearen Relationen zwischen den vollständigen hyperelliptischen Integralen erster Gattung in bekannter Weise.

H. St.

M. Krause. Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation dritten Grades. Klein Ann. XIX. 103-109.

Herr Königsberger hat (Clebsch Ann. I. 161; s. F. d. M. II. 1869. und 1870. 254) Relationen zwischen den für die Nullwerte der Argumente genommenen Theta-Functionen hergeleitet, welche nur der Form nach der Modulargleichung dritter Ordnung für die elliptischen Functionen analog sind. Um die wahren Modulargleichungen zu finden, müssen Gleichungen zwischen den ursprünglichen und den transformirten Moduln aufgestellt werden. Eine Reihe solcher Modulargleichungen wird im Vorliegenden hergeleitet. Als Moduln werden nicht die von Rosenhain oder Richelot eingeführten gewählt, sondern diejenigen, welche aus den vier Theta-Functionen ϑ_5, ϑ_{23}, ϑ_4, ϑ_{01} entspringen, zwischen denen eine Göpel'sche biquadratische Relation besteht. Es werden Gleichungen zwischen den genannten vier Functionen und den entsprechenden transformirten Functionen θ_5, θ_{23}, θ_4, θ_{01} gewonnen. Die Methode besteht darin, dass die Transformation zweiter Ordnung angewendet wird auf die folgenden Gleichungen:

$$\vartheta_{34}\theta_{34}+\vartheta_{03}\theta_{03}+\vartheta_{23}\theta_{23} = \vartheta_5\theta_5; \quad \vartheta_2\theta_2+\vartheta_4\,\theta_4\,+\vartheta_0\,\theta_0\, = \vartheta_5\theta_5;$$
$$\vartheta_4\,\theta_4\,\pm\vartheta_{14}\theta_{14}+\vartheta_{34}\theta_{34} = \vartheta_5\theta_5; \quad \vartheta_0\theta_0+\vartheta_{03}\theta_{03}+\vartheta_{01}\theta_{01} = \vartheta_5\theta_5;$$
$$\vartheta_{01}\theta_{01}\pm\vartheta_{14}\theta_{14}+\vartheta_{12}\theta_{12} = \vartheta_5\theta_5; \quad \vartheta_2\theta_2+\vartheta_{12}\theta_{12}+\vartheta_{23}\theta_{23} = \vartheta_5\theta_5,$$

von denen auch Herr Königsberger ausgegangen ist. Die Theorie der linearen Transformation liefert dann aus den oben genannten acht Grössen ϑ_5, ϑ_{23}, ϑ_4, ϑ_{01}; θ_5, θ_{23}, θ_4, θ_{01} Gleichungen zwischen je acht beliebigen Thetafunctionen dieser Art.

M.

M. Krause. Ueber die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Klein Ann. XIX. 423-428.

Der Herr Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, die Theorie der Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für den Fall, wo der Transformationsgrad eine ungrade Primzahl ist, so zu entwickeln, dass die gewonnenen Gleichungen eine naturgemässe Verallgemeinerung der von Legendre, Jacobi, Hermite, Schröter u. a. in die elliptischen Functionen eingeführten Gleichungen bilden. Auch soll die Methode von der Substitutionstheorie, welche Herr C. Jordan angewendet hat, ganz unabhängig sein. Als Moduln werden wieder die schon in der obigen Arbeit benutzten, aus den Thetafunctionen ϑ_5, ϑ_{23}, ϑ_4, ϑ_{01} entspringenden, zu Grunde gelegt. Der Herr Verfasser findet für die repräsentirenden φ-Functionen $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$, wo $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ die Moduln der ursprünglichen Thetafunctionen und $\varepsilon = 23, 4, 01$ ist, den für die Theorie fundamentalen Satz: „Sämmtliche Potenzsummen

$$\sum_i \varphi(\tau_{11}^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}, \tau_{22}^{(i)})_\varepsilon^\alpha$$

sind rationale Functionen der Grössen

$$\frac{\vartheta\left(\frac{m+m_1\tau_{11}+m_2\tau_{12}}{n}, \frac{m'+m_1\tau_{21}+m_2\tau_{22}}{n}\right)_\varepsilon}{\vartheta\left(\frac{m+m_1\tau_{11}+m_2\tau_{12}}{n}, \frac{m'+m_1\tau_{21}+m_2\tau_{22}}{n}\right)_5}.$$

Dieselben bleiben für eine jede lineare Transformation ungeändert, für welche die Functionen $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$ ungeändert bleiben.“ M.

H. Poincaré. Sur une fonction analogue aux fonctions modulaires. C. R. XCIII. 138-140.

Es sei die lineare Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left[\sum_{i=0}^{i=n} \frac{B_i}{x-a_i} - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{(x-a_i)^2}\right] y$$

gegeben und über die B und a so verfügt, dass $x = \infty$ nicht

ein singulärer Punkt ist; ferner sei, was durch eine lineare Substitution für x stets erreicht werden kann, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Man ziehe nun von a_0 nach $a_1, a_2, \dots a_n$ einander nicht schneidende Linien $\varphi_1, \dots \varphi_n$, und lasse x von a_0 längs φ_1 nach a_1 fortschreiten, dann um a_1 herum längs derselben Linie nach a_0 zurückkehren, darauf längs φ_2 nach a_2 und längs derselben Linie wieder nach a_0 gehen u. s. f. In den Lagen

$$a_0, a_1, a_0, a_2, a_0, a_3, \dots a_0, a_n, a_0$$

möge die Function z, die das Verhältnis zweier Integrale von (1) darstellt, resp. die Werte

$$\beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \beta_3, \alpha_3, \dots \beta_n, \alpha_n, \beta_1$$

annehmen. Dann besteht zwischen den α und β die Beziehung

$$(2) \quad (\beta_1-\alpha_1)(\beta_2-\alpha_2)\dots(\beta_n-\alpha_n) = (\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_3)\dots(\alpha_n-\beta_1).$$

Betrachtet man nun die a und B der Gleichung (1) nicht als Constanten, so dass α und β Functionen von den a und B sind, und kehrt diese Functionen um, indem man setzt:

$$a_i = \varphi_i(\alpha_1, \beta_1, \dots \alpha_n, \beta_n), \quad B_i = \psi_i(\alpha_1, \beta_1, \dots \alpha_n, \beta_n),$$

so sind die φ und ψ stets eindeutige und meromorphe Functionen der durch die Relation (2) verknüpften Variablen α und β. Dieses System eindeutiger Functionen steht zu den Integralen der Gleichung (1) in einem analogen Verhältnis wie die Modulfunctionen zu den elliptischen Integralen. An die Functionen φ und ψ knüpft dann der Verfasser noch eine Reihe von Bemerkungen betreffs ihrer Eigenschaft, unverändert zu bleiben, wenn die α und β gewissen (und zwar unendlich vielen) Transformationen unterworfen werden. Hr.

E. Picard. Sur une courbe particulière du troisième genre et sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes. C. R. XCIII. 835-838.

Die Perioden der drei Normalintegrale erster Gattung bezüglich der Gleichung

$$v^3 = u(u-1)(u-x)(u-y),$$

worin x und y beliebige Constanten bezeichnen, hängen nur ab von den beiden Verhältnissen $w' : w$ und $w'' : w$, wo w, w', w'' von der Form

$$\int_g^h u^{-\frac{1}{2}}(u-1)^{-\frac{1}{2}}(u-x)^{-\frac{1}{2}}(u-y)^{-\frac{1}{2}}\,du$$

sind, und wo g, h zwei der Grössen $0, 1, y, x, \infty$ bedeuten. Mit diesen Verhältnissen sind demnach auch die Coefficienten der zum Geschlecht 3 gehörigen Normalgleichung bestimmt. Da aber x und y mit diesen Coefficienten algebraisch verknüpft sind, so folgt, dass, wenn man $w' : w = u$, $w'' : w = v$ setzt und die w als Functionen von x und y betrachtet, die letzteren Variablen Wurzeln algebraischer Gleichungen sind, deren Coefficienten eindeutige Functionen von u und v sind, die durch eine Gruppe von linearen Transformationen der Form

$$\frac{m'+n'u+p'v}{m+nu+pv}, \quad \frac{m''+n''u+p''v}{m+nu+pv}$$

ungeändert bleiben. Hr.

E. Picard. Sur les expressions des coordonnées d'une courbe algébrique par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre. C. R. XCII. 1332-1335.

Nach einem Satze des Herrn Poincaré existirt zwischen zwei Fuchs'schen Functionen derselben Gruppe stets eine algebraische Beziehung. Für die umgekehrte Aufgabe, die algebraische Gleichung $F(u, v) = 0$ durch Fuchs'sche Functionen desselben Parameters aufzulösen, giebt der Verfasser folgenden Weg an: Es sei $\int \frac{f(u, v)}{F'_v(u, v)}\,du$ ein Abel'sches Integral erster Gattung. Sind nun u und v zwei durch die Gleichung $F(u, v) = 0$ verknüpfte meromorphe Functionen einer Variablen z in einem gewissen Gebiete der z-Ebene, so ist

$$G(z) = \frac{f(u, v)\frac{du}{dz}}{F'_v(u, v)}$$

in demselben Gebiete eindeutig und continuirlich, und es gilt für irgend eine Substitution der Fuchs'schen Gruppe die Gleichung

$$G\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2\, G(z).$$

Ist n die Anzahl der Nullpunkte von $G(z)$ in einem Fundamentalpolygon, so zeigt man, dass $G(z)$ die Form hat:

$$G(z) = A_0\, G_0(z) + A_1\, G_1(z) \cdots + A_n G_n(z),$$

wo die A Constanten und $G_0, \dots G_n$ $n+1$ linear unabhängige durch die angegebenen Relationen charakterisirte Functionen sind. Für $p \geqq 3$ (p das Geschlecht von $F(u,v) = 0$) schlägt man alsdann folgenden Weg ein: Es sei z. B. $p = 3$, dann erhält man den drei Abel'schen Integralen erster Gattung entsprechend:

$$\frac{f_1(u,v)}{F'_v(u,v)}\frac{du}{dz} = \sum_0^n A_i G_i(z), \quad \frac{f_2(u,v)}{F'_v(u,v)}\frac{du}{dz} = \sum_0^n B_i G_i(z),$$

$$\frac{f_3(u,v)}{F'_v(u,v)}\frac{du}{dz} = \sum_0^n C_i G_i(z)$$

und hieraus:

$$\frac{f_2(u,v)}{f_1(u,v)} = \frac{\Sigma B_i G_i}{\Sigma A_i G_i} = \lambda, \quad \frac{f_3(u,v)}{f_1(u,v)} = \frac{\Sigma C_i G_i}{\Sigma A_i G_i} = \mu.$$

Eliminirt man u und v aus diesen Gleichungen in Verbindung mit $F(u,v) = 0$, so erhält man eine Gleichung zwischen λ und μ. Da λ und μ aber Fuchs'sche Functionen sind, so besteht zwischen ihnen eine algebraische Gleichung. Man muss demnach die A, B, C so bestimmen können, dass diese beiden Gleichungen coincidiren. u und v lassen sich alsdann im Allgemeinen als rationale Functionen von λ und μ, also von Fuchs'schen Functionen ausdrücken. Der Fall $p = 2$ erfordert eine besondere Behandlung, auf die wir hier nicht näher eingehen.

Hr.

H. Poincaré. Sur les fonctions abéliennes. C. R. XCII. 958-960.

1. Die p Gleichungen

$$\begin{aligned} &\theta(x_1+\lambda_{1,1}, \dots x_p+\lambda_{p,1}) = 0,\\ &\quad\vdots \\ &\theta(x_1+\lambda_{1,p} \dots x_p+\lambda_{pp}) = 0 \end{aligned}$$

haben $1.2\ldots p$ gemeinsame Lösungen, abgesehen von der Hinzufügung der Perioden. Bei allgemeinem θ kann man die λ nicht so wählen, dass die Lösungen aufhören verschieden zu sein. Entspringt aber θ aus einem System Abel'scher Integrale, so lässt sich die Bedingung angeben, unter der λ von der erwähnten Eigenschaft existiren.

2. Herr Picard hat gezeigt, dass die Abel'schen Functionen sich in gewissen Fällen auf elliptische zurückführen lassen. Der Verfasser giebt ein Beispiel von der Reduction Abel'scher Functionen auf Abel'sche Functionen mit einer geringeren Anzahl von Variablen, wodurch zugleich eine gewisse Anomalie erklärt wird.

3. Herr Appell substituirt in einer Abel'schen Function $F(u_1, \ldots u_p)$ an Stelle von u_i das Abel'sche Integral $u^i(x, y)$ und zeigt, dass dann F sich in einfache Elemente von der Form

$$a \frac{d}{du_x} \, l\,\theta[u^i(x, y) + G_i]$$

zerlegt. Dies lässt sich für $p = 2$ in folgender Weise verallgemeinern: u_1 und u_2 seien durch die Relation

$$\theta(u_1+\lambda_1, \, u_2+\lambda_2) = 0$$

verbunden, dann zerlegt sich $F(u_1, u_2)$ in Elemente von der Form

$$A \frac{d}{du_1} \, l\,\theta(u_1+g_1, \, u_2+g_2)$$

oder

$$a' \frac{d}{du_2} \, l\,\theta(u_1+g'_1, \, u_2+g'_2).$$

Hr.

E. Picard. Sur une classe d'intégrales abéliennes et sur certaines équations différentielles. C. R. XCII. 398-402.

E. Picard. Sur l'intégration algébrique d'une équation analogue à l'équation d'Euler. C. R. XCII. 506-510.

E. Picard. Sur la réduction des intégrales abéliennes. C. R. XCIII. 696-699.

E. Picard. Sur quelques exemples de réduction d'intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques.
C. R. XCIII. 1126-1128.

Zwischen der Reduction der Abel'schen Integrale auf elliptische Integrale und der algebraischen Integration gewisser Differentialgleichungen besteht folgender Zusammenhang: „Ist $f(x, y) = 0$ eine algebraische Gleichung vom Geschlecht p, und existirt ein Abel'sches Integral erster Gattung $\int \frac{F(x, y)\,dx}{f'_y(x, y)}$, das nur zwei Perioden hat, so ist das allgemeine Integral der totalen Differentialgleichung

$$\frac{F(x_1, y_1)\,dx_1}{f'_{y_1}(x_1, y_1)} + \cdots + \frac{F(x_p, y_p)}{f'_{y_p}(x_p, y_p)}\,dx_p = 0$$

algebraisch." Dieser Satz lässt eine vollständige Umkehrung zu. Er wird dann noch in folgender Weise verallgemeinert. Haben zwei Abel'sche Integrale erster Gattung

$$\int \frac{F(x, y)\,dx}{f'_y(x, y)}, \quad \int \frac{F_1(x, y)\,dx}{f'_y(x, y)}$$

nicht mehr als vier Perioden, so sind die beiden simultanen totalen Differentialgleichungen

$$\frac{F_i(x_1, y_1)\,dx_1}{f'_{y_1}(x_1, y_1)} + \cdots + \frac{F_i(x_p, y_p)\,dx_p}{f'_{y_p}(x_p, y_p)} = 0, \qquad (i = 1, 2)$$

algebraisch integrirbar; ferner lassen sich die beiden Gleichungen

$$\int_a^{x_1} \frac{F_i(x_1, y_1)\,dx_1}{f'_{y_1}(x_1, y_1)} + \int_a^{x_2} \frac{F_i(x_2, y_2)\,dx_2}{f'_{y_2}(x_2, y_2)} = u_i \quad (i = 1, 2)$$

in der Weise umkehren, dass $x_1 + x_2$ und $x_1 . x_2$ Wurzeln algebraischer Gleichungen sind, deren Coefficienten eindeutige Functionen von u_1 und u_2 sind.

Ausführlich untersucht wird der Fall der Reduction eines Abel'schen Integrals vom Geschlecht 2 auf ein elliptisches Integral und die Frage gelöst, wie in der Gleichung

$$y^2 = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x) = R(x)$$

$\varkappa$, λ und μ passend gewählt werden müssen, damit die Gleichung

$$\frac{f(x_1)\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{f(x_2)\,dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = 0$$

allgemein algebraisch integrirbar sei. Hierbei ergeben sich für $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 Ausdrücke, die von zwei willkürlichen Grössen und einer beliebigen ganzen Zahl D abhängen. Für ein gegebenes D besteht zwischen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 stets eine algebraische Relation. Ein ferneres bemerkenswertes Resultat ist, dass, wenn ein Integral erster Gattung mit nur zwei Perioden existirt, es notwendig noch ein zweites der Art giebt.

In der zuletzt citirten Arbeit werden Beispiele angeführt, wo nicht nur zwei, sondern unendlich viele Integrale erster Gattung mit nur zwei Perioden existiren, während die zugehörige algebraische Gleichung zum Geschlecht 2 gehört. Hr.

Christoffel. Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung. Brioschi Ann. (2) X. 81-101.

Im Anschluss an die Abhandlung: „Ueber die canonische Form der Riemann'schen Integrale erster Gattung" Brioschi Ann. (2) IX. 240-301 (F. d. M. XI. 1879. 317) giebt der Verfasser einen rein algebraischen Beweis des Satzes, dass die Anzahl der linear unabhängigen zu der irreductiblen Gleichung $F(\overset{n}{s}\,\overset{m}{z}) = 0$ gehörigen Integrale erster Gattung gleich $(m-1)(n-1)-r = p$ ist. Jede algebraische, wie die Fläche T verzweigte Function b von z lässt sich durch (s, z) ausdrücken in der Form:

$$(1)\qquad b = \psi(s\,z) = U + U_1 s + \cdots + U_{n-1} s^{n-1},$$

wo die Coefficienten U rationale Functionen von z sind. Bedeuten $s_1, s_2, \dots s_n$ die zu z gehörigen Werte von s und $b_1, b_2, \dots b_n$ die entsprechenden Werte von b, so nimmt die Function (1) mit Benutzung dieser Werte nach der Interpolationsformel von Lagrange die Form an:

$$(2)\qquad b = \psi(s\,z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{F'(s_i)} \cdot \frac{F(s\,z)}{s - s_i}.$$

Es soll nun diese Function so bestimmt werden, dass

$$u = \int b\,dz = \int \psi(s\,z)\,dz$$

ein Integral erster Gattung wird. Benutzt man für die r Doppelpunkte und die ω Verzweigungspunkte die nämliche Bezeichnung $(sz) = (\alpha_i \beta_i)$ und definirt die $\omega + r$ Grössen A_i durch die Gleichungen $\lim(z-\beta_i).\psi(sz) = A_i \cdot \frac{F(s\beta_i)}{s-\alpha_i}$ für $z = \beta_i$, so zeigt sich, dass jeder Integrand erster Gattung die Form haben muss:

$$(3) \qquad \psi(sz) = \sum_{i=1}^{\omega+r} A_i T_i(sz) = \Sigma A_i \frac{F(s\beta_i)}{(s-\alpha_i).(z-\beta_i)}.$$

Aber es ist nicht jeder Ausdruck dieser Form ein Integrand erster Gattung, sondern es sind hierzu zwischen den Constanten A_i die Bedingungen

$$(4) \qquad \sum_i A_i \alpha_i^\nu \beta_i^\mu = 0 \qquad \text{für} \begin{pmatrix} \nu = 0, 1 \ldots n-2, \\ \mu = 0, 1 \ldots m \end{pmatrix}$$

erforderlich und hinreichend. Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

I. „Ist die Gleichung $F(sz) = 0$ irreductibel, so sind die $\omega + r - p$ Gleichungen (4) von einander unabhängig, und mit Benutzung derselben ist jeder Integrand erster Gattung in der Form (3) darstellbar. Die Anzahl der linear unabhängigen Integranden erster Gattung ist in allen Fällen gleich p, speciell gleich 0 für $p = 0$."

II. „Enthält das System (4) $k-1$ überzählige Gleichungen und ist die Discriminante D von F nicht identisch Null, so zerfällt F in k ungleiche irreductible Factoren."

Ueberträgt man dies auf die Form (2) von b, so erhält man für den Integranden erster Gattung die Riemann'sche Form

$$b = \frac{\varphi(\overset{n-2}{s}\ \overset{m-2}{z})}{F's}$$

mit der Bedingung, dass $\varphi(sz)$ in den r Doppelpunkten $(\gamma_\varrho, \delta_\varrho)$ verschwinde, dass also

$$(5) \qquad \varphi(\gamma_\varrho, \delta_\varrho) = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots r).$$

Die obigen Sätze gehen über in folgende:

III. „Ist die Gleichung $F = 0$ irreductibel, so ist die Anzahl r

und die Lage der Doppelpunkte $(\gamma\delta)$ eine solche, dass unter den r Gleichungen (5) sich keine überzählige findet."

IV. „Enthält das System (5) vermöge der Anzahl r und der Lage der Doppelpunkte überzählige Gleichungen, und ist die Anzahl derselben gleich $k-1$, so zerfällt F in k ungleiche irreductible Factoren, vorausgesetzt, dass seine Discriminante nicht identisch Null ist."

Auf diesen Sätzen endlich beruht die Bildung der Integrale dritter und zweiter Gattung für jedes p, auch für $p=0$. Ist wieder $(\alpha_i\beta_i)$ ein Verzweigungspunkt oder Doppelpunkt und ε ein beliebiger Punkt der Fläche T mit den Coordinaten $(\sigma\zeta)$, bildet man ferner die Function

$$\mathfrak{A}(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{\omega+r}A_i(\varepsilon)\cdot\frac{F(s\,\beta_i)}{(s-\alpha_i).(z-\beta_i)}-\frac{1}{F'(\sigma)}\cdot\frac{F(s\zeta)}{(s-\sigma).(z-\zeta)},$$

wo die $\omega+r$ Constanten $A_i(\varepsilon)$ an die $\omega+r-p$ Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{\omega+r}A_i(\varepsilon)\alpha_i^\nu\beta_i^\mu=\frac{\sigma^\nu\zeta^\mu}{F'(\sigma)}\qquad\begin{pmatrix}\nu=0,1\ldots n-2\\ \mu=0,1\ldots m\end{pmatrix}$$

gebunden sind, so erhält man aus der Integralfunction

$$R(\varepsilon)=\int\mathfrak{A}(\varepsilon)dz$$

die Riemann'schen Integrale dritter und vierter Gattung in der Form

$$\varpi_{\varepsilon_1\varepsilon_2}=R(\varepsilon_1)-R(\varepsilon_2),\qquad t_\varepsilon=\frac{dR(\varepsilon)}{d\zeta}.$$

H. St.

P. Appell. Sur une classe de fonctions dont les logarithmes sont les sommes d'intégrales abéliennes de première et de troisième espèce. C. R. XCII. 960-962.

In einer früheren Abhandlung (C. R. XCI. p. 972) hat der Verfasser eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, deren Coefficienten rationale Functionen der beiden durch eine algebraische Gleichung $F(xy)=0$ vom Geschlecht p verbundenen Variablen x

und y sind, integrirt durch einen Ausdruck der Form

$$\Phi(xy) = e^{\Sigma\lambda_i u_i} \cdot \frac{\theta(u_i(xy) - k_i - g_i)}{\theta(u_i(xy) - k_i)} \cdot R(xy) \qquad (i = 1, 2 \,..\, p),$$

in dem $R(xy)$ eine rationale Function von (x, y), u_i die p Abel'schen Normalintegrale 1[ter] Gattung, k_i, g_i und λ_i Constante bezeichnen. Die p Constanten k_i sind willkürlich, die $2p$ Constanten g_i und λ_i aber bestimmt durch die Factoren, welche $\Phi(xy)$ beim Ueberschreiten der $2p$ Querschnitte der zu $F(xy) = 0$ gehörigen Riemann'schen Verzweigungsfläche annimmt. Der Verfasser zeigt nun, dass sich ebenso wie bei den Integralen 3[ter] Gattung die Function $\Phi(xy)$ zerlegen lässt in Functionen der Form

$$F(xy; \xi\eta) = A \cdot e^{\Sigma\lambda_i u_i} \cdot \frac{\theta(u_i(xy) - u_i(\xi\eta) + h_i - g_i)}{\theta(u_i(xy) - u_i(\xi\eta) + h_i)},$$

wo

$$h_i = C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u_i(x_k y_k).$$

Hier sind die $(p-1)$ Punkte $(x_k y_k)$ ganz willkürlich; der Punkt $(\xi\eta)$ aber ist einer der Punkte, für welche die Function $\Phi(xy)$ unendlich wird. In dem Falle, wo die Constanten g_i gleich 0 sind, tritt an Stelle der obigen Function $F(xy; \xi\eta)$ die Function

$$A \,.\, e^{\Sigma\lambda_i u_i} \,.\, Z(\xi\eta),$$

in der $Z(\xi\eta)$ das Abel'sche Normalintegral 2[ter] Gattung ist, das im Punkte $(\xi\eta)$ in 1[ter] Ordnung unendlich wird. H. St.

Th. Craig. Note on Abel's theorem. Lond. M. S., Proc. XIII. 89-92.

Der bekannte Beweis des Abel'schen Theorems nach Riemann durch das Integral $\int \log f \,.\, d\omega = 0$.

H. St.

A. R. Forsyth. Memoir on the thetafunctions particularly those of two variables. Lond. R. S. Proc. XXXIII. 206-210.

Auszug aus einer Abhandlung, welche in den Trans. of Lond. gedruckt werden wird; der Inhalt derselben wird hier vollständig dargestellt. Abschnitt I behandelt Rosenhain's Theorie, wie sie hier genannt wird; Zweck desselben ist, auf allgemeinerer Grundlage und in leichterer Weise die Resultate zu erhalten, welche sich in Rosenhain's bekannter Abhandlung finden. Geht man von der folgenden Definition der allgemeinen doppelten Thetafunction aus:

$$(1) \qquad \Phi\binom{\lambda,\, \varrho}{\mu,\, \nu}(x, y) =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (-1)^{m\lambda+\nu\varrho}\, p^{\frac{1}{4}(2m+\mu)^2}\, q^{\frac{1}{4}(2n+\nu)^2}\, r^{\frac{1}{2}(2m+\mu)(2n+\nu)}\, \varrho^{(2m+\mu)\frac{i\pi x}{2K}+(2n+\nu)\frac{i\pi y}{2\Lambda}}$$

und bezeichnet das Product von vier Functionen, in denen die charakteristischen Zahlen und die Variabeln die resp. Indices 1, 2, 3, 4 haben, mit

$$\Pi\Phi\binom{\lambda,\, \varrho}{\mu,\, \nu}(x, y),$$

so ergiebt sich mit Hülfe der Resultate, welche Herr Prof. H. J. S. Smith in seiner Abhandlung über die einfachen Thetafunctionen (Proc. L. M. S. I.) erhalten hat, ein Ausdruck für das Product

$$4\Pi\Phi\binom{\lambda,\, \varrho}{\mu,\, \nu}(x, y)$$

als Summe von sechzehn gleichen Producten

$$\Pi\Phi\binom{\Lambda,\, P}{M,\, N}(X, Y);$$

und die resultirende Gleichung umfasst, 16^3, also 4096 Fälle.

Die 4-fache Periodicität wird gleich zu Anfang des Abschnittes untersucht, und es werden hernach die Perioden als bestimmte Integrale von der Form

$$K = \int_0^1 \frac{(A+Bx)dx}{\sqrt{X}},$$

wo $X = x(1-x)(1-k_1^2x)(1-k_2^2x)(1-k_3^2x)$ ist, dargestellt. Auch wird gezeigt, dass diese K einer linearen Differentialgleichung genügen, die in Bezug auf die Grössen k_1, k_2, k_3 von der 4ten Ordnung ist.

Abschnitt II giebt die Entwickelungen aller Functionen (1) in trigonometrische Reihen (2) nach steigenden Potenzen von x und y. Durchgehends wird vielfach das Theorem

$$\Phi\binom{\lambda,\varrho}{\mu,\nu}(x,y) = e^{\frac{2K\Lambda\log r}{\pi^2}\cdot\frac{d^2}{dx\,dy}}\,\theta_{\mu,\lambda}(x)\,.\,\theta_{\nu,\varrho}(y)$$

angewendet, (wo $\theta_{\mu,\lambda}(x)$, $\theta_{\nu,\varrho}(y)$ einfache Thetafunctionen sind), das sich mit Hülfe der bekannten Werte der einfachen Thetafunctionen beweisen lässt. Daraus werden verschiedene Eigenschaften hergeleitet, so die Ausdrücke für die vier Paare von conjugirten Perioden, zwei wirklichen und zwei scheinbaren (α, β). Der Productensatz des Abschnitts I. wird durch den gleichen Productensatz für die einfachen Functionen, der von Prof. Smith l. c. gegeben wurde, gewonnen (γ). Mit Hülfe der Differentialgleichung, der die einfache Thetafunction genügt, wird gezeigt, dass die allgemeine Function Φ zwei Gleichungen in (x, y) von der Form

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} - 2x\left(k'^2 - \frac{E}{K}\right)\frac{d\Phi}{dx} + 2kk'^2\frac{d\Phi}{dk} = 0$$

genügt (δ). Für die bei der Entwickelung aller dieser Functionen nach Potenzen von x und y auftretenden Constanten werden die Werte ermittelt.

Abschnitt III giebt einen Ausdruck für das Additionstheorem. Es wird nämlich gezeigt, dass ein Ausdruck für

$$\Phi(x+\xi, y+\eta)\,.\,\Phi'(x-\xi, y-\eta)$$

erhalten werden kann, wo Φ und Φ' entweder dieselben oder verschiedene Functionen sind.

Im IV. Abschnitt werden verschiedene im Vorigen für die doppelten Thetafunctionen erhaltenen Eigenschaften für die r-fachen Thetafunctionen verallgemeinert. Cly. (M.).

Elliot. Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions θ. C. R. XCIII. 1008-1009.

Es werden in dieser Note ohne Beweis einige Haupteigen-

schaften einer Klasse von Functionen angegeben, die aus den Thetafunctionen auf folgende Weise entstehen. Sind $\overset{(1)}{u}, \overset{(2)}{u}, \dots \overset{(p)}{u}$ die Normalintegrale erster Gattung in Bezug auf eine Gleichung

$$F(x, y) = 0,$$

$\overset{(h)}{w}$ ein Normalintegral zweiter Gattung mit dem Pol $(\overset{(h)}{\xi}, \overset{(h)}{\xi_1})$, $\overset{(k)}{v}$ ein Normalintegral dritter Gattung mit den Unendlichs $(\overset{(k)}{\xi}, \overset{(k)}{\xi_1})$, $(\overset{(k)}{\eta}, \overset{(k)}{\eta_1})$ und θ die bekannte Function der Argumente $\overset{(r)}{u}$, so wird

$$\theta_1 = \overset{(1)}{w}\,\theta + D_\xi^{(1)}\theta$$

gesetzt, wo das Symbol $D_\xi^{(1)}\theta$ die Ableitung der Function θ nach x ist und die Variabeln x und y durch $\overset{(1)}{\xi}, \overset{(1)}{\xi_1}$, aber nur in den Ableitungen der Integrale $\overset{(1)}{u}$ ersetzt werden sollen; ebenso

$$\theta_2 = \overset{(2)}{w}\,\theta_1 + D_\xi^{(2)}\theta_1, \text{ u. s. } f.$$

Endlich soll überall die Function θ durch die Function $\theta^{(q)}$ ersetzt werden, die der Herr Verfasser in einer früheren Note: Généralisation de deux théorèmes sur les fonctions θ (C. R. XC. 752; s. F. d. M. XII. 1880. 368) untersucht hat. Auf diese Weise gelangt man zu einer Function $\theta_{(r)}^{(q)}$, welche von der Variabeln x nur mittels der p Integrale $\overset{(i)}{u}$, der q Integrale $\overset{(k)}{v}$ und der r Integrale $\overset{(h)}{w}$ abhängt.

M.

B. Baillaud. Sur une formule générale pour le développement de la partie principale de la fonction perturbatrice. C. R. XCII. 694-696.

Einen allgemeinen Ausdruck für die Entwickelung der Störungsfunction hat Puiseux in Band L. der C. R. gegeben. Hier wird für die Entwickelung des Hauptteiles dieser Function, d. h. für den reciproken Wert der Entfernung der beiden Gestirne folgende Formel gegeben:

$$\frac{1}{\varDelta}\Sigma(-1)^{\varkappa+\varrho+\varrho_1-1}\theta_s(i\pm\xi)(i\mp\xi_1)[q-2\varrho+(i\pm\xi)]^{q-1}[q_1-2\varrho_1+(i\gamma\pm\xi)]^{q-1}$$
$$x\, e^{\eta} e_1^{\eta_1} b^{\beta} b_1^{\beta_1} c^{\nu} d^{\delta} d_1^{\delta_1} f^{\varphi} f_1^{\varphi_1} \frac{1}{a^{2k+1}} b_{k+\frac{1}{2}}^{(i)} . \cos[(q-2\varrho)M+(q_1-2\varrho_1)M_1$$
$$\pm(\xi M+\xi_1 M_1+\eta)-i(M-M_1+\varpi-\varpi_1)],$$

wo θ_s ein von i unabhängiger numerischer Coefficient ist, M und M_1 die mittleren Anomalien der beiden Gestirne sind und zwischen den ganzen positiven Zahlen $\beta, \beta_1, \gamma, \delta, \delta_1, \varphi, \varphi_1, \xi, \xi_1, \eta, \varrho, \varrho_1, l, l_1, m, m_1, n, n_1$ noch gewisse Bedingungsgleichungen bestehen.

M.

Ch. Hermite. Sur l'intégrale Eulérienne de seconde espèce. Kronecker J. XC. 332-338.

Herr Prym hat (Borchardt J. LXXX. 165; s. F. d. M. VIII. 1876. 303) die Function $\Gamma(x)$ durch die beiden einwertigen Functionen der complexen Variabeln x

$$P(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2!(x+2)} - \cdots$$

und

$$Q(x) = \int_1^{\infty} \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

wo

$$c_{\nu} = \frac{1}{\nu!} \int_1^{\infty} e^{-\xi}\, ln^{\nu}\, \xi \frac{d\xi}{\xi},$$

dargestellt, von denen die erste den Character einer echt gebrochenen rationalen Function und die zweite den Character einer ganzen Function hat. Nachdem Herr Hermite gezeigt, dass diese Darstellung unmittelbar aus der Gleichung

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \xi^{x-1}\, e^{-\xi} d\xi,$$

erstreckt auf den Fall, wo die Variable oder ihr reeller Teil wesentlich positiv ist, erhalten werden könne, betrachtet er die allgemeinen Functionen

$$\mathfrak{P}(x) = \int_0^{a} \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi, \quad \mathfrak{Q}(x) = \int_a^{\infty} \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi.$$

Die Entwickelung der ersteren

$$\mathfrak{P}(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{a}{x+1} + \frac{a^2}{2!(x+2)} - \cdots\right)a^x$$

ist bekannt; die analoge Darstellung der zweiten wird hier gegeben. Es wird erstens

$$\mathfrak{Q}(x) = P(1)R(x-1) + \frac{x-1}{1}P(2)R(x-2) + \frac{(x-1)(x-2)}{2!}P(3)R(x-3) + \cdots,$$

wo

$$R(x) = \frac{a^x}{e^a} + \frac{(a+1)^x}{e^{a+1}} + \frac{(a+2)^x}{e^{a+2}} + \cdots,$$

und zweitens

$$\mathfrak{Q}(x) = \mathfrak{P}(1)\mathfrak{R}(x-1) + \frac{x-1}{1}\mathfrak{P}(2)\mathfrak{R}(x-2) + \frac{(x-1)(x-2)}{2!}\mathfrak{P}(3)\mathfrak{R}(x-3) + \cdots,$$

wo

$$\mathfrak{R}(x) = \frac{a^x}{e^a} + \frac{(2a)^x}{e^{2a}} + \frac{(3a)^x}{e^{3a}} + \cdots$$

und die Coefficienten $\mathfrak{P}$ aus den Gleichungen

$$\mathfrak{P}(x+1) = x\mathfrak{P}(x) - \frac{e^{ax}}{a}, \quad \mathfrak{P}(1) = 1 - \frac{1}{e^a}$$

successiv sich ergeben. Zugleich wird auf die damit zusammenhängende Arbeit des Herrn Bourguet: Développement en série des intégrales Eulériennes, Paris, verwiesen. M.

P. Appell. Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Eulériennes. Klein Ann. XIX. 84-102.

Einen Auszug aus dieser Abhandlung hat der Herr Verfasser in drei Artikeln der C. R. LXXXVI. 953, LXXXIX. 841 und 1031 mitgeteilt. Man sehe die Referate F. d. M. X. 1878. 206 und XI. 339 und 340. M.

E. Picard. Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques. Ann. de l'Éc. Norm. (2) X. 305-322.

Ausführung der in den C. R. Mai 1880 veröffentlichten und in F. d. M. XII. 328 besprochenen Note.

Hr.

P. Appell. Sur des polynômes de deux variables analogues aux polynômes de Jacobi. Hoppe Arch. LXVI. 238-245.

Es wird zuerst bewiesen, dass das Polynomen

$$U = x^{-a}y^{-b}\frac{d^{m+n}[x^{m+a}y^{n+b}(1-x-y)^{m+n+c}]}{dx^m\,dy^n}$$

der Differentialgleichung

$$(7)\qquad (x-x^2)\frac{d^2U}{dx^2}-xy\frac{d^2U}{dx\,dy}+[a+1-(a-n-c+2)x]$$
$$-(a+m+1)y\frac{dU}{dy}+(a+m+1)(m+n+c)U = 0$$

und ebendarum auch der analogen (7'), welche durch Vertauschung von x, a mit y, b daraus hervorgeht, genügt. Durch die Substitution

$$U = (1-x-y)^c A_{m,n}$$

erhält man ähnliche Differentialgleichungen für $A_{m,n}$. Der hypergeometrischen Reihe analog ist nun die Doppelreihe:

$$F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',x,y) = \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)}x^m y^n,$$

wo $(\lambda, \varkappa) = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+\varkappa-1)$. Diese genügt nach C. R. XC. 296 zwei Differentialgleichungen, welche für

$$\alpha = -(m+n+c);\quad \beta = a+m+1;\quad \beta' = b+n+1;$$
$$\gamma = a+1;\quad \gamma' = b+1$$

mit (7)(7') identisch werden. Ferner lässt sich zeigen, dass dieser Wert von F_2 ein Polynomen ist; denn er kann transformirt werden in einen andern mit den ganzen negativen Argumenten β, β'.

Setzt man überdies

$$z = (a+1, m)(b+1, n) F_2 = HF_2,$$

so werden für $x = y = 0$, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$ identisch mit U und dessen Derivirten. Hieraus wird geschlossen, dass

$$A_{m,n} = H(1-x-y)^{-c} F_2[-(m+n+c),\ a+m+1,\ b+n+1,\ a+1,\ b+1,\ x, y].$$

Ferner wird das bestimmte Integral

$$J = \iint x^a y^b (1-x-y)^c A_{m,n} B\, dx\, dy$$

für den reellen Variationsumfang $x \gtreqless 0$; $y \gtreqless 0$; $1-x-y \gtreqless 0$ betrachtet, für $A_{m,n}$ der Wert (2) gesetzt und durch $(m+n)$-malige partielle Integration die Differentiation ganz auf den Factor B übergeführt. Ist dann B ein Polynomen, welches keinen Term $x^m y^n$ hat, so verschwindet J. Für $B = A_{\mu,\nu}$ hingegen findet man:

$$J = (-1)^{m+n} \frac{d^{m+n} A_{\mu,\nu}}{dx^m dy^n} \frac{\Gamma(m+a+1)\,\Gamma(n+b+1)\,\Gamma(m+n+c+1)}{\Gamma(2m+2n+a+b+c+3)}.$$

Mit Anwendung dieser Eigenschaft kann man nun, wie leicht zu sehen, die Coefficienten der Reihenentwickelung einer Function von x, y nach Functionen $A_{m,n}$ berechnen. H.

E. Heine. Handbuch der Kugelfunctionen, Theorie und Anwendungen. Zweiter Band, zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Berlin. G. Reimer.

Ueber den ersten Band des Heine'schen Handbuchs, das die Theorie der Kugel- und der verwandten Functionen enthielt, ist F. d. M. X. 1878. 322 berichtet worden. Der vorliegende zweite Band behandelt die wichtigsten Anwendungen jener Functionen, und zwar der Reihe nach: 1) die Anwendungen der Kugelfunctionen auf mechanische Quadratur; 2) die Potentialaufgaben für die Kugel, das Rotationsellipsoid und den Kreis, das dreiaxige Ellipsoid, den Cylinder und den Kegel, für zwei Kugeln und das rotirende

Kreissegment, endlich für den Ring und die Kugelcalotte; 3) Aufgaben aus der Theorie der Wärmeleitung, speciell für Cylinder, Kugel und Rotationsellipsoid; 4) hydrodynamische Anwendungen, speciell Bewegung einer Kugel und eines Ellipsoids in einer Flüssigkeit.

In allen diesen Problemen, von denen die erste Auflage des Handbuchs nur einen kleinen Teil enthielt, hat der Verfasser die gesammte vorhandene Literatur auf's Sorgfältigste benutzt, aber auch viele eigene Untersuchungen neu hinzugefügt, z. B. bei den Potentialaufgaben des Cylinders, des Kegels, des Ringes und der Kugelcalotte, bei dem Abschnitt über die Methode der reciproken Radii vectores etc. Das Buch kann sonach bezeichnet werden als eine abschliessende Darstellung dessen, was beim Erscheinen über die behandelten Gegenstände bekannt war. Es ist sowohl geeignet, in die besprochenen Theorien einzuführen, wie es für den, der dieselben selbständig weiter verfolgen will, ein unentbehrliches Hülfsmittel ist. Wn.

H. Bruns. Zur Theorie der Kugelfunctionen. Kronecker J. XC. 322-328.

E. Heine. Ueber die Kugelfunction $P^n(\cos\gamma)$ für ein unendliches n. Kronecker J. XC. 329-331.

Bei dem Dini'schen (oder besser Dini-Heine'schen) Convergenzbeweise für die nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen werden drei Hülfssätze aus der Theorie der Kugelfunctionen angewandt, deren wichtigster der ist, dass für $n=\infty$

$$1)\qquad \lim P^n(\cos\omega)=0$$

ist, und zwar nicht nur, wenn $\cos\omega$ in angebbarer Weise von ± 1 verschieden ist, sondern auch, wenn ω mit wachsendem n so gegen 0 (oder π) convergirt, dass

$$2)\qquad \omega=\theta.n^{-\alpha},$$

wobei $\alpha<\frac{1}{4}$ ist. Diesen Hülfssatz verallgemeinert Herr Bruns, indem er zeigt, dass $P^n(\cos\omega)$ für $n=\infty$ auch dann noch ver-

schwindet, wenn in 2) $\alpha > \frac{1}{4}$ ist, falls nur α unter 1 bleibt. Dies wird, ohne dass irgend welche Sätze aus der Theorie der Kugelfunctionen als bekannt vorausgesetzt werden, dadurch abgeleitet, dass die Function

$$U(\omega, \varkappa) = \frac{2}{\pi} \int_0^\omega \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\varkappa\psi\right) d\psi}{\sqrt{2\cos\psi - 2\cos\omega}}$$

($\varkappa$ reell positiv, ω reell und $0 \leqq \omega \leqq \pi$)

einer ähnlichen Betrachtung unterworfen wird, wie beim Dirichlet'schen Convergenzbeweise für trigonometrische Reihen. Für $\varkappa = 2n+1$ geht U, das im Allgemeinen eine Kugelfunction mit beliebigem Index repräsentirt, in die einfache Kugelfunction $P^n(\cos\omega)$ über. Dieselbe Betrachtung ergiebt auch den zweiten Hülfssatz, dass die Wurzeln der Gleichung $P^n(\cos\omega) = 0$ reell, einfach und nahezu gleichförmig über das Intervall $0 < \omega < \pi$ verteilt sind, während der dritte der oben genannten Hülfsätze sich leicht direct ableiten lässt.

Der Aufsatz des Herrn Heine enthält für die Bruns'sche Erweiterung des oben zuerst genannten Hülfssatzes einen andern Beweis, der sich den Entwickelungen des Heine'schen Handbuchs der Kugelfunctionen anschliesst. Wn.

K. Heun. Neue Darstellung der Kugelfunctionen und der verwandten Functionen durch Determinanten.

Gött. N. 1881. 104-119.

Die Determinanten, durch die hier die Kugelfunctionen dargestellt werden, sind sogenannte „einreihige“, d. h. solche, bei denen diejenigen Elemente einander gleich sind, für welche die Summe von Spalten- und Zeilenindex dieselbe ist. In einer solchen Determinante sind also alle Elemente gleich, welche auf derselben zur Nebendiagonale parallelen Sehne stehen; und zur Bildung der Determinante ist nur die Kenntnis der Randelemente nötig. Nimmt man als Randelement der Reihe nach

$$x, \; -\frac{1}{3}, \; +\frac{1}{3}x, \; -\frac{1}{5}, \; +\frac{1}{5}x, \ldots, \; +\frac{1}{2n-1}x,$$

und bildet aus diesen eine einreihige Determinante von n^2 Elementen, so ist diese bis auf einen constanten Factor gleich der Kugelfunction $P^n(x)$. Es ergiebt sich dies daraus, dass $C.P^n(x)$ der n^{te} Näherungsnenner in der Kettenbruchentwickelung von $\log\frac{x+1}{x-1}$ ist.

In ähnlicher Weise wird ferner noch die zugeordnete Function $P_\lambda^n(x)$, sowie $\cos(n\varphi)$, als Function von $\cos\varphi = x$ betrachtet, dargestellt. Dieselbe Darstellung lässt sich auf die hypergeometrische Reihe ausdehnen, deren erstes Element eine negative ganze Zahl ist, wenn man von der Kettenbruchentwickelung des Integrals

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(u)du}{x-u}$$

ausgeht.

Bemerkt werden mag noch, dass die hier gegebene Determinantendarstellung viel übersichtlicher ist als die von Glaisher gefundene (cf. F. d. M. VIII. 1876. 306). Wn.

J. A. Martins da Silva. Sobra a transformação das funções X_n de Legendre em integral definida. Teixeira J. III. 17-20. (Portugiesisch).

Transformationen der Legendre'schen Functionen X_n in bestimmte Integrale sind bereits bekannt. Herr Silva fügt noch folgendes hinzu:

$$X_n = \frac{2}{\pi\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{[x(1-y^2)-2y\sqrt{1-x^2}]^n}{(1-y^2)^{n+1}}dy.$$

Er geht dabei von einem bestimmten Integral aus, das Herr Hermite auf pag. 288 seines „Cours d'Analyse" abgeleitet hat.

Tx. (O.).

E. Catalan. Mémoire sur les fonctions X_n de Legendre. Belg. Mém. C. XXXI. 1-64.

E. Catalan. Note sur les fonctions X_n de Legendre. Belg. Mém. N. XLIII. 1-10.

E. Catalan. Mémoire sur une suite de polynômes entiers et sur quelques intégrales définies. Belg. Mém. N. XLIII. 1-40.

Die erste der oben genannten drei Arbeiten enthält die ausführliche Ableitung von Resultaten, die der Verfasser schon früher kurz mitgeteilt hatte (cf. F. d. M. IX. 1877. 371). Von den 168 Formeln, die Herr Catalan giebt, mögen die folgenden hier Platz finden:

1) Wenn die Indices α, β, γ der Bedingung genügen:

$$\alpha+\beta+\gamma = n,$$

so ist

$$\frac{dX_{n+1}}{dx} = \Sigma X_\alpha X_\beta X_\gamma$$

die Summe über alle möglichen Combinationen der α, β, γ erstreckt.

$$2)\quad X_n = \frac{(2x)^{n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n\omega \,.\, \cos n\omega \,.\, d\omega}{(x^2\sin^2\omega+\cos^2\omega)^{n+1}}.$$

$$3)\quad \int_{-1}^{+1} X_n \lg(1+x)\,dx = (-1)^{n-1}\frac{2}{n(n+1)}.$$

$$4)\quad z^n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{X_n\,dx}{\sqrt{1-2zx+z^2}},$$

(welch letztere Formel sich unmittelbar aus der Definition der Kugelfunction X_n ergiebt).

Die zweite Arbeit enthält eine Ergänzung der ersten. In der dritten Arbeit werden Polynome T_p betrachtet, die den Kugelfunctionen X_n analog gebildet sind, und die durch folgende Relationen definirt werden:

$$y_p = (1-x)^{-(p+1)}\,.\,(1^p+2^p x+3^p x^2+\cdots),$$
$$x = t(1+x),\quad T_p = (1-x)^{p+1}\,.\,y_p(1+t)^{p-1}.$$

Der Verfasser sucht für diese Functionen die erzeugende

Function auf, ermittelt mit Hülfe derselben den Wert verschiedener bestimmter Integrale und gelangt endlich zu einigen Sätzen über Bernoulli'sche Zahlen. Mn. (Wn.).

L. Schläfli. Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunctionen mit beliebigem Parameter und ihre ausnahmslose Darstellung durch bestimmte Integrale. Bern. 1881.

Die vorliegende Ableitung der Hauptformeln aus der Theorie der Kugelfunctionen ist die erste Darstellung dieser Theorie, die sich nicht auf reelle ganzzahlige Werthe des Index beschränkt, sondern von vornherein für den Index eine beliebige Zahl annimmt. Zwar finden sich auch im Heine'schen Lehrbuche Ausdehnungen mancher Formeln auf beliebige Indices; aber dort treten derartige Erweiterungen nur nebenbei auf, die Annahme eines beliebigen Index bildet nicht, wie in der vorliegenden Arbeit, die principielle Grundlage, aus der die Formeln für ganzzahlige Indices nur als specielle Fälle folgen. Es handelt sich dabei auch nicht um Relationen, die den Kugelfunctionen als besonderen Fällen der hypergeometrischen Reihe zukommen, sondern um solche, die diesen Functionen anderen hypergeometrischen Reihen gegenüber eigentümlich sind. Die angewandte Methode besteht wesentlich darin, dass sich der Verfasser von der Beschränkung auf geradlinige Integrationswege frei macht. Dadurch gelingt es ihm, auch für die Kugelfunctionen mit ganzzahligem Index zu zeigen, dass die verschiedenen Integraldarstellungen dieser Functionen, die Laplace'sche, Jacobi'sche, Dirichlet'sche, alle hinsichtlich der Lage des Integrationsweges in Bezug auf die kritischen Punkte wesentlich dieselben sind und nur in der zufälligen Form des Weges von einander abweichen. In Bezug auf die für beliebige Indices gültigen Formeln kommt Herr Schläfli zu manchen von den Heine'schen abweichenden Resultaten. Der Gang der Entwickelung und die hauptsächlichsten Resultate sind folgende: Der Verfasser beginnt mit der Definition der einfachen Kugelfunction P^n als einer ganzen homogenen Function n^{ter} Ordnung der Coordinaten, welche der Po-

tentialgleichung genügt. Daraus folgt eine Reihenentwickelung von P^n, die nach fallenden Potenzen von x und steigenden von y^2+z^2 fortschreitet; und indem die Coefficienten dieser Reihe durch ein Integral dargestellt werden, das über einen um den Punkt Null geschlagenen Kreis sich erstreckt, ergiebt sich die Laplace'sche Integralform. In dieser wird nun der ganzzahlige Index n durch die beliebige Zahl a ersetzt, ferner das Argument x zunächst reell, positiv und grösser als 1 genommen.

Durch einfache Transformationen ergeben sich dann die folgenden beiden Integralformeln für $P^a(x)$:

$$1) \qquad P^a(x) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{1}{2^a}\frac{(t^2-1)^a}{(t-x)^{a+1}}\,dt,$$

$$2) \qquad P^a(x) = \frac{1}{2i\pi}\int s^a \frac{ds}{w}, \qquad (w^2 = s^2-2sx+1).$$

Der Integrationsweg für 1) ist ein mit dem Radius $\sqrt{x^2-1}$ um x beschriebener rechtläufiger Kreis, für 2) eine Doppelgerade, die von $x+\sqrt{x^2-1}$ zu $x-\sqrt{x^2-1}$ und zurückläuft, wobei aber w beim Hin- und Rücklauf entgegengesetzte Vorzeichen hat. Aus 1) folgt, falls der reelle Teil von a zwischen -1 und 0 liegt, die Darstellung von $P^a(x)$ als hypergeometrische Reihe, die nach Potenzen von $(x-1)$ steigt, für einen ganzzahligen Wert von a ferner die Darstellung der Kugelfunction als vielfacher Differentialquotient. Aus 2) ergiebt sich eine Darstellung von $P^a(x)$ als hypergeometrische Reihe, die nach Potenzen von

$$2\sqrt{x^2-1}\,(x+\sqrt{x^2-1})$$

steigt, ferner eine dem Dirichlet'schen Integral analoge Darstellung von $P^a(x)$ für beliebige a, die für ganzzahlige a in das Dirichlet'sche Integral übergeht. Aus 1) und 2) ergiebt sich ferner

$$3) \qquad P^a(x) = P^{-(a+1)}(x),$$

woraus der Verfasser auf die Unrichtigkeit der Heine'schen Darstellung von $P^a(x)$ als fallende hypergeometrische Reihe schliesst (cf. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, 2te Auflage, T. I. p. 38).

Für die Kugelfunctionen zweiter Art werden die folgenden beiden Definitionen aufgestellt:

$$4) \qquad Q^a(x) = \frac{1}{2i\sin(\pi a)}\int 2^a \frac{(x-t)^a}{(t^2-1)^{a+1}}\,dt$$

(Integrationsweg eine schleifenförmige Curve mit Doppelpunkt, und zwar geht derselbe rechtläufig um x und rechtläufig um das endliche Gebiet);

$$5)\qquad Q^a(x) = \frac{1}{2i\sin(\pi a)}\int \frac{1}{2^{a+1}}\cdot\frac{(t^2-1)^a}{(x-t)^{a+1}}\,dt$$

(Integrationsweg ähnlich einer eigentlichen Lemniscate, und zwar geht derselbe rückläufig um 1, rechtläufig um -1).

Aus 4) und 5) ergeben sich zwei verschiedene Entwickelungen von $Q^a(x)$ nach fallenden Potenzen von x, die beide in die Form von hypergeometrischen Reihen gebracht werden.

Zwischen den Functionen P und Q findet die Beziehung statt:

$$(6)\qquad P^a(x) = \frac{\operatorname{tg}(\pi a)}{\pi}\left[Q^a(x) - Q^{-(a+1)}(x)\right],$$

womit P^a als Summe zweier fallender hypergeometrischer Reihen dargestellt ist.

Nachdem weiter gezeigt ist, wie die Functionen P und Q modificirt werden, wenn das Argument x (das bisher reell und grösser als 1 war) gewisse Umläufe um das ganze Gebiet oder um die Pole $+1$ und -1 macht, folgt eine Entwickelung dieser Functionen nach steigenden Potenzen des Arguments. Von den sich ergebenden Resultaten erwähnen wir die folgenden:

$$(7)\qquad \begin{cases} Q^a(x) = -\dfrac{i}{2}e^{-\frac{i\pi a}{2}}\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}\cdot G \\[2ex] \qquad\qquad + e^{-\frac{i\pi a}{2}}\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}\cdot H, \\[2ex] P^a(x) = \cos\left(\dfrac{\pi a}{2}\right)\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}\cdot G \\[2ex] \qquad\qquad + \sin\left(\dfrac{\pi a}{2}\right)\cdot\dfrac{\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}\cdot H, \end{cases}$$

wobei

$$G = F\left(-\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right),$$

$$H = x \,.\, F\left(-\frac{a-1}{2}, \frac{a}{2}+1, \frac{3}{2}, x^2\right)$$

ist, während F die hypergeometrische Reihe bezeichnet. Eliminirt man aus (7) G oder H, so erhält man zwei Formeln, die sich für ganzzahlige a bei Heine finden, aber nicht in der Allgemeinheit, wie sie hier gelten. An die oben besprochene Entwickelung schliessen sich zwei andere nach steigenden Potenzen von x^2-1, resp. nach fallenden von $x+\sqrt{x^2-1}$. Sodann folgen Entwickelungen der Ausdrücke

$$(x+\sqrt{x^2-1})^n \text{ und } (x+\sqrt{x^2-1})^{-n}$$

nach Kugelfunctionen. Wir erwähnen hier nur das folgende Resultat:

$$(x+\sqrt{x^2-1})^a = \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m \,.\, Q^{2m-a-1}(x),$$

$$B_m = -\frac{a\left(a-2m+\frac{1}{2}\right)}{2\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m-a-\frac{1}{2}\right)}{m!\,\Gamma(m-a+1)}.$$

Ferner ist, wenn m eine negative oder positive ganze Zahl ist,

$$\frac{1}{2i\pi}\int Q^a(x) Q^{-a-1+m}(x)\,dx = 0 \quad \text{(Weg um } -1 \text{ und } +1\text{)},$$

während dasselbe Integral für $m = 0$ den Wert hat:

$$-\frac{1}{2a+1} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{tg}(\pi a)}.$$

Endlich lässt sich auch $\sin(a\vartheta)$ in eine Reihe von Kugelfunctionen der Form $P^{2m-a-1}(\cos\vartheta)$ entwickeln, wobei m von 0 bis ∞ variirt.

Nachdem noch eine von Herrn Heine für ganzzahlige a aufgestellte Formel auf beliebige a ausgedehnt und damit gezeigt ist, dass die beiden Kugelfunctionen $P^a(x)$ und $Q^a(x)$ sich durch dieselbe hypergeometrische Function der Argumente $\frac{1}{2}(1-x)$ und $\frac{1}{2}(1+x)$ darstellen lassen, wendet sich die Untersuchung

den zugeordneten Functionen zu, die für beliebige a ganz ähnlich wie für ganzzahlige a definirt werden, nämlich als Differentialquotienten der $P^a(x)$ und $Q^a(x)$, noch multiplicirt mit gewissen constanten Factoren und Potenzen von $\sqrt{x^2-1}$. Der zweite Index m muss danach eine ganze Zahl sein.

Zum Schluss stellt der Verfasser die Kugelfunction zweiter Art mit dem ganzzahligen Index n durch das folgende rechtläufig um den einen Pol $+1$ zu erstreckende Integral dar:

$$Q^n(x) = \frac{(-1)^n}{2i\pi}\int \log\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-t}\right)\cdot 2^{n+1}\frac{(x-t)^n}{(t^2-1)^{n+1}}\,dt.$$

Mit Hülfe dieses Integrals lässt sich die Reihe

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n Q^n(x)$$

summiren und giebt

$$S = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}\left\{\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \int_0^\alpha \frac{d\beta}{\sqrt{1-2x\beta+\beta^2}}\right\},$$

woraus weiter folgt:

$$Q^n(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{1}{\lambda}P^{\lambda-1}(x)P^{n-\lambda}(x).$$

In einem Anhange wird, ohne Zusammenhang mit dem Vorigen, die Entwickelung der Function $\log\Gamma(x)$ im Intervall $0 < x < 1$ in eine trigonometrische Reihe abgeleitet, durch allmäliche Verwandlung des Integralausdrucks für eine mit $\log\Gamma(x)$ nahe verwandte Function. Wn.

F. G. Mehler. Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsverteilung. Klein Ann. XVIII. 161-194.

C. Neumann. Ueber die Mehler'schen Kegelfunctionen und deren Anwendung auf elektrostatische Probleme. Klein Ann. XVIII. 195-236.

Der erste der vorliegenden Aufsätze ist ein Abdruck einer Programmabhandlung vom Jahre 1870, über die schon F. d. M.

II. p. 263 (dort ist durch ein Versehen Kugelfunction an Stelle von Kegelfunction gesetzt) kurz berichtet ist. Der Zusammenhang mit der Arbeit des Herrn Neumann lässt es indessen erwünscht erscheinen, dieselbe nochmals zu besprechen, zumal in dem erwähnten Referate auf die Anwendung der Kegelfunctionen nicht eingegangen ist. Auf die „Kegelfunctionen“, die in der Mehler'schen Arbeit zuerst eingeführt sind, wird der Verfasser hingeleitet durch das Problem, die Elektricitätsverteilung auf einer in ihrem Scheitel endenden Halbkegelfläche zu bestimmen unter der Einwirkung eines beliebig in der Axe gelegenen inducirenden Punktes. Die reciproke Entfernung des inducirenden Punktes von einem Punkte, der von ihm durch die Kegelfläche getrennt ist, wird in die Form gebracht:

$$T = \frac{1}{\sqrt{r.c}}\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{\sqrt{2(\cos(\varrho i) - \cos\vartheta)}}.$$

Dabei ist c die Entfernung des inducirenden Punktes vom Scheitel, r, ϑ, φ sind die räumlichen Polarcoordinaten des zweiten Punktes; ferner ist

$$r = c\,.\,e^{\varrho}.$$

Mit Hülfe des Fourier'schen Satzes ergiebt sich für $\mathfrak{T}$ die Darstellung

$$\mathfrak{T} = \int_0^\infty \frac{\cos(\mu\varrho)}{\cos(\mu\pi i)} K^\mu(-\cos\vartheta)\,d\mu,$$

während

$$K^\mu(+\cos\vartheta) = \frac{2\cos(\mu\pi i)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\mu\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{2[\cos(\alpha i)+\cos\vartheta]}}$$

die „Kegelfunction“ ist. Damit hat man das Potential für Punkte, die von dem inducirenden Punkte durch die Kegelfläche getrennt sind. Mit Hülfe derselben Function ergiebt sich das Potential für solche Punkte (r, ϑ, φ), die innerhalb desjenigen Kegelraums liegen, der auch den inducirenden Punkt enthält,

$$V = \frac{1}{\sqrt{rc}}\int_0^\infty \frac{\cos(\mu\varrho)}{\cos(\mu\pi i)}\,\frac{K^\mu(-\cos\lambda)K^\mu(\cos\vartheta)}{K^\mu(\cos\lambda)}\,d\mu,$$

wobei $\vartheta = \lambda$ die Gleichung der Kegelfläche ist. Und nun folgt leicht die Dichtigkeit der Elektricitätsverteilung auf dem Kegel.

Der Ausdruck für dieselbe wird mit Hülfe von Euler'schen Integralen vereinfacht. Durch die Anwendung der Methode der reciproken Radien ergiebt sich aus dem obigen Problem sofort auch die Lösung des folgenden: „Die Verteilung einer gegebenen Elektricitätsmenge auf der Oberfläche des durch Rotation eines Kreissegments um die begrenzende Sehne entstehenden Körpers zu bestimmen, falls keine inducirenden Kräfte wirken." Nachdem der Verfasser noch den Ausdruck für die Dichtigkeit in der Nähe der conischen Punkte der beiden oben genannten Flächen genauer discutirt hat, wendet er sich der Ermittelung der Eigenschaften der Function K^μ zu, speciell ihres Zusammenhanges mit der Kugel- und Cylinderfunction. Von den hier entwickelten Resultaten ist zu erwähnen, dass, wenn $-i\left(n+\frac{1}{2}\right)$ für den Index μ gesetzt wird, die Function $K^\mu(\cos\vartheta)$ in die einfache Kugelfunction $P^n(\cos\vartheta)$ übergeht. Die Kegelfunctionen sind demnach nichts anderes, als Kugelfunctionen mit dem Index $\left(i\mu-\frac{1}{2}\right)$. Man erhält auch die Differentialgleichung, der $K^\mu(\cos\vartheta)$ genügt, indem man in der Differentialgleichung der Kugelfunctionen $n(n+1)$ durch $-\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)$ ersetzt; und zwar sind $K^\mu(\cos\vartheta)$ und $K^\mu(-\cos\vartheta)$ zwei verschiedene particuläre Lösungen dieser Gleichung. Wird ferner $\mu=\infty$, aber so, dass $\mu.\vartheta$ den endlichen Wert x annimmt, so geht die Kegelfunction $K^\mu(\cos\vartheta)$ in die Cylinderfunction $I(ix)$ über. Nachdem noch für K^μ mehrfache Reihenentwickelungen (hypergeometrische Reihen), sowie noch eine neue, dem Dirichlet'schen Integral bei den Kugelfunctionen analoge Integralformel aufgestellt ist, wird der Wert dieser Function für $\mu=\infty$ untersucht, der, ausser für $\vartheta=0$, unendlich wird. Sodann werden diese Untersuchungen auf rein imaginäre Werte von ϑ ausgedehnt, wobei sich die folgende bemerkenswerte Integralform für die Cylinderfunctionen ergiebt. Es ist

$$I(x)=\frac{2}{\pi}\int_x^\infty\frac{\sin\alpha.d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}.$$

In einem Schlussabschnitt wird das Additionstheorem für die

Kegelfunctionen entwickelt, d. h. für das zusammengesetzte Argument

$$z = \cos(\vartheta i)\cos(\vartheta' i) + \sin(\vartheta i)\sin(\vartheta' i)\cos(\varphi - \varphi')$$

wird die Function $K^{\mu}(z)$ in eine nach Cosinus der Vielfachen von $\varphi - \varphi'$ fortschreitende Reihe entwickelt. Daraus ergiebt sich die folgende Darstellung einer willkürlichen Function von zwei Variabeln durch ein dreifaches Integral, die der Darstellung einer solchen Function durch die bekannte Kugelfunctionenreihe analog ist. Es sei $f(\vartheta, \varphi)$ eine Function von ϑ und φ, welche von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \infty$ und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ gegeben ist, nirgends unendlich wird und für $\vartheta = \infty$ stärker gegen Null convergirt, als die $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\text{te}}$ Potenz von $\cos(i\vartheta)$ oder e^{ϑ}; dann stimmt der Wert des dreifachen Integrals

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} d\mu \cdot \mu \cdot \frac{1}{i}\operatorname{tg}(\mu\pi i)\int_0^{\infty} d\vartheta' \cdot \frac{1}{i}\sin(\vartheta' i)\int_0^{2\pi} K^{\mu}(z) f(\vartheta', \varphi') d\varphi',$$

wo z den vorher erwähnten Ausdruck bezeichnet, mit dem Functionalwerte $f(\vartheta, \varphi)$ überein, wenn dieser ein völlig bestimmter ist, und stellt einen gewissen Mittelwert dar, wenn die Function in der Nähe des Punktes ϑ, φ vieldeutig ist. Dieser Satz wird angewandt auf die Entwickelung der Function $(x-y)^{-\delta}$, wo $\delta > \frac{1}{2}$, $1 \leqq x \leqq \infty$, $-\infty < y < 1$ ist. Speciell für $\delta = 1$ wird gefunden:

$$\frac{1}{x-y} = \pi\int_0^{\infty} d\mu . \mu \, \frac{\operatorname{tg}(\mu\pi i)}{i\cos(\mu\pi i)} K^{\mu}(x) K^{\mu}(-y),$$

ferner:

$$K^{\mu}(-y) = \frac{\cos(\mu\pi i)}{\pi}\int_1^{\infty} \frac{K^{\mu}(x)\,dx}{x-y}.$$

Die analogen Formeln für Cylinderfunctionen folgen hieraus durch den oben angedeuteten Grenzübergang.

In dem Aufsatz des Herrn C. Neumann werden wesentlich dieselben Probleme behandelt, wie in dem von Mehler; doch schlägt Herr Neumann, soweit es die Ableitung von Eigenschaften der Kegelfunctionen betrifft, einen wesentlich anderen Weg ein,

ır weniger Hülfsmittel erfordert (z. B. die Theorie der Γ-Func-nen entbehrlich macht) und eine grössere Einfachheit und rchsichtigkeit besitzt. In den Anwendungen geht ferner Herr mann über die Mehler'schen Resultate hinaus. Die Mehler'sche eichnung der Kegelfunctionen hat Herr Neumann insofern dificirt, als er den Index q statt des Mehler'schen μ gebraucht, ährend μ als Argument auftritt. Ferner wird für die Function $(-\cos w)$ die neue Bezeichnung $L_q(\cos w)$ eingeführt.

Den Ausgangspunkt der Untersuchung bildet die Aufgabe r Elektricitätsverteilung auf derjenigen Fläche, die durch Ro-tion eines Kreisbogens um seine Sehne entsteht (Herr Neumann zeichnet diese Fläche mit dem sonst nicht in dieser Bedeutung bräuchlichen Ausdrucke „Conoid"). Zur Behandlung der Po-tentialaufgaben für die in Rede stehende Fläche werden die schon früher von dem Verfasser angewandten dipolaren Coordi-naten ϑ, w, φ benutzt, die mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch die Relation verbunden sind:

$$x = \xi, \quad y = \eta \cos\varphi, \quad z = \eta \sin\varphi, \quad \xi + i\eta = a\,\frac{1+e^{\vartheta+iw}}{1-e^{\vartheta+iw}}.$$

Eine Conoidfläche wird dann durch die Gleichung $w = \text{Const.}$ bestimmt. Die reciproke Entfernung zweier Punkte, in dipolaren Coordinaten ausgedrückt, ist, von einem gewissen Factor abge-sehen, ein Ausdruck derselben Form, wie er oben mit $(\mathfrak{T})$ be-zeichnet ist. Die Entwickelung dieses Ausdrucks führt, wie bei Mehler, mit Hülfe des Fourier'schen Satzes auf die Kegelfunction, die (abgesehen von der oben erwähnten Aenderung der Bezeich-nung) genau wie bei Mehler definirt wird, nur dass der constante Factor $\cos(q\pi i)$, der bei Mehler von vornherein auftritt, hier vorläufig noch unbestimmt bleibt $= \frac{1}{C_q}$. Derselbe wird später dadurch bestimmt, dass $L_q(-1) = K_q(1) = 1$ wird. Aus der Potentialgleichung ergiebt sich die gewöhnliche Differential-gleichung, der die beiden Functionen $K_q(\mu)$ und $L_q(\mu)$ genügen. Die Potenzentwickelung derselben zeigt, dass beide verschiedene iculäre Integrale dieser Differentialgleichung sind. Eine Ent-ckelung nach Potenzen von $\sin\frac{w}{2}$, falls das Argument $\mu = \cos w$,

zeigt, dass die Function $K_q(\mu)$ gleich der Kugelfunction $P(\mu)$ mit dem imaginären Index $iq - \frac{1}{2}$ ist. Hieran knüpft Herr Neumann folgende Entwickelung, die sich bei Mehler nicht findet. Entwickelt man den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{2[\cos(i\vartheta) - \cos w]}}$$

in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe, setzt diese Reihe in das die Function $L_q(\cos w)$ [oder $K_q(-\cos w)$ nach Mehler's Bezeichnung] definirende Integral ein, so ergiebt sich die nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe

$$C_q \,.\, K_q(\mu) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + q^2} P_n(\mu),$$

und daraus folgt auch der Wert der vorher unbestimmten Constante C_q:

$$C_q = \frac{1}{\cos(q\pi i)}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\int_{-1}^{+1} L_q(\mu) K_\varrho(\mu)\, d\mu = \frac{2}{\pi(q^2 - \varrho^2)} \left(\frac{1}{C_q} - \frac{1}{C_\varrho}\right).$$

Nachdem noch das Unendlichwerden der Kegelfunction untersucht ist [$L_q(\mu)$ wird für $\mu = +1$ logarithmisch unendlich], wendet sich die Betrachtung den adjungirten Kegelfunctionen zu, die, ähnlich wie die adjungirten Kugelfunctionen, durch die höheren Differentialquotienten der einfachen Kegelfunctionen definirt werden:

$$K_{qj}(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}j} \frac{d^j K_q(\mu)}{d\mu^j},$$

und analog $L_{qj}(\mu)$. Mit Hülfe dieser Functionen wird die in dipolaren Coordinaten ausgedrückte reciproke Entfernung zweier beliebiger Punkte in eine Reihe entwickelt, welche Aufgabe identisch ist mit der von Herrn Mehler als Additionstheorem bezeichneten. Das Resultat erscheint jedoch hier in einer übersichtlicheren Form, als bei Mehler. Mit Hülfe aller bisher erwähnten

Resultate werden nun die folgenden elektrischen Aufgaben erledigt: Bestimmung der Elektricitätsverteilung auf dem Conoid, falls keine äusseren Kräfte wirken; Anwendung auf ein unendlich dünnes Conoid; elektrische Verteilung auf dem Conoid unter Einfluss gegebener äusserer Kräfte; elektrische Verteilung auf einem Conductor, der aus zwei Kugeln und einem dieselben verbindenden Conoid besteht. Nur die erste dieser Aufgaben ist von Mehler gelöst, die Lösungen der anderen sind neu. Die Resultate im Einzelnen anzuführen, würde den für dies Referat gestatteten Raum überschreiten. Dieselben mögen im Original nachgelesen werden. Erwähnt mag nur noch werden, dass Herr Neumann für die Kegelfunctionen eine anschauliche Bedeutung gefunden hat, nämlich durch das Potential, das die auf gewisse Weise mit Masse belegte Verbindungslinie der beiden Pole des dipolaren Coordinatensystems hervorbringt. Wn.

L. Schläfli. Einige Bemerkungen über die Lamé'schen Functionen. Chelini, Coll. Math. 277-287.

Der Herr Verfasser giebt für drei die Lamé'schen Functionen betreffende Sätze neue Beweise, die von den von Lamé und Heine gegebenen völlig verschieden, zum Teil viel elementarer sind. Wendet man die Bezeichnung von Heine an (Handbuch der Kugelfunction Th. I), so wird 1) gezeigt, dass die Wurzeln der Gleichung

$$E(\mu) = 0$$

sämmtlich von einander verschieden, reell und innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen sind; 2) dass die Zahl der verschiedenen zu derselben Ordnung n gehörigen Lamé'schen Functionen $2n+1$ ist; 3) dass dasjenige Doppelintegral, welches bei der Entwickelung einer Function nach Lamé'schen Producten die Rolle des Nenners spielt, keine anderen transcendenten Zahlen enthält, als den Factor π. Das letztere Resultat wird abgeleitet durch Zurückführung des genannten Integrals auf das bekannte Integral von Cauchy mit geschlossenem Wege. Wn.

F. Klein. Ueber Lamé'sche Functionen. Klein Ann. XVIII. 237-246.

Die gewöhnlichen Lamé'schen Functionen $E(\lambda^2)$ sind, von den eventuell vorkommenden, dann aber nur einfach auftretenden Factoren $\sqrt{\lambda^2}$, $\sqrt{\lambda^2-b^2}$, $\sqrt{\lambda^2-c^2}$ abgesehen, ganze Functionen von λ^2, von denen jedesmal $(\tau+1)$ Functionen des Grades τ zusammengehören. Bekannt ist, dass diese Functionen alle verschieden und dabei reell sind, und dass sie, gleich Null gesetzt, je τ getrennte reelle Wurzeln ergeben, die alle in dem Intervalle von 0 bis c^2 enthalten sind, während keine Wurzel mit 0 oder c^2 oder auch mit dem zwischen 0 und c^2 eingeschalteten Werte b^2 zusammenfällt. Ueber die Verteilung dieser τ Wurzeln auf die Teilintervalle 0 bis b^2 und b^2 bis c^2 stellt nun Herr Klein folgenden Satz auf: „Von den $(\tau+1)$ Möglichkeiten, die man rein combinatorisch für die Verteilung von τ Grössen auf zwei Intervalle erhält, trifft je eine bei einer, aber nur bei einer der oben genannten $(\tau+1)$ Lamé'schen Functionen ein, so dass die Functionen und die verschiedenen Verteilungsweisen der Wurzeln einander eindeutig entsprechen."

Der Beweis wird folgendermassen geführt. Es seien μ und ν elliptische Coordinaten auf der Kugel, und zwar liege μ^2 zwischen b^2 und c^2, ν^2 zwischen 0 und b^2, so wird das Lamé'sche Product der Ordnung n

$$f = E(\mu^2).E(\nu^2)$$

eine homogene ganze Function n^{ten} Grades der Coordinaten x, y, z, die der bekannten Differentialgleichung des Potentials

$$\Delta f = 0$$

genügt. Die Function f verschwindet dann, wenn μ^2 und ν^2 einen der Wurzelwerte der Gleichung $E(\lambda^2) = 0$ annehmen, d. h. bei der Bedeutung von μ und ν in gewissen sphärischen Kegelschnitten, die in zwei Klassen zerfallen, je nachdem der eine oder der andere Factor von f verschwindet. Lässt man nun die anfangs verschiedenen Grössen b^2 und c^2 zusammenfallen, so gehen die elliptischen Kugelcoordinaten μ, ν in die gewöhnlichen Polarcoordinaten über, jedes einzelne der Lamé'schen Producte verwandelt sich in eine bestimmte der $(2n+1)$ in Be-

zug auf die Axe des Polarcoordinatensystems symmetrischen Kugelfunctionen, die in der üblichen Bezeichnung lauten:

$$P_h^n(\cos\vartheta)\,.\,\cos(h\varphi) \text{ und } P_h^n(\cos\vartheta)\,.\,\sin(h\varphi).$$

Von jeder dieser Kugelfunctionen ist nun bekannt, für welche Meridiane und Parallelkreise auf der Kugel sie verschwindet. Da ferner jede einzelne dieser Kugelfunctionen beim Grenzübergange nur aus einer bestimmten Lamé'schen Function entsteht, so ist auch für ein Lamé'sches Product bekannt, für welche Kugelkreise es im Grenzfall verschwindet. Die Meridiane, auf denen dies geschieht, entsprechen aber den sphärischen Kegelschnitten der einen der oben genannten beiden Klassen, die Parallelkreise den sphärischen Kegelschnitten der anderen Klasse. Man weiss daher für jedes Product f, wie oft der eine und wie oft der andere Factor verschwindet; und damit hat man unmittelbar den oben ausgesprochenen Satz.

Zum Schluss wird derselbe Satz von den gewöhnlichen Lamé'schen Functionen (denen zweiter Ordnung) auf die Lamé'schen Functionen höherer Ordnung ausgedehnt. Wn.

F. Klein. Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind. Klein Ann. XVIII. 410-427. Auch separat.

Es handelt sich um die Aufgabe: „Wenn für die Oberfläche eines von sechs confocalen Flächen begrenzten Körpers die Potentialwerte beliebig gegeben sind, die Potentialwerte für das Innere zu bestimmen." Diese Aufgabe kann dahin vereinfacht werden, dass man zunächst die Potentialwerte auf fünf der Flächen gleich Null setzt und auf der sechsten beliebig giebt. Durch Addition der sechs verschiedenen, auf diese Weise erhaltenen Potentialwerte erhält man dann den gesuchten Potentialwert. Das gestellte Problem ist ein allgemeineres als das in Thomson und Tait's theoretischer Physik, (deutsch von Helmholtz und Wertheim, p. 156-178) dargestellte, wo der gegebene Körper durch sechs Flächen $r=r_1$, $r=r_2$, $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$, $\vartheta=\vartheta_1$, $\vartheta=\vartheta_2$ begrenzt ist, wenn r, ϑ, φ die räumlichen Polarcoordinaten

bedeuten. Der Untersuchung werden elliptische Coordinaten zu Grunde gelegt, und zwar in folgender Weise. Sind x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, so sind μ, ν, ϱ, die elliptischen Coordinaten, die drei Wurzeln der in Bezug auf λ cubischen Gleichung

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - \varkappa^2} + \frac{z^2}{\lambda - 1} = 1,$$

wo $\varkappa^2$ (der Modul) kleiner als 1 ist, und

$$(2) \qquad 0 \leqq \mu \leqq \varkappa^2 \leqq \nu \leqq 1 \leqq \varrho \leqq \infty$$

ist, so dass die Gleichung (1) für $\lambda = \mu$ ein zweischaliges Hyperboloid, für $\lambda = \nu$ ein einschaliges Hyperboloid, für $\lambda = \varrho$ ein Ellipsoid des confocalen Systems darstellt. Es sei nun

$$(3) \qquad t = t(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(\lambda - \varkappa^2)(\lambda - 1)}}$$

und

$$t(\mu) = u, \quad t(\nu) = v, \quad t(\varrho) = w.$$

Dann wird die Differentialgleichung des Potentials Φ

$$(4) \qquad \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}}{(\mu - \nu)(\mu - \varrho)} + \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}}{(\nu - \varrho)(\nu - \mu)} + \frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2}}{(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)} = 0,$$

und man genügt derselben in bekannter Weise, indem man setzt:

$$(5) \qquad \Phi = E_1(u).E_2(v).E_3(w),$$

wo E_1, E_2, E_3 irgend drei particuläre Integrale der Gleichung

$$(6) \qquad \frac{d^2 E(t)}{dt^2} = (A\lambda + B)\, E(t),$$

und A und B beliebige Constante bedeuten. (Bei Lamé und Andern ist diese allgemeinere Form der Lösung sogleich etwas specialisirt, wie der Herr Verfasser ausdrücklich hervorhebt, da es ihm darauf ankommt, die allgemeinere Form beizubehalten.).

Der Herr Verfasser sucht nun eins der sechs oben bezeichneten Particularpotentiale, aus deren Summation das gesuchte Potential hervorgeht, in folgender Form durch eine unendliche Reihe darzustellen:

$$\psi(\mu, \nu, \varrho) = \Sigma C.E_1(\mu)\, E_2(\nu)\, E_3(\varrho).$$

Diese Entwickelung gelingt insofern, als gezeigt wird, dass in der Tat eine und nur eine derartige Reihenentwickelung der

Form nach möglich ist, die den bekannten Reihenentwickelungen willkürlicher Functionen analog ist. Dagegen ist die Convergenz dieser Entwickelung und die Möglichkeit einer Darstellung in convergenten Reihen nicht bewiesen, was übrigens auch bei dem specielleren Problem von Thomson und Tait nicht geschehen ist. Die Analogie mit der Fourier'schen Reihe

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + \qquad (0 < x < \pi),$$

fixirt der Herr Verfasser durch folgende Bedingungen:

1) Man hat die Constanten A und B und die zugehörigen particulären Integrale der Gleichung (6) so auszuwählen, dass

$$E_1(a_1) = 0, \quad E_1(a_2) = 0; \quad E_2(b_1) = 0, \quad E_2(b_2) = 0; \quad E_1(c_1) = 0$$

sind, während die E innerhalb ihrer Intervalle endlich bleiben.

2) Sind m und n irgend zwei ganze Zahlen, mit Einschluss der Null, so soll immer ein und nur ein Product

$$E_1(\mu) . E_2(\nu) . E_3(\varrho) \equiv (E_1 . E_2 . E_3)_{m,n}$$

existiren, welches m-mal zwischen a_1 und a_2 und n-mal zwischen b_1 und b_2 verschwindet.

3) Die so definirten Producte sollen allgemein die Eigenschaft haben, dass

$$\int (E_1 . E_2 . E_3)_{m,n} . (E_1 . E_2 . E_3)_{m,n} \, dw = 0$$

sei, wo dw das Oberflächenelement des Ellipsoids $\varrho = c_2$ bedeutet, und die Integrationsgrenzen $a_1 \leqq \mu \leqq a_2$ und $b_1 \leqq \nu \leqq b_2$ sind. Es wird nachgewiesen, dass diese Bedingungen erfüllbar sind, und dass durch sie die einzelnen Particularintegrale vollständig bestimmt werden. Es folgt nämlich aus der Definition der Lamé'schen Functionen, dass die dritte der oben gestellten Bedingungen eine Folge der ersten ist. Ferner zeigt sich, dass man den Gleichungen

$$E_1(a_1) = 0; \quad E_2(b_1) = 0; \quad E_3(c_1) = 0$$

durch blosse Wahl der Particularlösungen E_1, E_2, E_3 der Lamé'schen Differentialgleichung genügen kann. Endlich können die Bedingungen $E_1(a_2) = 0$, $E_2(b_2) = 0$ erfüllt werden, und die Bedingung (2), wenn man die Constanten A und B passend wählt, und zwar werden diese Bestimmungen eindeutig erfüllt. Nach-

dem der Nachweis hierüber geführt ist, wird die gestellte Aufgabe behandelt, und es wird gezeigt, wie die Lösung zu modificiren ist, wenn weniger Begrenzungen vorhanden sind.

A.

F. Lindemann. Entwickelung der Functionen einer complexen Variabeln nach Lamé'schen Functionen und nach Zugeordneten der Kugelfunctionen. Klein Ann. XIX. 323-386.

In seiner Schrift „Ueber die Entwickelung einer Function mit imaginärem Argument nach den Kugelfunctionen erster und zweiter Art" (Halle, 1862) hat Herr C. Neumann zuerst gezeigt, dass die Entwickelungen complexer Functionen nach Kugelfunctionen erster und zweiter Art in Gebieten convergiren, welche durch Ellipsen mit den Brennpunkten $+1$ und -1 begrenzt werden. Analoge Resultate werden in der vorliegenden Arbeit für die Entwickelung nach Lamé'schen Functionen abgeleitet. Seiner eigentlichen Aufgabe schickt der Verfasser eingehende Untersuchungen über die Eigenschaften der Lamé'schen Functionen voraus, insbesondere über die Function zweiter Art, die im Unendlichen verschwindet. Er wendet dabei durchweg die Heine'sche Bezeichnung an und beschränkt sich ausserdem, was die Functionen erster Art betrifft, auf die Klasse K, die rationalen und [illegible]und [illegible]en Functionen, und ebenso auf die dieser Klasse ent[illegible]dern [illegible]nden Functionen zweiter Art. Um die Function zweiter [illegible]alisir[illegible] für alle complexen Werte von z darzustellen, wird [illegible] dar[illegible]ch Potenzen der Grösse

[illegible] Her[illegible] [illegible]ticul[illegible]

$$(1)\qquad \zeta = \frac{\sqrt{z^2-b^2}-\sqrt{z^2-c^2}}{\sqrt{c^2-b^2}}$$

herv[illegible]

[illegible]ustell[illegible]ne genauere Untersuchung der durch (1) vermit[illegible] [illegible] ergiebt, dass einem in der ζ-Ebene mit dem [illegible]ickelun[illegible]n Anfangspunkt als Mittelpunkt beschriebenen [illegible]e und[illegible]bene die ganz im Endlichen liegende Curve

$$(2)\qquad \left(\frac{x^2-y^2-\frac{1}{2}(c^2+b^2)}{\varrho^2+\varrho^{-2}}\right)^2+\left(\frac{2xy}{\varrho^2-\varrho^{-2}}\right)^2=\left(\frac{c^2-b^2}{4}\right)^2$$

entspricht. Das für den variabeln Parameter ϱ aus den Curven 2) gebildete System ist gestaltlich dem System confocaler Cassini'scher Curven sehr ähnlich. Speciell entsteht für

$$\varrho^2=\frac{(c\pm b)^2}{c^2-b^2}$$

eine der Lemniscate ähnliche Curve, die im Anfangspunkte einen Doppelpunkt hat, und deren Gleichung ist:

$$(3)\qquad (x^2-y^2)^2-(c^2+b^2)(x^2-y^2)+\frac{1}{4}x^2y^2\left(\frac{c^4+b^4+6b^2c^2}{bc(b^2+c^2)}\right)^2=0.$$

Fügt man zu der Gleichung (1) noch die Bedingung $\varrho<1$ und

$$\lim_{z=\infty}(z.\zeta)=+\frac{1}{2}\sqrt{c^2-b^2}$$

hinzu, so ist ζ als holomorphe Function von z bestimmt, ausserhalb der Linie COC', d. i. desjenigen Teils der reellen Axe, welcher die Punkte $z=+c$ und $z=-c$ durch den Nullpunkt hindurch verbindet. Zu beiden Seiten der Linie COC' hat ζ zwei verschiedene Werte. Aehnlich wie ζ verhält sich nun $F_s^n(z)$, als deren wichtigste Eigenschaften sich die folgenden ergeben, wobei auch schon die früher bekannten Eigenschaften der Vollständigkeit halber hinzugefügt sind:

1) $F_s^n(z)$ genügt in der ganzen Ebene z bis an die Linie COC' der Differentialgleichung der Lamé'schen Functionen:

$$(z^2-b^2)(z^2-c^2)\frac{d^2F}{dz^2}+z(2z^2-b^2-c^2)\frac{dF}{dz}$$
$$+[(b^2+c^2)v_s-n(n+1)z^2]F=0.$$

Sie genügt dieser Differentialgleichung auch in der genannten Linie als Function der reellen Veränderlichen x.

2) Sie ist in der ganzen Ebene eine stetige Function von $z=x+iy$, ausgenommen die Linie COC', wo eine mittels gewisser elliptischer Integrale darstellbare Discontinuität eintritt.

3) Ihre Werte in der genannten Linie sind definirt als arithmetische Mittel ihrer Werte zu beiden Seiten der Linie.

4) Sie ist für alle Werte von z ausserhalb COC' dargestellt durch das Integral

$$F_s^n(z) = (2n+1)E_s^n(z).\int_z^\infty \frac{dz}{(E_s^n(z))^2\sqrt{(z^2-b^2)(z^2-c^2)}},$$

wobei $E_s^n(z)$ die Lamé'sche Function erster Art ist.

5) Sie wird für $z = \infty$ Null von der Ordnung $n+1$.

6) Für alle Werte von z ausserhalb der obigen Curve 3) kann sie in eine nach steigenden Potenzen von ζ geordnete Reihe entwickelt werden, welche mit ζ^{n+1} beginnt.

7) Im Innern der beiden Schleifen, aus welchen die Curve 3) besteht, gilt je eine Entwickelung nach auf- und absteigenden Potenzen von ζ.

An die Ermittelung dieser Eigenschaften schliesst sich die Untersuchung der Werte, welche $F_s^n(z)$, sowie die entsprechende Function erster Art $K_s^n(z)$ für sehr grosse Werte des Index n annehmen. Hier ergiebt sich:

$$(4)\quad \begin{cases} K_s^n(z) = \dfrac{\zeta^{-n}\sqrt{(c^2-b^2)^n}.a_0}{2^n\sqrt[4]{\zeta^4+2\varkappa\zeta^2+1}}, \\[2ex] F_s^n(z) = \dfrac{2^{n+1}\,\zeta^{n+1}}{a_0\sqrt{(c^2-b^2)^{n+1}}\,\sqrt[4]{\zeta^4+2\varkappa\zeta^2+1}}, \end{cases}$$

wobei a_0 der Coefficient der höchsten Potenz der ganzen Function $K_s^n(z)$ und

$$\varkappa = \frac{c^2+b^2}{c^2-b^2}$$

ist. Die genannten Ausdrücke gelten zunächst ausserhalb der Curve 3), lassen sich dann auch auf das Innere derselben übertragen mit Ausnahme der Linie COC', die wieder besondere Betrachtungen erfordert.

Es folgt nun die Entwickelung des Ausdrucks $(z_1-z)^{-1}$ nach Lamé'schen Functionen. Bekannt ist zunächst (cf. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, zweite Auflage, Teil II. p. 172) die Entwickelung der reciproken Entfernung zweier Punkte (in elliptischen Coordinaten ausgedrückt) in eine Reihe von Lamé'schen

Functionen. Daraus ergiebt sich durch Specialisirung der Lage der Punkte: „Sind z und z_1 zwei reelle Grössen und $z_1 > z > c$, so besteht die Relation:

$$(5)\qquad \frac{1}{z_1 - z} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{s=1}^{s=\sigma+1} C_s^n . K_s^n(z) F_s^n(z_1),$$

wo

$$C_s^n = [K_s^n(b) . K_s^n(c)]^2 \cdot \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

ist, während $\sigma = \frac{1}{2} n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$. In dieser Entwickelung kommen nur Functionen der Klasse K vor, die der übrigen drei Klassen sind durch die oben erwähnte Specialisirung fortgefallen.

Die Reihe (5) wird nun auf imaginäre Werte von z und z_1 übertragen, ihre Convergenz mittels der Ausdrücke (4) und der bekannten Entwickelung einer Kugelfunction nach Lamé'schen Functionen untersucht. Dadurch ergiebt sich: Die Entwickelung (5) ist immer anwendbar, wenn die durch den Punkt z gehende Curve des Systems (2) von der durch z_1 gelegten Curve desselben Systems (oder, falls beide aus je zwei Ovalen bestehen, ein Teil der ersteren von einem Teile der letzteren) ganz umschlossen wird." Der Punkt z kann auch auf BC oder $B'C'$ liegen (für die Punkte B und B' ist $z = +b$, resp. $z = -b$, $b < c$); alsdann gilt (5) für jeden Punkt z_1 ausserhalb dieser beiden Strecken.

Aus der fundamentalen Formel (5) ergiebt sich die Entwickelung einer Function $f(z)$ nach $K_s^n(z)$ und $F_s^n(z)$ in bekannter Weise durch Vermittelung des Cauchy'schen Satzes, dass

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{f(z_1)}{z_1 - z}\, dz,$$

wenn das Integral rechts in positivem Sinne über die ganze Begrenzung eines ebenen Flächenstücks geführt wird, innerhalb dessen $f(z)$ als holomorphe Function von z gegeben ist. Die Behandlung der Entwickelung wird hier complicirter, als die der entsprechenden Entwickelung nach Kugelfunctionen, da in Bezug auf das Convergenzgebiet viel mehr einzelne Fälle zu unterscheiden sind. Ist $f(z)$ für das Innere einer solchen Curve (2) gegeben, die aus einem einzigen Zuge besteht, so convergirt die

nach K_s^n fortschreitende Reihe, sobald z_1 auf dem Rande liegt. Ist $f(z)$ für alle Punkte ausserhalb einer solchen Curve gegeben, so ergiebt sich eine nach $F_s^n(z)$ fortschreitende Reihe, die noch convergirt, sobald z auf dem Rande, z_1 im Innern liegt. Besteht die Curve (2) aus zwei getrennten Ovalen, so gilt die Darstellung durch die K-Reihe für das Innere des einen Ovals, während die Reihe auch noch in dem anderen Oval convergirt, aber dort den Wert Null darstellt. Für Flächenstücke, die von zwei verschiedenen Curven des Systems (2) begrenzt sind, ergeben sich je nach der Art dieser Curven verschiedenartige Entwickelungen. Besonders beachtenswert sind hier die Fälle, in denen das Convergenzgebiet dreifach zusammenhängend ist.

Im Anschluss an diese allgemeinen Resultate werden noch diejenigen nach Lamé'schen Functionen fortschreitenden Entwickelungen genauer untersucht, deren Summe gleich Null ist. Derartige Entwickelungen giebt es unendlich viele, nämlich 1) nach den K^n fortschreitende Reihen, die in der ganzen Ebene gültig sind; 2) solche unendliche K-Reihen, die nur im Innern je einer Schleife der Curve (3), andere, die nur in einem Ovale einer zweiteiligen Curve (2) gelten; 3) Entwickelungen nach den Functionen F, die ausserhalb der Curve (3) gelten; 4) Entwickelungen nach Functionen K^n und F^n, die in einem von zwei Ovalen der Curven (2) begrenzten Ringe convergiren; 5) Entwickelungen, die nur längs einer Linie gelten. Die Entwickelungen selbst mitzuteilen, würde hier zu weit führen.

Zum Schluss werden die Grenzfälle der obigen Entwickelungen untersucht. Für den Fall $b = c$ geht die Reihe (5) in die Heine'sche Entwickelung von $(z_1 - z)^{-1}$ nach Kugelfunctionen über. Für den Fall $b = 0$, $c = 1$ dagegen gehen die Lamé'schen Functionen in die zugeordneten Kegelfunctionen über. Die Gleichung (5) ergiebt dann

$$(6) \qquad \frac{1}{z_1 - z} =$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_m{}' (-1)^{n+m} \frac{1.3 \ldots (n+m-1).1.3 \ldots (n-m-1)}{2.4 \ldots (n+m).2.4 \ldots (n-m)} P_m^n(\sqrt{1-z^2})\, Q_m^n(\sqrt{1-z$$

Hierin ist die innere Summe über alle Zahlen m auszudehnen,

für welche $n-m$ eine positive grade Zahl oder Null ist; für $m=0$ ist nur die Hälfte des betreffenden Gliedes zu nehmen. Die Reihe (6) ist gültig, wenn z im Innern einer Ellipse liegt, die durch z_1 geht und deren Brennpunkte sich in den Punkten $+1$ und -1 befinden. An diese Gleichung lassen sich dieselben Erörterungen anknüpfen, wie an die allgemeine Gleichung (5); nur treten hier statt der Curven (2) und (3) confocale Ellipsen auf, und nicht mehr Curven, die aus getrennten Ovalen bestehen. Insbesondere wird der Specialfall $b=0$ auf die Nullentwickelungen angewandt, und hier ergiebt sich unter anderem die neue Formel

$$\int_{-1}^{+1} P_\nu^n(x)\, Q_\mu^n(x)\, \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

Wn.

G. A. Orlow. Sur la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$ de Didon. Nouv. Ann. (2) XX. 481-489.

In Verallgemeinerung einer von Didon eingeführten Function $P_{m,n}$ zweier Veränderlichen x, y, die eine grosse Analogie mit den Kugelfunctionen einer Veränderlichen darbietet (cf. F. d. M. II. 1870. p. 304), betrachtet der Verfasser der vorliegenden Arbeit die Function $\Omega_{m,n}$, die ausser den Variabeln x, y noch den Parameter β enthält und durch den folgenden Ausdruck definirt wird:

$$\Omega_{m,n} = C_{m,n}\cdot \frac{1}{(y^2-1)^{\beta+m+\frac{1}{2}}}\cdot \frac{d^n(y^2-1)^{\beta+m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2-1)^{\beta}}\cdot \frac{d^m(x^2+y^2-1)^{\beta+m}}{dx^m}.$$

Darin hat die Constante $C_{m,n}$ den Wert

$$C_{m,n} = \frac{2^{n-m}}{m!\,n!}\,\frac{(2\beta+1)(2\beta+2)\dots(2\beta+m)}{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+m)} \cdot \frac{(\beta+m+1)\dots(\beta+m+n)}{(2\beta+2m+n+2)\dots(2\beta+2m+2n+1)}.$$

Von dieser Function $\Omega_{m,n}$, die für $\beta=0$ in die Didon'sche Function $P_{m,n}$, multiplicirt mit einem constanten Factor, übergeht

wird gezeigt, dass sie bei der Entwickelung des Ausdrucks $(1-2by+b^2)^\beta.[(1-2ax-2by+b^2)\ (1-2by+b^2)-a^2(y^2-1)]^{-(\beta+\frac{1}{2})}$ nach ganzen Potenzen von a und b den Coefficienten des Gliedes $a^m b^n$ bildet, so dass der genannte Ausdruck gleich

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} a^m b^n \Omega_{m,n}$$

ist. Für einige specielle Fälle werden die Ω in expliciter Form aufgestellt. Wn.

G. Orloff. Ueber einige Polynome mit einer und mehreren Veränderlichen. Diss. Petersburg. 1881. (Russisch).

Der erste Teil dieser Abhandlung des unlängst verstorbenen jungen Mathematikers ist der genauen Darstellung der Eigenschaften derjenigen Polynome gewidmet, die durch Entwickelung der Function $(1-2ax+a^2)^{-\frac{2\alpha+1}{2}}$ nach steigenden Potenzen des a entstehen und zu den von Tschebischew mit dem Namen „die den Legendre'schen ähnlichen Functionen" bezeichneten gehören. Hier finden wir unter Anderm auch die Verallgemeinerung einiger Formeln, die von Didon in seiner Notiz „Sur une intégrale double" (Ann. d. l'Ec. Norm. (1) VII. 1870. p. 89) gegeben sind. Der zweite Hauptteil, zu dem der erste gewissermassen die Vorbereitung enthält, giebt die Entwickelung der Eigenschaften der Function $\Omega_{m,n}\ (x, y, \beta)$ zweier Veränderlichen x und y mit dem Parameter β, die mit denen der Vorigen grosse Analogie haben, auf welche zuerst Hermite aufmerksam gemacht hat (Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables. Comptes rendus. LX, auch Crelle Journal für Mathematik. Bd. 64, Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Borchardt) und denen Didon eine Reihe von Abhandlungen in Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, vom t. V. 1868, p. 229 an gewidmet hat. Der Verfasser giebt da zwei Ausdrücke für die erzeugende Function seiner Polynomen, ein System der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen sie genügen, wobei ein Integral verbessert wird, das von Didon für

Polynome $P_{m,n}$, die dem $\beta = 0$ entsprechen, gefunden wurde; auch den Beweis für die Gleichheit:

$$\iint (1-x^2-y^2)^\beta \, \Omega_{m,n} \, x^\mu y^\nu \, dx \, dy = 0,$$

wo $\mu + \nu < m + n$ ist und den Wert des Integrals

$$\iint (1-x^2-y^2)^\beta \, \Omega_{m,n}^2 \, dx \, dy;$$

dann die Anwendung der gefundenen Formeln zur Entwickelung der Functionen in Reihen nach den $\Omega_{m,n}$ und zur Lösung von zwei Aufgaben über Minima. Durch die letzten Aufgaben kommt der Verfasser zur Betrachtung einer anderen Gruppe von Polynomen derselben Art, die von ihm durch $U_{m,n}(x, y, \beta)$ bezeichnet und durch die Gleichung

$$U_{m,n}(x, y, \beta) = D_{m,n} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^\beta} \frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{\beta+m+n}}{dx^m \, dy^n},$$

wo $D_{m,n}$ eine Constante ist definirt werden, sowie zur Betrachtung der diesen zugeordneten Functionen $B_{m,n}(x, y, \beta)$, deren Erzeugende die Function

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-(\beta+1)}$$

ist. Zum Schluss zeigt der Verfasser, dass in dem Grenzfalle, wo $\beta = \infty$ ist, alle drei Gruppen von Polynomen in eine zusammenfallen. In dieser kann man jedes Polynomen als Product zweier Functionen

$$e^{x^2} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} \quad \text{und} \quad e^{y^2} \frac{d^n e^{-y^2}}{dy^n},$$

die ja von einer Veränderlichen abhängen und zuerst von Tschebischef und Hermite behandelt wurden, erhalten.

Die Orloff'sche Arbeit kann jedem, der mit diesen den Legendre'schen ähnlichen Functionen zweier Veränderlichen mit einem Parameter sich näher vertraut machen will, empfohlen werden, da sie auch reiche literarische Notizen über diesen Gegenstand enthält. Ty.

E. Beltrami. Sulle funzioni cilindriche. Torino, Atti XVI. 201-205.

Der Verfasser zeigt zunächst, wie man aus dem bekannten Integralausdruck für die Bessel'sche Function mit ganzzahligem

Index durch Einführung einer neuen Integrationsvariabeln und Aenderung der Bezeichnung direct die von Herrn C. Neumann aufgestellte Formel erhält:

$$(1)\quad F_0(\sqrt{r^2+s^2+2rs\cos w}) = F_0(r)F_0(s)+2\sum_1^\infty F_n(r)F_n(s)\cos(nw).$$

Die hier mit F_n bezeichnete Function hängt mit der Bessel'schen Function in der gewöhnlichen Bezeichnung durch die Relation zusammen:

$$F_n(ir) = i^n J_n(r).$$

Aus (1) folgt für $r = s$

$$(2)\qquad [F_0(r)]^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F_0(2r\cos\vartheta)\,d\vartheta.$$

Aus der Entwickelung von

$$e^{-(a-b\cos\vartheta)r}$$

nach Cosinus der Vielfachen von ϑ und Integration ergiebt sich ferner die von Lipschitz gefundene Formel

$$(3)\qquad \int_0^\infty F_0(br)\,e^{-ar}\,dr = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Aus (2) und (3) endlich folgt die neue Formel

$$(4)\quad \int_0^\infty \{F_0(br)\,e^{-ar}\}^2\,dr = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\varphi}},\quad a>\sqrt{b^2},$$

eine Formel, die, wie der Verfasser erwähnt, zur Vereinfachung des Ausdrucks für das Potential eines homogenen Kreisrings benutzt werden kann. Wn.

A. Cayley. On the Schwarzian derivative, and the polyhedral functions. Cambr. Trans. XIII. 5-68.

Der Quotient s von irgend zwei Lösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy = 0$$

wird durch eine Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{s'''}{s'}-\frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(p^2+2\frac{dp}{dx}-4q\right)$$

bestimmt, wo die Accente Differentiationen nach x bezeichnen. Die linke Seite nennt Herr Cayley die Schwarz'sche Ableitung und schreibt

$$\{s, x\} = \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2.$$

Wird für die quadratische Form

$$\left(a, b, c, \frac{1}{2}(a-b-c), \frac{1}{2}(-a+b-c), \frac{1}{2}(-a-b+c)\right)(x, y, z)^2$$

die Bezeichnung

$$(a, b, c \therefore)(x, y, z)^2$$

gebraucht, und ist die Gleichung zweiter Ordnung diejenige für die hypergeometrische Reihe, verallgemeinert durch eine homographische Transformation in Bezug auf die Variable x, so ist die resultirende Differentialgleichung dritter Ordnung von der Form

$$\{s, x\} = (a, b, c \therefore)\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{x-b}, \frac{1}{x-c}\right)^2,$$

und in Verbindung mit den algebraisch integrablen Fällen dieser Gleichung entspringen rationale und ganze Functionen von s, die aus dem Polygon, der Doppelpyramide und den fünf regelmässigen Körpern abgeleitet werden und Polyeder-Functionen heissen.

Die Schwarz'sche Ableitung ist implicite anzutreffen in Jacobi's und Kummer's Arbeiten; explicite ist sie zuerst in zwei Abhandlungen von Schwarz aus den Jahren 1869 und 1873 veröffentlicht. Diese ganze Theorie aber ist in ihren wesentlichen Stücken von Klein und Brioschi entwickelt worden.

Im Vorliegenden stellt Herr Cayley die ganze Theorie im Zusammenhange dar und fügt Entwickelungen betreffs der Polyederfunctionen hinzu. Glr. (M.).

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

G. VERONESE. Alcuni teoremi sulla geometria a *n* dimensioni. Rom, Acc. L. (3) V. 333-337.

Zusammenstellung der Hauptresultate aus des Verfassers grösserer Arbeit über denselben Gegenstand in Klein Ann. XIX. 161. Siehe Abschn. VIII. Cap. 5 B. Schg.

W. KRETKOWSKI. Auflösung einer Aufgabe aus der polydimensionalen Geometrie. Par. Denkschr. 1881. (Polnisch).

In einem Raume von n Dimensionen sind $n+1$ Punkte A_ν $(1 \leqq \nu \leqq n+1)$ durch ihre orthogonalen Coordinaten $z_{\mu,\nu}$ $(1 \leqq \mu \leqq n)$ gegeben; man soll die Coordinaten z_μ des von ihnen gleich entfernten Punktes A und diese Entfernung d bestimmen.

Bildet man die Determinante

$$W = \begin{vmatrix} 1, & z_{1,1}, & z_{2,1}, & \dots z_{n,1} \\ 1, & z_{1,2}, & z_{2,2}, & \dots z_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_{1,n+1}, & z_{2,n+1}, & \dots z_{n,n+1} \end{vmatrix}$$

und $n+1$ Determinanten W_μ $(0 \leqq \mu \overline{\gtrless} n)$, indem man in der Determinante W die $(\mu+1)^{\text{te}}$ Verticalreihe durch

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_{\mu,1}^2, \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_{\mu,2}^2, \quad \vdots \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=n} z_{\mu,n+1}^2$$

ersetzt, dann wird

$$d = W^{-1}.(W W_0 + \frac{1}{4}\sum_{\mu=1}^{\mu=n} W_\mu^2),$$

$$z_\mu = \frac{1}{2} W^{-1}.W_\mu. \qquad (1 \leqq \mu \overline{\gtrless} n).$$

Dn.

R. Hoppe. Ueber den Winkel von n Dimensionen.

Hoppe Arch. LXVI. 448.

Ist eine allseitig begrenzte lineare $(n-1)$-Dehnung V der Ort eines variablen Punktes P und C ein fester Punkt im Abstande h von derselben, so ist der Ort von $CP = \varrho$ eine n-dehnige Pyramide, in welcher der n-dimensionale Winkel an der Spitze durch die Formel gegeben ist

$$W = h\int\frac{dV}{\varrho^n}.$$

Da, wenn $\varrho^2 = h^2+r^2$ gesetzt wird, die Variable r innerhalb der $(n-1)$-dimensionalen Figur V bleibt, so ist für $n=4$ die Integration nur eine Cubatur. Schg.

R. Hoppe. Berechnung einiger vierdehniger Winkel.

Hoppe Arch. LXVII. 269-290.

Die in der vorher besprochenen Arbeit gegebene Formel wird für die beiden Fälle specialisirt, dass der Schnitt eines vierdehnigen Winkels und eines Raumes ein Rotationskörper oder ein Polyeder sei. Ist im ersten Fall der Rotationskörper von einer Fläche zweiter Ordnung begrenzt, so ist die Cubatur leicht

ausführbar. Der Fall einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung lässt sich auf den vorigen zurückführen, indem der vorher bestimmte Winkel durch einen neuen Raum geschnitten wird. Im zweiten Falle wird das Schnittpolyeder in rechtwinklige Tetraeder zerlegt, und zwar von einem Punkt aus, der als Projection der Winkelspitze auf den schneidenden Raum gedacht ist. Demnächst wird der Winkel in Teile zerlegt, deren jeder von jenem Raum in einem dieser Tetraeder geschnitten wird. Hier erhält man für den Teilwinkel als Resultat ein einfaches bestimmtes Integral, und für den ganzen Winkel einen aus 24 Functionswerten linear zusammengesetzten Ausdruck. Diese letztere Methode wird schliesslich angewendet, um die Centriwinkel der sechs regelmässigen Polytope zu bestimmen, wobei sich eine Reihe neuer Integrationsformeln ergiebt, die, wie der Verfasser bemerkt, mit Hülfe der gewöhnlichen Geometrie schwerlich aufzufinden sein dürften. Ueberhaupt tritt der Nutzen, den mehrdimensionale Untersuchungen im Gebiete der Functionentheorie gewähren, in allen diesen Resultaten augenfällig hervor. Schg.

R. Hoppe. Regelmässige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen. Hoppe Arch. LXVII. 29-44.

Diese Arbeit enthält zuerst eine Erweiterung des Euler'schen Polyedersatzes auf n-dimensionale Gebilde. Ist nämlich a_r die Anzahl der r-dimensionalen Grenzgebilde eines Gebildes von μ Dimensionen, so besteht die Relation

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{\mu-1} a_{\mu-1} = 1 - (-1)^{\mu}.$$

Indem dann versucht wird, die Methode, welche die Anzahl der regelmässigen Polyeder und diejenigen ihrer Grenzgebilde liefert, auf die Bestimmung der regelmässigen vierdimensionalen Gebilde („Polytope") auszudehnen, stellt sich heraus, dass zwar die erste, nicht aber die zweite Frage ihre Erledigung findet. Man gelangt nämlich zu elf verschiedenen Fällen, aus denen der Verfasser durch ähnliche Betrachtungen wie Stringham (Am. J. III. 1-15, s. F. d. M. XII. 1880. 405) fünf als nicht geeignet aussondert, so dass nur sechs regelmässige Gebilde übrig bleiben. Dagegen

erhält man für die Grenzgebilde nur Verhältniszahlen, weil die oben angeführte Formel für alle graden Werte von μ (also auch für $\mu = 4$) homogen wird. Daher muss die Bestimmung dieser Zahlen empirisch durch Construction der räumlichen Netze erfolgen. Bei diesen Constructionen geht der Verfasser in den drei Fällen der tetraedrischen Körper von einer Ecke, in den drei übrigen von einem Körper aus, in zwei Fällen abweichend von Stringham, der nur das Netz des Hekatonikosaëdroids (Polytop VI.) vom Körper aus construirt. Es mag hierbei bemerkt werden, dass nur im Pentaëdroid jedem Körper eine Ecke gegenüberliegt, in allen anderen Fällen dagegen ein Körper. Aus diesem Grunde hat das Netz in allen diesen fünf Fällen dieselbe einfache Aussengestalt wie seine Teile, wenn man dasselbe auf einem Körper aufbaut. Hinsichtlich der Zahlen der Grenzgebilde gelangt der Verfasser zu denselben Resultaten wie Stringham, ausgenommen das Ikosatetraëdroid (Polytop V.), dessen Zahlen aber durch eine spätere Note des Verfassers (p. 423; s. den folgenden Band der F. d. M.) bereits rectificirt sind. Ausserdem giebt Herr Hoppe noch eine Anzahl metrischer Relationen, nämlich die Längen der verschiedenen Radien, sowie Umfang und Inhalt der sechs Gebilde. Schg.

H. Durège. Ueber Körper von vier Dimensionen.
Wien. Ber. LXXXIII. 1110-1125.

Die zwischen den Begrenzungsstücken eines vierdimensionalen Körpers geltende, der Euler'schen analoge Relation

$$n_0 - n_1 + n_2 - n_3 = 0$$

wird zuerst an „einfachen“, d. h. durch Verschiebung eines Polyeders entstandenen Körpern nachgewiesen, sodann an solchen, die sich durch Abtrennung von Ecken auf einen einfachen Körper (z. B. ein Oktaëdroid) oder ein Pentaëdroid reduciren lassen. Auch wird die Relation an den beiden letztgenannten Gebilden durch Abzählung verificirt. Schliesslich wird die allgemeine (auch von Herrn Hoppe angegebene) im n-dimensionalen Raume geltende Formel für die „einfachen“ Gebilde abgeleitet. Schg.

Müller. Die vierte Raumdimension. Hoffmann Z. XII. 40-41.

An eine Bemerkung Emsmann's anknüpfend bemerkt der Verfasser richtig, dass die vierte Dimension mit einer vierten Rechnungsstufe nichts zu tun habe. Leider ist es nicht überflüssig, solche fast unglaublichen Irrtümer zu widerlegen. Aus der vom Verfasser besonders betonten Gegnerschaft „gegen die vierte Dimension des Raumes“ geht übrigens hervor, dass auch er das weit verbreitete Misverständnis teilt, wonach die vierte Dimension mit dem Erfahrungsraum in Verbindung gebracht wird.

Schg.

G. Forchhammer. Pröver paa Geometri med fire Dimensioner. Zeuthen T. (4) V. 157-166.

In diesem recht interessanten Aufsatze wird gezeigt, wie man mehrere elementare Sätze über Flächen und Körper auf einen Raum mit vier Dimensionen erweitern kann. Ein begrenzter Teil des vierdimensionalen Raumes wird ein „Vierkörper“ genannt; ist derselbe vom dreidimensionalen Raume begrenzt, so wird er als „Vielraum“ bezeichnet. Nach einigen allgemeinen Ueberlegungen giebt der Verfasser erstens die Erweiterung des bekannten Euler'schen Satzes über die Anzahl der begrenzenden Stücke, demnächst untersucht er besonders die regulären „Vielräume“. Von solchen existiren sechs, welche der Verfasser durch die Namen 1) 5-Raum, 2) 8-Raum, 3) 16-Raum, 4) 24-Raum, 5) 120-Raum und 6) 600-Raum bezeichnet. Für den regulären „Fünfraum“ ist z. B.

$$P = 5, \quad S = 10, \quad K = 10, \quad H = 5,$$

wenn die Buchstaben der Reihe nach die Anzahl der Polyeder, Seiten, Kanten und Ecken bedeuten.

Gm.

H. Cox. Homogeneous coordinates in imaginary geometry. Quart. J. XVIII. 178-215.

Nach einer übersichtlichen Darstellung der Hauptunterschiede zwischen den drei Geometrien wendet sich der Verfasser spe-

ciell zu der nicht-euklidischen und benutzt homogene Coordinaten, um die wichtigsten Formeln aus der Geometrie einer Fläche in symmetrischer Gestalt zu erhalten. Schg.

H. Noth. Die Arithmetik der Lage. Leipzig. A. Barth.

Dieses Buch, dessen Erscheinen der Verfasser nur um wenige Monate überlebt hat, enthält eine erneute Darstellung und weitere Ausführung der in zwei früheren Programm-Abhandlungen (siehe F. d. M. XI. 1879. 360) veröffentlichten Untersuchungen über eine Analysis der Geometrie der Lage. Neu hinzugekommen ist zunächst eine Anwendung des Grassmann'schen Begriffes der gemeinsamen und der verbindenden Gebiete zweier Gebilde auf die räumlichen Gebiete. Ist ferner der Punkt A aus den Punkten e_1 und e_2 mittels der Zahlen α_1 und α_2 abgeleitet, so dass $A = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ ist, so wird A die projectivische Summe von e_1 und e_2 genannt, und es wird abgekürzt $A = e_1 + e_2$ geschrieben. Das „projectivisch-geometrische" Product von Punkten ist mit dem combinatorischen Producte der Ausdehnungslehre identisch, dessen enge Beziehung zum Determinantenbegriff auch hier zum Vorschein kommt. Es werden dann allgemein die beiden Aufgaben gelöst, einen Punkt des geometrischen Netzes aus den ihn bestimmenden ganzzahligen Coefficienten zu construiren, und für einen gegebenen Punkt des Netzes diese Zahlen zu bestimmen. Der Ausdehnungslehre fremd ist der Begriff des „projectivisch-arithmetischen" (früher „numerischen") Productes zweier Punkte, welches denjenigen Punkt vorstellt, dessen Ableitungszahlen die Producte aus denjenigen der gegebenen Punkte sind. Die projectivische Addition und Subtraction nebst der projectivisch-arithmetischen Multiplication und Division bilden die Rechnungsinstrumente der „Arithmetik der Lage" und werden im letzten Abschnitte benutzt, um die Verwandtschaft zwischen einer Punktreihe und der Reihe der Quadrate dieser Punkte (Punktreihe zweiter Ordnung, Kegelschnitt) zu untersuchen, wobei auch die Polarentheorie, sowie das Pascal'sche Sechseck Beachtung finden. Terminologie und Bezeichnungsweise sind überall angemessen.

Ueberblickt man nun das Ganze in seinem Verhältnis zur Ausdehnungslehre, so gewährt der Begriff der projectivischen Addition durch die Ausscheidung der für die reine Geometrie der Lage unwesentlichen Masszahlen die Grundlage des besten für die Anfangsgründe dieser Wissenschaft erdenklichen Formalismus, der sich unter Anwendung ganzzahliger Coefficienten besonders in der Theorie der geometrischen Netze bewährt, während die Bedeutung desselben weiterhin gegen die des ebenfalls von Masszahlen freien combinatorischen Productes zurücktritt. Ferner kann die Arithmetik der Lage erfolgreich zur geometrischen Darstellung zahlentheoretischer Beziehungen benutzt werden. (Die vom Verfasser in dieser Richtung gemachten Versuche sind leider nicht publicirt worden). Dagegen scheint die geometrische Bedeutung der projectivisch-arithmetischen Multiplication trotz ihrer vielseitigen Anwendungen geringer zu sein als die der combinatorischen. Möchten die Untersuchungen des im besten Mannesalter seiner Tätigkeit entrissenen Forschers nach den oben angedeuteten Richtungen hin bald von anderer Seite fortgesetzt werden!

Schg.

W. W. Beman. A brief account of the essential features of Grassmann's extension algebra. Anal. VIII. 96.

Uebersetzung des Berichtes über die Grassmann'sche Arbeit aus Grunert's Archiv VI. 1845. Jn. (O.).

Capitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

De Polignac. Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications. S. M. F. Bull. IX. 30-42.

Fortsetzung und Schluss der im vorigen Bande (p. 409) besprochenen Arbeit.

Aehnlich wie Herr Tait erhält der Herr Verfasser ein Bild eines vorliegenden (auch nicht geschlossenen) Knotens (ramification) mittels eines Zahlenschemas, das die Verbindung der einzelnen Knotenpunkte (noeuds) untereinander wiederspiegelt, z. B.:

12 24 37 ...
13 25
26
etc.

Daraus kann man ohne Weiteres die Art einzelner Zweigteile, z. B.

124, 137 etc.

entnehmen. Indem man diese in horizontalen Reihen anordnet, vereinfacht sich obiges Schema, z. B.:

126
137
524
etc.

Solcher Zusammenstellungen sind natürlich noch verschiedene möglich, jedenfalls aber muss, wenn zwei solche Schemata demselben Knoten entsprechen sollen, dieselbe Zahl auch immer von denselben Zahlen eingefasst sein. Es wird dann eine canonische Form durch die Bedingung hergestellt, dass die Zahl der Horizontalreihen ein Minimum wird. Dann heisst das Schema „irreductibel". Auch dieser giebt es mehrere, aber völlig aequivalente. Die Bedingung der Irreductibilität wird einfach dadurch erfüllt, dass kein Zahlzeichen öfters als in einer (horizontalen) Reihe auswärts (am linken oder rechten Ende) stehen darf. Ist R die Zahl der Reihen, so stellen sie R Teilzüge des Knotens dar, abgesehen von den von selbst hinzukommenden Verbindungswegen r. Mithin ist die Fundamentalzahl N (cf. F. d. M. XI. 1879. 362), die Zahl der von Knotenpunkt zu Knotenpunkt reichenden Züge

$$N = R + \Sigma\nu.$$

Um das Schema zu weiteren Folgerungen noch brauchbarer zu gestalten, wird jedem (sich auf einen Knotenpunkt beziehenden) Zeichen ein Index α beigelegt, die Zahl der durch ihn gehenden

Aeste. Dann resultirt die weitere Formel, die Umformung der vorigen:

$$N = R+\Sigma\frac{a+1}{2}.$$

Darin lässt sich der zweite Term mittels zweier anderer Zahlengruppen m und c in der Weise ersetzen, dass für jeden Knotenpunkt

$$\frac{m+1}{2} = \frac{c+1}{2}+\frac{a+1}{2}$$

ist. Dabei ist m die Ordnung des Punktes, mithin $\frac{m+1}{2}$ die Anzahl der um ihn herumführenden Wege (wenn man ihn als isolirt betrachtet); c ist dagegen seine „Connexität“, d. i. die Zahl der Zweige, die ihn mit anderen Knotenpunkten verbinden. Dadurch wird das Problem der Aufstellung der irreductibeln Schemata identisch mit dem zahlentheoretischen: Die beiden Gleichungen

$$x_1+x_2+\cdots+x_\nu = 2(\nu-1),$$

$$\left(\frac{x_1+1}{2}\right)+\left(\frac{x_2+1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{x_\nu+1}{2}\right) = F,$$

wo ν, F bekannte, die x dagegen unbekannte ganze Zahlen sind, aufzulösen; dieses Problem wird demnach durch das erste einfachere gelöst. My.

F. Lippich. Zur Theorie der Polyeder. Wien. Ber. LXXXIV. 20-29.

Godt. Untersuchungen über Polyeder von mehrfachem Zusammenhang. Pr. Lübeck.

Der Euler'sche Satz, nach dem die Zahl der Ecken weniger der Zahl der Kanten mehr der Zahl der Flächen gleich zwei ist, oder in Zeichen

$$e-k+f = 2,$$

kann bekanntlich für ein Polyeder in allgemeinerem Sinne, d. i. ein beliebiges verästeltes Liniensystem auf einer mehrfach zusammenhängenden Fläche, erweitert werden, und nimmt dann die Form an:

$$e-k+f = 2+(1-p),$$

wo p der (Riemann'sche) Grad des Zusammenhangs der Fläche ist.

Herr Godt leitet dies Resultat mittels einfacher Ueberlegungen aus der Analysis situs ab, indem er der Reihe nach Polyeder be-

trachtet, für die $k-e$ constant bleibt, um 1, 2, etc. abnimmt. Herr Lippich benützt beim Beweise noch einige Formeln einer früheren Arbeit (Wien. Ber. LXIX.) und lehnt sich im Uebrigen an die übliche Behandlung einer Riemann'schen Fläche an. Dadurch erlangt er eine grössere Durchsichtigkeit der Formel, die bei ihm lautet:

$$e-k+f = 2+(q'-q).$$

Dabei ist q' die Zahl der Querschnitte, die nötig sind, um alle Flächen des Polyeders, dagegen q die Zahl derjenigen, die die Polyederoberfläche selbst einfach zusammenhängend machen. Solange also diese beiden Zahlen gleich sind, gilt der Euler'sche Satz in der gewöhnlichen Gestalt. Bei beiden Verfassern wird, wie gewöhnlich, unter Grad des Zusammenhangs einer Fläche derjenige verstanden, den sie nach Ausscheidung irgend eines einfach zusammenhängenden Stückes (z. B. einer unendlich kleinen Kreisfläche) erhält.

Herr Godt wendet sich sodann einem allgemeineren Probleme zu, das als eine Erweiterung des von Herrn C. Jordan (Borchardt J. LXVI. 70) behandelten anzusehen ist. Von irgend einer Basis (einer Ecke nebst einer von ihr auslaufenden Kante) ausgehend kann man immer ein vollständiges Bild (aspect) der Polyederconfiguration erhalten. Liefern verschiedene Basen denselben Aspect, so findet eine „n-fache Symmetrie" statt, und man kann in diesem Sinne nach allen auf einer Fläche gegebenen Zusammenhangs möglichen Symmetrien fragen. Diese Frage lässt sich auch als eine substitutionentheoretische auffassen und grade diese Fassung gewährt erhebliche Vorteile. Die n aequivalenten Basen, die einer n-fachen Symmetrie zu Grunde liegen, liefern eine transitive Gruppe, deren Ordnung und Grad gleich sind. Da n ein Teiler der Anzahl der Basen des Polyeders sein muss, und alle so entstehenden Gruppen isomorph sind, genügt es, eine einzige solche Gruppe zu untersuchen. Wird die Gruppe zu einer solchen, die nur die Potenzen einer einzigen Substitution enthält, so wird die Symmetrie zu einer „Rotation".

Zunächst wird ein vorliegendes symmetrisches Polyeder auf eine canonische Form gebracht (mittels eines einfachen morpholo-

gischen Processes), in der keine Fläche mehr eine Rotation besitzt. Man gelangt so zu dem Hülfssatz:

„Jedes Polyeder mit n-facher Symmetrie kann auf eine canonische Form gebracht werden, in der es n rotationslose Flächen besitzt und entweder lauter Ecken mit Rotation oder lauter Ecken ohne Rotation hat und dann nur ein einziges System."

Mit Hülfe dieses Satzes versucht dann der Herr Verfasser, in der Tat alle symmetrischen Polyeder zu construiren, indem er auf alle mögliche Weisen n gleiche Polygone zu einem symmetrischen Polyeder zusammensetzt. Die Durchführung dieses Verfahrens führt ihn zu der Fundamentalformel für die gesuchten Polyeder, die die Relation zwischen der erwähnten transitiven Gruppe und dem Grad des Zusammenhangs des Polyeders darstellt, und die als eine Modification der (erweiterten) Euler'schen Formel angesehen werden muss:

$$p = 3+n(k-1)-\Sigma\frac{n}{n_i},$$

wo die n_i die Rotationszahlen für die Eckensysteme sind.

Bei der Anwendung ergiebt sich, dass die Zahl der Symmetrietypen für die Euler'schen Polyeder, wie Herr C. Jordan schon zeigte, gleich fünf ist, dagegen die analoge Zahl für die (nicht-Euler'schen) Polyeder auf der einfachen Ringfläche gleichfalls fünf, während Herr Jordan deren nur drei anführt, mithin nach des Verfassers Angabe zwei Fälle übersehen hat. Diese fünf Typen werden im Einzelnen discutirt und sind von Zeichnungen begleitet. Für Polyeder höheren Zusammenhangs zeigt sich (cf. Jordan l. c.), dass die Symmetrieordnung immer ein endliches Maximum hat. Während so das Problem für die Polyeder von ein- und dreifachem Zusammenhang erledigt ist, wird das (endliche) Verfahren, das zur allgemeinen Lösung führt, am Schluss angegeben. Man hat demnach alle nicht isomorphen Substitutionengruppen, deren Ordnung die Zahl $42(p-3)$ nicht übersteigt, aufzustellen und davon nur einen Teil auszuschliessen, der gewisse (aufgestellte) Nebenbedingungen nicht erfüllt.

My.

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

E. Hoffmann. Der Anfangsunterricht in der Geometrie. Pr. Reichenbach i. Schl.

Mz.

J. C. V. Hoffmann. Vorschule der Geometrie. 2. Lief. Halle a. S. Nebert.

Der Herr Verfasser hatte dies Buch ursprünglich für die niederen Classen höherer Schulen (bis Quarta) bestimmt; er ist aber der Ansicht, dass es sich weit mehr für den Gebrauch von Seminar- und Volksschullehrern eignet. Der Inhalt dieser vorliegenden zweiten Lieferung ist: Flächenerzeugung, Flächengleichheit und Flächenverwandlung (Zurückführung der Vielecksfläche auf eine Dreiecksfläche etc.), Ausmessen und Proportionalität der Figuren und ihrer Elemente, Aehnlichkeit der Figuren, krummlinige Figuren und noch einige Anhänge. Von den krummlinigen Figuren giebt der Herr Verfasser: 1) Die Wellenlinie, die aus congruenten Halbkreisbogen zusammengesetzt ist; 2) Die Spirale (Schneckenlinie) gleichfalls aus Halbkreisbogen, aber mit verschiedenen Radien gebildet. Ferner: Geschlossene Curven, die aus Kreisbogen mit verschiedenen Radien so zusammengesetzt werden, dass keine Unterbrechung des Gewundenen entsteht (wie die Eilinie, die Korblinie). Es folgt dann die Ellipse, die in bekannter Weise definirt wird; Inhaltsberechnung und Tangente der Ellipse. Zum Schluss wird an den Kegel und die beiden anderen Kegelschnitte erinnert. Mz.

S. Dickstein. Anfangsgründe der Geometrie in einer Reihe von Aufgaben. T. I. Warschau.

Dn.

A. Barbocka. Geometrische Formenlehre. Prag. (Böhmisch).

Std.

F. Hoza. Grundzüge der ebenen Geometrie.
Prag. (Böhmisch).

Ergänzt das früher schon herausgegebene Lehrbuch der Geometrie im Raume zu einem Schulbuch für die Unterklassen der böhmischen Mittelschulen. Reichhaltigkeit des Inhaltes erscheint hier vom Standpunkte der Schule kaum als Vorzug.

Std.

V. Jarolímek. Geometrie für die IV. Realschulklasse. Prag. (Böhmisch).

Ist als Lehrbuch der neuesten Verordnung des K. K. Unterrichtsministeriums angepasst und zeichnet sich sowohl der Form wie dem Inhalte nach vor gewöhnlichen Lehrbüchern durch concise und gediegene Ausarbeitung, namentlich aber auch durch schöne Holzschnittfiguren aus. Std.

J. Menger. Grundlehren der Geometrie. Wien. A. Hölder.

Dieser Leitfaden ist für den Unterricht in der Geometrie und im geometrischen Zeichnen an Realschulen bestimmt. Das Buch enthält die Grundlehren der ebenen und räumlichen Geometrie in dem Umfange und der Anordnung, wie der neue in Oesterreich 1880 gegebene Lehrplan vorschreibt, mit vielen Uebungsaufgaben und Beispielen; es soll ein Leitfaden und Hilfsbuch für Lehrer und Schüler sein. Zuerst werden practische Anweisungen zum geometrischen Zeichnen gegeben; dann folgt die ebene Geometrie, von der Geraden und den Winkeln an bis zum Umfang und Inhalt des Kreises. Hierauf kommt die räumliche Geometrie bis zur Messung von Polyedern, Cylinder, Kegel und Kugel. Endlich werden die Kegelschnittlinien behandelt, wobei sich gezeigt wird, wie die in der analytischen Geometrie ge-

benen Gleichungen dieser Curven herauskommen. Am Schlusse findet sich die Besprechung der Affinität ebener Figuren und e Anwendung hiervon auf die Kegelschnitte. Mz.

REVE. Lehrbuch der Mathematik. Berlin. Stubenrauch.

Es liegen von diesem Werke zwei Curse vor; der erste aus zwei 'eilen: Geometrie und Arithmetik bestehend, der zweite: Planietrie. Der Inhalt des Buches ist der dem Elementarunterricht ntsprechende. Es unterscheidet sich dies Buch von den meisten nderen dadurch, dass der Lehrstoff nach einem ziemlich genau ngegebenen Plane der Zeitbenutzung im Semester angeordnet ist. Mz.

. SATTLER. Leitfaden der Geometrie. Braunschweig. H. Bruhn.

Es ist dies ein für die Volksschule berechnetes Buch mit :ei Cursen: Erst geometrischer Anschauungs-, dann geometrischer lementarunterricht. Ein sehr billiger Preis und verhältnismässig ute Ausstattung dienen dem Buch zur Empfehlung. Mz.

. PETERSEN. Lehrbuch der elementaren Planimetrie. Kopenhagen. Höst.

Das kleine Buch, welches auf 105 Seiten die wichtigsten itze der Planimetrie und in einem Teile der 228 Aufgaben Erinzungen des Lehrstoffes bietet, genügt modernen Anforderungen irch die Strenge der von der herkömmlichen mehrfach abeichenden Anordnung und durch die ausgiebige, wenn auch nicht incipiell durchgeführte Berücksichtigung des Bewegungsbegriffes id empfiehlt sich überdies durch Klarheit und Kürze der Darellung. Die Begründungen sind natürlich vielfach nur angeutet, aber, wo erforderlich, von genügender Ausführlichkeit. eu wird wohl den meisten Lesern die in Vergessenheit getene, sehr praktische Francoeur'sche Behandlung der incomensurablen Verhältnisse sein. Das Verdienst, dieselbe für

Schulzwecke wieder in den Vordergrund gerückt zu haben, gebührt dem Herausgeber der deutschen Ausgabe dieses Buches, Herrn Dr. v. Fischer-Benzon in Kiel. Schg.

A. Milinowski. Die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. Leipzig. Teubner.

Vorliegendes Werk hat zwei gesonderte Teile: Planimetrie und Stereometrie; in letzterem ist Lehrbuch und Uebungsbuch gleichfalls getrennt. In gedrängter Kürze und im Wesentlichen nicht von anderen Lehrgängen abweichend, findet sich Alles vor, was dem Titel gemäss zu erwarten ist, und zwar in sehr reichhaltigem Masse. Es ist z. B. der Feuerbach'sche Satz darin, Sätze über Aehnlichkeitspunkte von Kugeln, die Grundeigenschaften der Kegelschnitte, die Guldin'sche Regel und auch die Lehre vom Grössten und Kleinsten. Was die Methode des Lehrbuchs betrifft, so möchte Referent nur bemerken, dass er damit nicht einverstanden ist, die Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks unabhängig von den Congruenzsätzen und vor denselben rein durch das Princip der Bewegung abzuleiten. Sachlich ist wohl nichts dagegen einzuwenden; ob es sich aber in dieser Darstellung für den Quartaner oder Tertianer eignet, möchte Referent, wie gesagt, bezweifeln. Im Uebrigen ist aber das Buch sehr zu empfehlen; einmal wegen des darin enthaltenen reichhaltigen Uebungsmaterials, und dann, weil auch der Lehrgang den Schulunterricht nicht überflüssig macht, sondern ihn nur in zweckmässiger Weise für den Schüler bei seiner häuslichen Beschäftigung ersetzt. Mz.

C. Meyer. Lehrbuch der Geometrie für Gymnasien und andere Lehranstalten. Dreizehnte Aufl., herausgeg. von Prof. Martus. I. Teil. Planimetrie. Leipzig. G. A. Koch.

Der Inhalt dieses Werkes entspricht dem gewöhnlich befolgten Lehrgange der Planimetrie auf höheren Schulen. Zur besseren Uebersicht ist das Ganze in drei Curse geteilt, von denen der

erste für Quarta, der zweite für Untertertia, der dritte für Obertertia bestimmt ist. Gründlichkeit ist dem Buche nicht abzusprechen. So ist z. B. das, was Commensurabilität und Incommensurabilität angeht, in aller Vollständigkeit dargelegt; aber für die bezeichneten Gymnasialklassen dürfte dies wohl etwas zu weit gehen. Auch sind einige Paragraphen der harmonischen Teilung gewidmet, und zwar mit der Bemerkung, dass dies falls es dem Schüler noch zu schwer erscheint, erst später durchgenommen werden möge. Endlich ist auch die Kreisberechnung mit aller nur wünschenswerten Ausführlichkeit gegeben, wobei die hauptsächlichsten Beweise apagogisch geführt werden. Referent hält das Buch für sehr nützlich und empfehlenswert, glaubt aber, dass die eigentlichen Vorzüge desselben erst bei einer Durchnahme in Secunda zur Geltung kommen. Mz.

C. Spitz. Lehrbuch der ebenen Geometrie, nebst Anhang zu diesem Lehrbuche. Achte verbess. u. verm. Aufl. Leipzig u. Heidelberg. Winter.

Es ist dies ein sehr ausführliches Lehrbuch mit einer Sammlung von 800 Uebungsaufgaben, deren Auflösungen im Anhange angedeutet oder gegeben werden. Der Herr Verfasser ist schon kurz vor dem Erscheinen der siebenten Auflage gestorben: die gegenwärtige achte Auflage ist durch den Sohn des Verfassers besorgt worden. Da das Buch nicht nur zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten, sondern auch zum Selbststudium bestimmt ist, so muss es viel mehr, als ein anderes Buch in's Einzelne gehen und die vorzubringenden Gegenstände von den verschiedensten Seiten beleuchten. Dies thut es auch in dankenswerter Weise. Der Plan des Ganzen ist von dem gewöhnlichen Lehrplan, wie er auf Schulen meistens innegehalten wird, nicht abweichend. Bei der Aehnlichkeit der Figuren ist auch das Berührungsproblem des Apollonius gegeben. Am Schlusse sind die Doppelverhältnisse erklärt und wird das Wesentliche über Involution gegeben. Mz.

J. Henrici und P. Treutlein. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. I. Leipzig. Teubner.

In diesem ersten Teile ist die Gleichheit planimetrischer Grössen und die congruente Abbildung in der Ebene behandelt. Der ganzen Anlage nach unterscheidet sich dieses Buch wesentlich von anderen Lehrbüchern der Geometrie. Die Herren Verfasser kennzeichnen selbst im Vorworte den Plan ihres Werkes, indem sie sagen: „Gegenüber der Starrheit und Unbeweglichkeit der geometrischen Gebilde bei Euklid führt in der modernen Betrachtungsweise die Entstehung der Gebilde durch Bewegung und Aenderung ihrer Lage zu einer grösseren Anschaulichkeit und natürlicheren Beweisführung.“ Die nähere Skizzirung des im Werke Dargebotenen würde den Umfang eines Referates überschreiten; es sei nur gesagt, dass das Buch allerdings nach dem angegebenen Grundsatz durchweg abgefasst ist. Wie weit sich dieser Standpunkt aber beim Unterrichte einer Tertia (für die das Buch bestimmt ist) bewähren wird, bleibt nach Meinung des Referenten immer noch abzuwarten.

Mz.

J. Casey. A sequel to the first six books of the Elements of Euclid containing an easy introduction to the modern geometry. With numerous examples. Dublin. University Press.

Das Buch besteht aus Ergänzungen zu den sechs ersten Büchern der Elemente Euklid's und aus einer Reihe von systematisch angeordneten Uebungen, welche jedem Abschnitte folgen. Es ist in fünf Capitel geteilt, welche den Büchern I, II, III, IV, und VI des Euklid entsprechen. Die Ergänzungen zu den Büchern I-IV bestehen je aus zwei Abschnitten, nämlich 1) Ergänzende Sätze. 2) Uebungen. Es finden sich hier neue Beweise für Sätze, wie z. B. der Feuerbach'sche und andere. Das Supplement zu Buch VI umfasst ungefähr die Hälfte des ganzen Buches und besteht aus acht Abschnitten, deren Ueberschriften hier

folgen: I. Additional propositions. II. Centres of similitude. III. Theory of harmonic sections. IV. Theory of inversion. V. Coaxal circles. VI. Theory of anharmonic sections. VII. Theory of poles and polars and reciprocation. VIII. Miscellaneous exercises. Der grössere Teil der Sätze in dieser Abteilung ist den Schriften von Chasles, Salmon und Townsend entnommen, ein grosser Teil ist jedoch dem Verfasser eigentümlich, namentlich in den Beweisen.

Der Verfasser hat mit dieser Arbeit beabsichtigt, alle die Sätze der modernen Geometrie nach einem gewissen Principe zu sammeln und zu ordnen, welche dazu dienen, den Uebergang von der Euklid'schen Geometrie zu vermitteln. Glr. (O.).

H. Klaas. Die Lehre von der Flächenvergleichung, Verwandlung und Teilung der ebenen Figuren für die Zwecke des Unterrichtes zurechtgelegt und mit methodischen Bemerkungen versehen. Festschr. Duisburg.

Mz.

Stoltz. Ueber Construction algebraischer Ausdrücke. Pr. Ruhrort.

Der Herr Verfasser hebt in der Einleitung seiner im Wesentlichen zum Nutzen der Schüler geschriebenen Arbeit hervor, welchen wichtigen Rang die Geometrie unter den Specialdisciplinen der Mathematik in Schulen einnimmt. Er geht dann besonders zur Besprechung solcher Constructionsaufgaben über, welche die beiden mathematischen Hauptdisciplinen in gleicher Weise berücksichtigen, also Aufgaben, in welchen die Verhältnisse von Raumgrössen in arithmetische Formeln zu kleiden, und umgekehrt nachher aus den Formeln Raumgrössen wieder darzustellen sind. Da der einem Schulprogramm zugemessene knappe Raum keine grössere Ausführlichkeit gestattet, so beschränkt sich der Herr Verfasser auf das planimetrische Gebiet, und betrachtet dann der Reihe nach Ausdrücke 0ter Dimension (die als solche nicht con-

struirbar sind, wie:

$$\frac{a}{b}, \frac{ab}{cd}, \frac{a^2}{b^2}, \sqrt{n}, \sqrt{2} \text{ u. s. w.};$$

ferner Ausdrücke erster Dimension:

$$\frac{a}{n}, a \pm b, \frac{ab}{c}, \sqrt{ab}, \sqrt{a^2 \pm b^2},$$

wo jede einzelne Gruppe besonders abgehandelt und die bezügliche Construction gezeigt wird; hierauf Ausdrücke zweiter Dimension:

$$ab, \frac{ab}{2}, \frac{abc}{d}, a^2 \pm b^2 \text{ etc.}$$

Am Schluss fügt der Herr Verfasser zur Uebung im geometrischen Lösen und in der Construction der Ausdrücke einige dem rechtwinkligen Dreiecke entliehene Formeln, und noch einige Inhaltsformeln hinzu. Mz.

J. Scheffer. On the ratio of the area of a given triangle to that of an inscribed triangle. Anal. VIII. 173-174.

Wenn die Ecken des eingeschriebenen Dreiecks durch Transversalen bestimmt sind, welche sich in einem Punkte schneiden, so ist das Verhältnis $2\alpha\beta\gamma$, wo α, β, γ die Bruchteile der geschnittenen Seiten sind. In. (O.).

Gauss. Berechnung der Höhe und des Höhenfusspunktes aus den drei Seiten eines ebenen Dreiecks. Jordan, Z. f. V. IX. 339. 1880.

Behren. Berechnung der Höhe und des Höhenfusspunktes aus den drei Seiten eines ebenen Dreiecks. Jordan, Z. f. V. IX. 453. 1880.

B.

J. Neuberg. Sur le centre des médianes antiparallèles. Math. I. 153-154, 173-176, 185-190.

Der Punkt K der Ebene eines Dreiecks ABC, dessen Entfer-

nungen von den Seiten den Längen derselben proportional sind, hat eine Fülle von Eigenschaften, die ihn in die Zahl der merkwürdigen Punkte des Dreiecks einreihen. Herr J. Neuberg hat die schon bekannten Sätze über den Punkt (in Deutschland Grebe'scher Punkt genannt) zusammengestellt und einige neue hinzugefügt.

Sind x, y, z die Entfernungen eines Punktes von den Seiten von ABC, so ist K der Punkt, für den $x^2+y^2+z^2$ ein Minimum ist (Gauss); er ist auch der Mittelpunkt der Ellipsen, die von den Punkten beschrieben werden, für welche $x^2+y^2+z^2$ constant bleibt (E. Césaro).

Die Geraden AK, BK, CK, von Herrn Lemoine „médianes antiparallèles" genannt, sind Symmetrische der Medianen von ABC in Bezug auf die Winkelhalbirenden; sie teilen die entsprechenden Seiten im Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten, und gehen durch die Schnittpunkte A', B', C' der Tangenten, die in A, B, C an den Kreis ABC gelegt sind. K ist der Schwerpunkt des Dreiecks, das zu Ecken die Projectionen von K auf die Seiten von ABC hat.

A_1, B_1, C_1 mögen die Projectionen von K auf die in den Mitten der Seiten von ABC errichteten Lote sein. Dann sind die gleichschenkligen Dreiecke A_1BC, B_1AC, C_1AB ähnlich; der Winkel an der Basis genügt der Formel

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cot} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C. \quad \text{(Brocard).}$$

Die Geraden AC_1, BA_1, CB_1 schneiden sich in einem Punkte w, ebenso die Geraden BC_1, CA_1, CB_1 in einem zweiten w', Die Punkte w, w', von Herrn Neuberg Brocard'sche Punkte genannt, sind die Brennpunkte eines Kegelschnittes, der die Seiten von ABC in den Fusspunkten der antiparallelen Medianen berührt. Der Mittelpunkt O des Kreises ABC und die sechs Punkte w, w', K, A_1, B_1, C_1 liegen auf einem Kreise, dem Brocard'schen Kreise, welcher der geometrische Ort der Mittelpunkte der antiparallelen Medianen der Dreiecke ist, die ABC umschrieben sind, und deren Seiten denselben Winkel mit einer anliegenden Seite von ABC bilden.

Die zu den Seiten des Dreiecks $A' B' C'$ durch K gezogenen und resp. von den Winkeln A, B, C begrenzten Parallelen sind

untereinander gleich (Lemoine); ihre Endpunkte liegen auf einem Kreise und sind die Ecken zweier Dreiecke, die ABC einbeschrieben sind, und deren Seiten senkrecht zu denen von ABC sind. Dieselben Punkte sind die Scheitel dreier ABC eingeschriebener rechter Winkel. K ist der Schnittpunkt der Geraden, die die Mitten der Seiten von ABC mit den Mitten der entsprechenden Höhen verbinden.

Es sei $\alpha\beta\gamma$ ein Dreieck, gebildet von Parallelen zu BC, CA, AB in Entfernungen proportional diesen Seiten. Die Seiten der Dreiecke ABC und $\alpha\beta\gamma$, deren Aehnlichkeitspunkt K ist, schneiden sich in sechs Punkten eines Kreises, deren Mittelpunkt auf KO liegt; sie liegen auch auf dem Umfang eines zu $A'B'C'$ in Bezug auf K homothetischen Dreiecks $\alpha''\beta''\gamma''$.

Die durch K zu den Seiten von ABC gezogenen Parallelen schneiden den Umfang von ABC in sechs Punkten eines Kreises (Lemoine). Die Projectionen der Fusspunkte H_a, H_b, H_c der Höhen von ABC liegen ebenfalls auf einem Kreise. Der Mittelpunkt desselben liegt in der Mitte der Geraden, die die Punkte J_a, J_b, J_c, die Schnittpunkte der Höhen der Dreiecke AH_bH_c, BH_cH_a, CH_aH_b, verbinden. Die Mittelpunkte der antiparallelen Medianen der Dreiecke ABC, $H_aH_bH_c$ liegen in gerader Linie mit dem Schnittpunkt der Höhen von ABC (Aubel). Siehe auch die Arbeiten von Hain (F. d. M. VII-XI.). Mn. (O.)

E. Hain. Ueber das Transversalensystem zweier Punkte.

Hoppe Arch. LXVI. 280-281.

Es werden mit trimetrischen Coordinaten einige Sätze am ebenen Dreieck bewiesen; der erste dieser Sätze lautet: „Sind P, Q zwei Punkte in der Ebene des Dreiecks ABC, und trifft AP die Seite BC in P_a, liegt ferner auf BC der Punkt Π_a zu P_a harmonisch, und betrachtet man die Harmonikale $\Pi_a\,\Pi_b\,\Pi_c$ des Punktes P, so trifft diese die Geraden AQ, BQ, CQ in je einem Punkte $\mathfrak{P}_a$, $\mathfrak{P}_b$, $\mathfrak{P}_c$, und es müssen dann die drei Geraden $P_a\mathfrak{P}_a$, $P_b\mathfrak{P}_b$, $P_c\mathfrak{P}_c$ durch denselben Punkt gehen.“ Hieran schliessen sich noch einige Folgerungen. Mz.

E. Hain. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf den Umkreis eines Dreiecks. Hoppe Arch. LXVII. 106-109.

Einige Sätze über Oerter von Punkten, deren Potenz in Bezug auf den Umkreis eines Dreiecks gegebenen Bedingungen genügt. Mz.

J. Lange. Ein Beitrag zur Theorie der merkwürdigen Punkte im Dreieck. Hoppe Arch. LXVI. 220-224, LXVII. 191-203. Mz.

Kiehl. Zur Theorie der Transversalen. Pr. Bromberg.

Es werden in dieser Abhandlung zuerst die Gegenpunkte eines Dreiecks besprochen; und zwar erst die Winkelgegenpunkte, die schon mannigfach betrachtet sind; dann aber auch die Seitengegenpunkte, die der Herr Verfasser definirt. Gehen nämlich durch die Ecken A, B, C eines Dreiecks Transversalen, die in einem Punkte P zusammentreffen, und zieht man durch dieselben Ecken drei andere Transversalen Ax, By, Cz, so dass die Winkel $BAP = CAx$; $CBP = ABy$; $ACP = BCz$, so treffen sich Ax, By, Cz im Winkelgegenpunkte Q von P. Wenn aber andererseits die nach P gehenden Transversalen AP, BP, CP die Seiten BC, CA, AB resp. in α, β, γ treffen, und man zieht durch A, B, C andere Transversalen, welche BC, CA, AB resp. in α', β', γ' treffen, so dass $B\alpha = C\alpha'$, $C\beta = A\beta'$, $A\gamma = B\gamma'$, so schneiden sich diese neuen Transversalen $A\alpha'$, $B\beta'$, $C\gamma'$ im Seitengegenpunkte Q' von P. Es folgen nun einige metrische Relationen, ferner einige Sätze. Dann wird in einem zweiten Abschnitte der Winkelgegenpunkt des Schwerpunkts vom Dreieck ABC eingehender betrachtet. Mz.

L. Saalschütz. Anzahl der innern Diagonalschnitte eines Vierecks. Hoppe Arch. LXVI. 331-332.

Es werden zwei Methoden gegeben, die Anzahl der Schnittpunkte der Diagonalen innerhalb eines Polygons zu finden. Die

zweite, kürzere von ihnen ist folgende: Je zwei sich schneidende Diagonalen kann man als Diagonalen eines Vierecks ansehen, dessen Seiten Polygonseiten oder andere Diagonalen sind. Da nun jedes Viereck einen Diagonalschnittpunkt hat, so ist die Anzahl x der Diagonalschnittpunkte gleich der Anzahl der Vierecke, die sich durch Combination von je vier Punkten aus n Punkten bilden lassen, d. h.

$$x = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Hierzu wird noch die Frage aufgeworfen: Wie viel an einander stossende Figuren werden durch die Diagonalen des Polygons innerhalb desselben gebildet? Mz.

P. Schönemann. Ueber die Verwandtschaft des Rechtecks mit einem Quadrat. Schlömilch Z. XXVI. 208.

Mz.

Schnell. Uebungsaufgabe für Schüler. Hoppe Arch. LXVII. 333-335.

Es wird die Aufgabe behandelt: „In einem gegebenen Quadrate durch Zeichnung von vier Geraden unmittelbar ein Quadrat herzustellen, dessen Inhalt gleich einem Fünfteil, und dessen Mittelpunkt der des gegebenen Quadrates ist.“

Die Lösung ist folgende: Man halbire vom gegebenen Quadrat $ABCD$ die Seite DA in E, AB in F, BC in G, CD in H und verbinde A mit G, B mit H, C mit E, D mit F. Dann ist das durch diese vier Geraden begrenzte Viereck das verlangte Quadrat. Die Richtigkeit dieser Lösung wird nachgewiesen.

Mz.

E. Jackwitz. Dreieckssätze. Hoppe Arch. LXVII. 335-336.

Es wird bewiesen: „Wenn H der Höhendurchschnitt und O der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises eines Dreiecks sind, so ist:

$$\overline{OH}^2 = (3r)^2 - (a^2+b^2+c^2)."$$

Ferner wird auf hübsche und einfache Art die Aufgabe gelöst: Wenn ein gleichschenkliges Dreieck und ein beliebiger Punkt gegeben sind, so soll man durch den Punkt eine Gerade ziehen, welche die Schenkel des Dreiecks so schneidet, dass der obere Abschnitt auf dem einen gleich dem unteren Abschnitt auf dem anderen Schenkel ist. Mz.

Julius Petersen. Elementärt Bevis for Desargues' Sätning. Zeuthen T. (4) V. 4-5.

Haben zwei ähnliche Dreiecke die Stücke in entgegengesetzter Richtung und die Seiten resp. a, b, c; a_1, b_1, c_1, dann bestimmen sie vier Kreisvierecke aba_1b_1; aca_1c_1; bcb_1c_1, deren umschriebene Kreise sich in den nämlichen zwei Punkten schneiden. Dieser Satz enthält das Theorem von Desargues. Gm.

K. Weihrauch. Ein Satz vom ebenen Viereck. Schlömilch Z. XXVI. 133-134

Auf elementare Weise wird gezeigt, dass

$$(ab\,.\,cd)^2+(ad\,.\,bc)^2-2\,ab\,.\,bc\,.\,cd\,.\,da\,\cos(\alpha+\beta) = (ac\,.\,bd)^2$$

ist, wo a, b, c, d die Ecken eines ebenen Vierecks, ab, cd, etc. seine Seiten und Diagonalen sind und der Winkel adc mit α, der Winkel abc mit β bezeichnet ist. Es wird dann auf die besonderen Fälle: $\alpha+\beta = \pi$ (Satz des Ptolemaeus) und $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ oder auch $\alpha+\beta = \frac{3\pi}{2}$ aufmerksam gemacht und für diesen letzten besonderen Fall noch ein zweiter Beweis gegeben. Mz.

Schnell. Der Beweis des Ptolemaeus'schen Satzes. Hoppe Arch. LXVII. 225-237.

Nachdem der Herr Verfasser von der bekannten Beweisführung des Satzes des Ptolemaeus gesagt hat, dass sie zwar den

Vorzug praktischer Einfachheit und Kürze habe, aber nicht gradezu auf das Ziel losgehe, um unter Anlegung eines gemeinschaftlichen Flächenmasses die Inhaltsgleichheit der bezüglichen Producte nachzuweisen, giebt er einen anderen Beweis, der davon ausgeht, dass das Product der Schenkel eines Peripheriewinkels gleich dem Product aus dem Durchmesser und der Höhe auf die Richtung der Sehne des Winkels ist. Mz.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Dreieck und Viereck von R. Rawson, C. Morgan, Genese, R. Tucker, G. Turriff, E. W. Symons, J. J. Walker, W. B. Grove, H. Murphy, H. L. Orchard, J. O'Regan, E. Rutter, R. Knowles, G. Heppel, Wolstenholme, Evans, U. J. Knisely, W. A. Coates, J. B. Delacourcelle, H. Lez, Moret-Blanc finden sich Ed. Times XXXIV. 37-38, 39-40, 53-55, 58, 59, 67, 69, 72, 93, XXXV. 62-63, 68, 78, 89; Nouv. Ann. (2) XX. 182-184, 310-314, 319-321.

O.

E. Hain. Eine Billard-Aufgabe. Hoppe Arch. LXVII. 110-111.

Mz.

C. Spitz. Lehrbuch der ebenen Polygonometrie nebst Beispielen und Uebungsaufgaben. Zweite Auflage. Leipzig und Heidelberg. C. F. Winter.

Die Behandlung des gewählten Themas ist eine entschieden und ausschliesslich analytische, nicht weil Coordinaten angewandt werden, sondern weil die Gestaltung der Theorie vom allgemeinsten Gesichtspunkt in Angriff genommen wird. Das n-Eck wird aufgefasst als der in seinem Anfang endigende Linienzug, der auf eine der $3.\ 4.\dots(n-1)$ möglichen Weisen n Punkte der Ebene durch Gerade verbindet. Es werden zuerst über die entstehenden inneren und äusseren Winkel, die Teildreiecke und die Bestimmungsstücke die nötigen Festsetzungen gemacht und die allgemeinen Folgen davon entwickelt, dann das schief- und

rechtwinklige Coordinatensystem zugezogen, dann die Azimute eingeführt, diese aber nicht mit den Radienvectoren, sondern mit den Polygonseiten und Polygonwinkeln in Relation gebracht, dann der Inhalt des Polygons, dann die restirenden Stücke aus den ausreichend bestimmenden berechnet. Dies ergiebt eine grössere Anzahl von Aufgaben, die als principielle zur Theorie gehören. Ausser ihnen werden am Schluss Uebungsaufgaben gestellt. H.

E. SCHNEIDER. Five geometrical propositions. Anal. VIII. 174-175

Diese Sätze beziehen sich auf regelmässige Polygone. Die Beweise dazu werden von Herrn J. E. Hendricks, dem Herausgeber des Analyst, gegeben. Jn. (O.).

SCHLOSSER. Vom Studirtische. Bair. Bl. XVII. 69-70.

Bekanntes über Vielecksschnittverhältnisse, wie es in ähnlicher Art schon mehrfach vom Verfasser geboten wurde.

Gr.

F. D. THOMSON, J. O'REGAN. Solutions of a question (6331). Ed. Times XXXIV. 42.

Von den Mittelpunkten α, β, γ der einem Dreieck ABC angeschriebenen Kreise fälle man Lote auf die verlängerten Seiten, so dass ein Sechseck $\alpha\gamma'\beta\alpha'\gamma\beta'$ entsteht, dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind. Dann schneiden sich die von $\alpha'\beta'\gamma'$ auf die entsprechenden Seiten des Dreiecks gefällten Lote in einem Punkte. O.

W. SCHÖNBORN. Die Sechs-Punkt-Kreise des ebenen Dreiecks. Pr. Krotoschin.

Unter Sechs-Punkt-Kreisen des ebenen Dreiecks versteht der

Herr Verfasser Kreise, welche folgendermassen am einfachsten entstehen: In der Ebene eines Dreiecks ABC wird ein Punkt O_1 angenommen; von O_1 werden Lote gefällt O_1A_1, O_1B_1, O_1C_1 resp. auf die Seiten BC, CA, AB. Dann ist der durch $A_1B_1C_1$ gelegte Kreis ein solcher Sechs-Punkt-Kreis; er trifft die Seiten des Dreiecks in je noch einem zweiten Punkte, und die Lote zu den Seiten in diesen zweiten Punkten gehen durch denselben Punkt O_2, welcher der zu O_1 zugehörige Punkt des Dreiecks heisst. Da sich auf einfache Weise bei einem solchen Kreise sechs weitere Punkte noch ergeben, nämlich die ferneren auf den Loten, die von O_1 und O_2 zu den Seiten des Dreiecks ABC gefällt sind, so können diese Kreise, wie der Herr Verfasser erwähnt, auch Zwölf-Punkt-Kreise heissen. Es werden nun viele teils mehr teils weniger bekannte Sätze und Beziehungen hierüber hergeleitet, wie sie vom Herrn Verfasser bei der Repetition der Planimetrie in der Prima des Gymnasiums benutzt worden sind. Zu Anfang steht der in der Gleichung

$$AB_1^2+CA_1^2+BC_1^2 = CB_1^2+BA_1^2+AC_1^2$$

enthaltene Satz mit seiner Umkehrung, woraus sich dann das Weitere in einfacher Weise ergiebt. Mz.

W. F. McMichael. Elementary proof of the contact of the nine-point circle with the inscribed and escribed circles. Mess. (2) XI. 77-78.

Der Beweis ist geometrisch. Glr. (O.).

C. Pendlebury. Proof of a nine-point circle theorem. Ed. Times XXXV. 28.

Einfacher Beweis. O.

W. Jeřábek. Einige Sätze aus der Kreislehre. Hoppe Arch. LXVI. 325-327.

Es wird folgender Satz bewiesen:

„Zwei Kreise K und K_1 mit den Mittelpunkten s, s_1 schneiden sich in den Punkten a und b. Die Geraden $\overline{ac}$, $\overline{ad}$, ..., welche durch den Punkt a gehen, treffen den Kreis K in den Punkten $c, d, \ldots$ und die Kreislinie K_1 in den Punkten $c_1, d_1, \ldots$ Werden auf die Geraden $\overline{ac}$, $\overline{ad}, \ldots$ nach beiden Richtungen hin von $c_1, d_1, \ldots$ aus die Strecken $\overline{ac}$, $\overline{ad}, \ldots$ aufgetragen, so liegen die Endpunkte $c_3, d_3, \ldots$ (oder $c_4, d_4, \ldots$) der so erhaltenen Strecken $\overline{c_1 c_3}$, $\overline{d_1 d_3}, \ldots$ (oder $\overline{c_1 c_4}$, $\overline{d_1 d_4}, \ldots$) auf einer bestimmten Kreislinie K_3 (oder K_4). Hieran werden dann noch einige Folgerungen geknüpft. Mz.

F. W. Fischer. Erweiterung des Satzes von der Sichel des Archimedes und sein Zusammenhang mit dem Satze von den Möndchen des Hippokrates; Schwerpunkte der Flächen. Hoppe Arch. LXVI. 337-353.

Der Inhalt der Arbeit ist im Titel vollständig angegeben; die Herleitung ist einfach und elementar; das Nähere ist in der Arbeit selbst nachzusehen. Mz.

F. Schiffner. Beitrag zur Kreislehre. Hoppe Arch. LXVII. 111-112.

Sehr einfache den Kreis betreffende Sätze werden hier angegeben und dann eine Anwendung hiervon auf die Kugel gemacht. Mz.

Z. Reggio. Quadratura di certe aree circolari. Ven. Att. Ist. (5) VII. 1097-1117.

Bei seinem Bestreben, den Umfang des Gebietes der von Hippocrates und Clausen als quadrirbar erkannten Kreisbogenfiguren zu erweitern, verfiel Verfasser auf ein gewisses krummliniges Dreieck, gebildet durch die Peripherien dreier sich in ein und demselben Punkte schneidender Kreise. Derselbe steht zu dem von den Kreismittelpunkten gebildeten Dreieck stets in

einem angebbaren Verhältnis, und aus ihm lassen sich neue Kreisbogendreiecke von rationalem Inhalt ableiten. Auch die Winkelsumme ist in solchen Dreiecken bestimmbar; bei den erstgenannten beträgt sie z. B. 180°, und man kann demgemäss zu einem solchen krummlinigen Dreieck ein ihm ähnliches construiren. Dann überträgt der Verfasser den aus der Planimetrie bekannten Begriff der Höhe, Mittellinie und Winkelhalbirenden auf die neue Figur und beweist von diesen mehrere ganz interessante Sätze. Auch sind dieselben durchaus nicht alle auf die Quadratur bezüglich, vielmehr tragen mehrere derselben mehr einen projectivischen als einen metrischen Character. Insbesondere erscheint eine Uebertragung der Theoreme von Pascal und Brianchon auf Kreisbogensechsecke bemerkenswert. Zum Schlusse werden noch einige Bemerkungen über die Berechnung des Inhaltes solcher Kreisbogenpolygone gemacht, deren Umfangslinie keine allenthalben convexe ist. Gr.

Weitere Lehrsätze und Aufgaben über den Kreis von GENESE, H. MURPHY, G. HEPPEL, D. EDWARDES, NASH, W. H. BESANT finden sich Ed. Times XXXIV. 41-42, 58, 117-118; Nouv. Ann. (2) XX. 317-319.

O.

F. BUSSLER. Elemente der ebenen und sphärischen Trigonometrie für höhere Schulen sowie zum Selbstunterricht. Berlin. Enslin.

Das Lehrbuch, für Secunda und Prima bestimmt, enthält aus beiden Teilen der Trigonometrie das Notwendige mit manchem ausserdem Wissenswerten und einigem Stoff zur Uebung. Der Lehrgang ist der gewöhnliche. H.

A. STEGMANN. Die Grundlehren der ebenen und sphä[illegible]en Trigonometrie. Kempten. J. Kösel.

[illegible] Vorliegende entspricht dem Gebrauch als Lehrbuch an

Gymnasien. Es schliesst sich an des Verfassers „Grundlehren der Stereometrie“ (s. Hoppe Arch. LIX. L.-B. 235. S. 28) an, aus welchen beim Beginn der sphärischen Trigonometrie die Lehre von den Dreikanten als bekannt vorausgesetzt wird, so dass sie als deren Fortsetzung erscheint. Die Methode ist die gewöhnliche, weder originell noch elegant, die Systematik zwar leidlich zu durchschauen, doch die Zerspaltung des Inhalts grösser, als es wol nötig wäre. Bei dem vorausgesetzten Standpunkt war wol kein ersichtlicher Grund das rechtwinklige Dreieck beidemal vor dem schiefwinkligen zu behandeln, noch dazu mit dem Anschein, als ob die Sätze für das letztere keine Geltung für das erstere hätten. An Vollständigkeit ist nichts zu vermissen, in Betreff der Correctheit, auf welche gleichfalls Sorgfalt verwandt ist, ist nur zu erwähnen, dass sich die Formel $\cot g 0 = \infty$ keinenfalls rechtfertigen lässt. Als Symbol müsste sie lauten $= \pm\infty$ und bedürfte einer Erklärung, die sich leicht geben liess. Zum Schluss folgt eine Zusammenstellung von Formeln, die nicht blos die einfache Grundlage, sondern auch manches daraus abgeleitete umfasst, dann eine reichhaltige Sammlung von Aufgaben zur Uebung. H.

E. Suchsland. Goniometrie und ebene Trigonometrie. Stolp i. P. C. Schrader.

Die Methode ist folgende. Erst wird aus der Bemerkung der Abhängigkeit zwischen Dreieckswinkeln und Seitenverhältnissen die Idee der Trigonometrie entwickelt und realisirt, wobei namentlich die Periodicität ausführlich erörtert ist, dann die resultirenden Formeln mit allen für die Elemente wichtigen daraus abgeleiteten einfach zusammengestellt und nachträglich der Weg der Begründung der einzelnen in der Kürze angegeben, und zwar nacheinander das auf Goniometrie und auf Trigonometrie bezügliche so behandelt. Aus der Sinus-Proportion wird der Projectionssatz, aus diesem durch Quadrirung der Cosinus-Seiten-Satz (erweiterte Pythagoras) algebraisch hergeleitet. H.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Trigonometrie von J. L. Kitchin, N. Lal, G. Heppel, A. McMurchy, R. Knowles, W. B. Grove, N. Goffart finden sich Ed. Times XXXIV. 30, 52, 56, 93-94, Nouv. Ann. (2) XX. 523-524.

O.

F. Glinzer. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. II. T.; Stereometrie. Hamburg. Nestler u. Molle.

Der 1te Teil erschien 1880 (s. F. d. M. XII. 1880. 417). Auch der 2te Teil gehört zu den besten Bearbeitungen der Stereometrie für alle höhere Unterrichtsanstalten. Hervorzuheben ist, dass die Lehre von der Lage der Ebenen und Geraden sehr eingehend und vollständig behandelt wird. Ausführlich besprochen in Hoppe Arch. LXVI. Lit. Ber. p. 19.

H.

A. Schwarz. Lehrbuch der Stereometrie, für den Schulgebrauch bearbeitet. Leipzig. J. M. Gebhardt.

Das Buch ist nach einfachster Systematik geordnet; es folgen auf einander: Lage der Geraden und Ebenen, ebenflächige. krummflächige Körper, jeder dieser Abschnitte nach gleich sichtlichem Fortschritt geteilt. Auf die correcte Gestaltung ist viel Fleiss verwandt, die Bearbeitung verrät selbständige Ueberlegung und Beherrschung des Stoffes. Der zwar auch hier auftretende logische Fehler des Entgegensetzens von Umfassendem und Includirtem ist ohne Folgen, weil das Gesagte unbeachtet bleibt. Die Körpermessung beginnt mit dem Rauminhalt, und lässt die Oberflächen nachfolgen. Erstere Deduction stützt sich überall auf den Cavalieri'schen Grundsatz, auch auf die Kugel angewandt mit Zuziehung des Archimedischen Satzes. Der Anhang ist ein Formelverzeichnis.

H.

A. Schwarz. Vorzeichnungen zu den körperlichen Beweisfiguren für den Unterricht in der Stereometrie. Heft I. mit Text. Leipzig. Gebhardt.

Im Anschluss an das Lehrbuch, das oben besprochen ist, werden hier Tafeln gegeben, welche, auf Pappe geklebt etc., Modelle für die Beweise der Sätze aus der Stereometrie geben.

O.

F. A. Steck. Sammlung von stereometrischen Aufgaben in systematischer Ordnung. Kempten. Kösel.

Die Aufgaben beziehen sich auf die Relationen zwischen Inhalt, Oberfläche und Linearmessungen von Prisma, Pyramide, Cylinder, Kegel, Kugel, deren Stücken und aus ihnen zusammengesetzten Figuren, Relationen, die teils durch bekannte Formeln gegeben, teils geometrisch zu suchen sind. Sie fordern die numerische Berechnung aus numerischen Daten. Die Resultate stehen hinter jedem Abschnitt. H.

Websky. Ueber die Ableitung des krystallographischen Transformations-Symbols. Berl. Monatsber. 1881. 152-169.

Wenn es sich darum handelt, die Axenrichtungen und die Einheitswerte der Axen einer beschriebenen Krystallgattung zu ändern, so dass für die nach den ursprünglichen Elementen symbolisirten Flächen neue Symbole aufkommen, so wird der aus den alten Symbolen und den Veränderungsbedingungen hergeleitete, der allgemeinen Form eines Symbols entsprechende Ausdruck, welcher angewandt auf eine bestimmte Fläche das ihr zukommende neue Symbol giebt, das Transformationssymbol genannt. Der von Quenstedt (Grundriss der bestimmenden und rechnenden Krystallographie, Tübingen 1873) behufs Ableitung desselben betretene Weg wird als der anschaulichste anerkannt, aber noch in einem Punkte berichtigt und erweitert, was den Gegenstand des Gegenwärtigen bildet. H.

H. Vogt. Das Tetraeder mit Höhenschnittpunkt.
Pr. Breslau.

In dieser Abhandlung wird ein besonderes Tetraeder genauer betrachtet, nämlich dasjenige, in welchem die vier Höhen durch denselben Punkt gehen. Dieses Tetraeder hat manche Eigenschaften, die es in Analogie mit dem allgemeinen ebenen Dreieck setzen. Die Methode der Darstellung ist die elementar-synthetische. Nachdem das hauptsächliche Kennzeichen eines solchen Tetraeders: Perpendicularität der Gegenkanten, ferner dass bei je zwei Gegenkanten die Quadratsumme dieselbe u. s. w. geometrisch begründet ist, kommen etwas complicirtere Sätze. Am Schlusse findet sich noch eine Bemerkung, die sich auf das allgemeine Tetraeder bezieht; als Ersatz für den Höhenschnittpunkt ist dann derjenige herangezogen, in welchem sich die sechs Ebenen, die von den Mitten der Kanten senkrecht auf die jedesmaligen Gegenkanten gefällt werden, schneiden. Mz.

E. Temperley. On tetrahedra whose opposite edges are at right angles. Mess. (2) XI. 114-119.

Der Verfasser nennt ein solches Tetraeder ein orthogonales. Die bewiesenen Sätze haben fast durchgängig Analoga bei den Dreiecken. Ferner ist das orthogonale Tetraeder das einzige, welches einen Orthocenter besitzt (d. h. Schnittpunkt der Lote). Es lässt sich erwarten, dass die mit dem Orthocenter verbundenen Eigenschaften eines Dreiecks mehr Analoga bei dem orthogonalen Tetraeder als bei einem andern haben werden. Die Eigenschaft der vier Lote eines Tetraeders, Erzeugende desselben Systems eines Hyperboloids einer Schaar zu sein, welche dem Schnitt der drei Lote eines Dreiecks entspricht, gehört nicht in die elementare Geometrie, durch welche die Resultate der vorliegenden Arbeit erhalten werden. Es handelt sich auch hier um Sätze über die zu einem orthogonalen Tetraeder gehörigen Kugeln, wie die Zwölfpunkt-Kugel des Herrn Lewis und ähnliche. Glr. (O.).

J. C. Lewis. Some properties of tetrahedra whose opposite edges are at right angles to one another. Mess. (2) XI. 36-38.

Der Verfasser beweist sechs Sätze, die sich auf Kugeln beziehen, die mit einem Tetraeder mit Höhenschnittpunkt in Zusammenhang stehen. Er zeigt auch, dass die Neunpunkt-Kreise der vier Seiten auf derselben Kugel liegen, für welche er den Namen der Zwölfpunkt-Kugel vorschlägt, und bestimmt den Radius.

Glr. (O.).

H. Faure. Sur l'expression du volume de certains tétraèdres. Nouv. Ann. (2) XX. 338-344.

Durch Verbindung je einer Ecke eines Tetraeders mit je drei Ecken eines andern erhält man sechzehn Tetraeder, deren Determinante gleich dem Product des erstern und der dritten Potenz des letztern ist (soviel bereits früher bewiesen). Durch specielle Annahmen ergeben sich daraus mehrere Sätze, deren Beweise teils schon geliefert, teils aufgegeben waren.

H.

L. Saltel. Réflexions sur la mesure du volume de la sphère. Bord. Mém. (2) IV. 375-382.

Gegen das gewönliche Verfahren der Herleitung des Ausdrucks für das Kugelvolumen, welches durch Inhaltsbestimmung der Oberfläche vermittelt ist, wendet der Verfasser ein, dass der Begriff einer Messung krummer Flächen durch ebene schwer zu fassen ist. Er giebt nun einen Weg an, analog der gewönlichen Zusammensetzung der Kugelzone aus Kegelzonen mit ganz entsprechender Transformation, der von gewissen Kegelsectoren zu Kugelsectoren übergeht. Ein solcher Kegelsector entsteht durch Rotation eines gleichschenkligen Dreiecks um eine Gerade derselben Ebene, welche durch die Spitze des Dreiecks geht. Er ist gleich dem doppelten Volumen des Kegels, dessen Basisradius gleich der Höhe des Dreiecks und dessen Höhe die Projection

der Dreiecksbasis auf die Rotationsaxe ist. Nachdem dies bewiesen, ist es leicht, eine Reihe angrenzender Kegelsectoren von gemeinsamer Dreieckshöhe zu addiren, so dass die zusammengesetzte Figur bei unendlich kleinen Dreiecksbasen in den Kugelsector übergeht, der in bestimmter Ausdehnung die ganze Kugel giebt. H.

H. Résal. Sur un théorème de Pappus. Nouv. Ann. (2) XX. 433-434.

„Wenn ein Punkt einen Kugelmeridian vom Pole bis zum Aequator durchläuft, während der Meridian mit proportionaler Geschwindigkeit bis auf einen vollen Umlauf um die Axe rotirt, so ist das Stück der Kugelfläche zwischen der erzeugten Curve und dem Aequator gleich dem Quadrat des Durchmessers.“ Dieser Satz von Pappus wird durch Integration bewiesen.

H.

J. W. Rasch. Het meten van een cylinder. Nieuw Arch. VII. 117-149.

Es wird ausführlich über die Methode gehandelt, den Inhalt eines Cylinders durch Messung mit solcher Genauigkeit zu finden, als es für das Aichen erforderlich ist. Zu diesem Ende wird gezeigt, wie der horizontale Durchschnitt, sodann wie ein verticaler Durchschnitt, weiter wie die mittlere Höhe des Cylinders gemessen wird, endlich wie aus diesen Messungen mit den notwendigen Correctionen der gesuchte Inhalt abgeleitet wird.

G.

G. Dostor. Sur quelques corps engendrés par la révolution. Hoppe Arch. LXVII. 254-264.

Die hier betrachteten Körper entstehen durch Rotation von einem oder mehreren Kreisen und ihren gemeinsamen Tangenten um eine, bzhw. die gemeinsame centrale Secante. Sie sind be-[illegible]zt teils von Kugelflächen, teils von der Kegelfläche. Ihre

Volumina haben bemerkenswerte einfache Ausdrücke. Hierüber wird eine längere Reihe von Sätzen synthetisch aufsteigend hergeleitet. H.

A. J. Torry. Geometrical notes. Mess. (2) XI. 54-56. Glr.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Stereometrie von Minchin, Genese, Townsend, D. Edwardes, G. F. Walker, Moret-Blanc finden sich Ed. Times XXXIV. 40, 70, 90; Nouv. Ann. (2) XX. 175-177, 314-316, 515-518. O.

Capitel 4.

Darstellende Geometrie.

J. M. Eisert. Vorträge über darstellende Geometrie. Kaiserslautern. K. Gotthold. Rg.

N. Fialkowski. Lehrbuch der Geometrie und des Zeichnens geometrischer Ornamente oder die geometrische Formenlehre mit steter Rücksicht auf die Auffassung und Darstellung verschiedener Formen in der Ebene aus freier Hand. Fünfte Auflage.

N. Fialkowski. Geometrische Flächenornamente mit Grundeinteilung. Zwei Abteilungen zu je zwei Heften. Wien und Leipzig. J. Klinkhardt. Rg.

C. Pelz. Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie. (Zweite Mitteilung.). Wien. Ber. LXXXIII. 375-384.

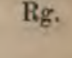
Es werden weitere Elementaraufgaben der Stereometrie mit alleiniger Hülfe des Axenkreuzes und der Bildebene gelöst. Vgl. das Referat im vorigen Bande der F. d. M. p. 438. Rg.

W. Binder. Die Centralprojection als Hülfsconstruction in der Orthogonalprojection, mit einem Vorworte über die Stellung der darstellenden Geometrie im Lehrplan der allgemeinen Mittelschule. Pr. Wiener-Neustadt.

Von einer Besprechung des pädagogischen Teils sehen wir, als nicht hierher gehörig, ab.

Der Verfasser sucht zu zeigen, wie sich in manchen Fällen die Lösungen von Elementaraufgaben der darstellenden Geometrie, welche nach den gewöhnlichen Methoden vollzogen, in Folge beschränkter Grösse der Bildfläche Hülfsconstructionen notwendig machen, unter Anwendung der Centralprojection einfach vollziehen lassen. Bei einer Reihe von Anwendungen wird jedoch fast immer das Centrum in's Unendliche gelegt, und dann unterscheiden sich die angegebenen Methoden von den gebräuchlichen nur im Ausdruck. Dies ist auch der Fall bei der Bestimmung der Durchschnittscurve eines Kegels mit einer Rotationsfläche. Wenn hier gesagt wird: „Man wähle die Spitze des Kegels zum Projectionscentrum und bilde die Parallelkreise auf die Basisfläche des Kegels ab, etc.", so liegt darin die Benutzung der Hülfskegel ausgesprochen, wie sie bei Behandlung der vorliegenden Aufgabe allgemein üblich sein dürfte.

Der weitere Inhalt der Arbeit bezieht sich auf planimetrische Constructionen von Curven zweiter Ordnung, welche, wie es häufig in der darstellenden Geometrie vorkommt, durch einen Durchmesser und eine ihm conjugirte Sehne gegeben sind.


Rg.

Reusch. Die stereographische Projection. Leipzig. Teubner.

Man erhält die stereographische Projection einer Kugel, wenn man dieselbe aus einem ihrer Punkte, dem Pol, auf die zugehörige Aequatorebene projicirt. Diese Abbildungsmethode hat den bedeutenden Vorteil, dass jedem Kreise auf der Kugel wieder ein Kreis im Bilde entspricht. Nach Erledigung des rein mathematischen Teils werden als Anwendungen Aufgaben aus der Astronomie behandelt.

Die Schrift zeichnet sich durch grosse Klarheit aus, das Verständnis wird erleichtert durch acht beigegebene, sauber auf Stein gravirte Tafeln. Siehe auch Schlömilch Z. XXVIII. 86. Rg.

G. Hauck. Ueber die Grundprincipien der Linearperspective. Schlömilch Z. XXVI. 273-296.

Die „subjective Perspective" des Verfassers hat seit ihrem Erscheinen zu so vielen Discussionen in Fachzeitschriften Anlass gegeben, dass ihr wesentlicher Inhalt bei jedem darstellenden Geometer als bekannt vorausgesetzt werden darf. In vorliegendem Aufsatze soll nun, wie in jener Arbeit, vom Standpunkte der physiologischen Optik aus, aber in mehr mathematischer Weise, das bekannte System der Linearperspective begründet werden.

Da, sagt der Verfasser, das subjective Anschauungsbild das Resultat eines Compromisses zwischen den beiden Eigenschaften der Collinearität und Conformität des räumlichen Gegenstandes einerseits und der Gesichtseindrücke andererseits ist, wird (§ 4) als Definition der Perspective im engeren Sinne die folgende hingestellt: Die Perspective lehrt die Herstellung von Compromissen in dem Conflict zwischen der Bedingung der Collinearität und der Conformität zum Zweck bildlicher Darstellung von Naturobjecten.

Dann wird nachgewiesen, dass alles in dieser Hinsicht überhaupt Erreichbare ist: Vertikalität, Collinearität und ausserdem Conformität in einem Punkte, dem Hauptpunkte. Diese Eigen-

schaften hat aber das centrisch collineare Bild; in Folge dessen wird dieses System als das „rationellste" bezeichnet (vergl. S. 3 der „subjectiven Perspective"). Rg.

G. Hauck. Bemerkungen zu der Recension von Hauck, Subjective Perspective in Hoffmann Z. XI. Hoffmann Z. XII. 105-107.

Rg.

N. Fialkowski. Die Kegelschnittlinien aus dem Schatten eines Kreises. Wien. Leipzig. Klinkhardt.

Die Formen der Centralprojectionen eines Kreises werden mit Hülfe der Differentialrechnung untersucht. Rg.

W. Marx. Ueber eine Fläche vierter Ordnung mit reellem Doppelkegelschnitt und ihre Anwendung zur Lösung der Aufgabe: Drei gegebene Gerade im Raume nach einem Dreieck mit vorgeschriebenen Winkeln zu schneiden. Diss. München. 1880.

Nur in dem speciellen Falle, in dem zwei der Geraden parallel sind, gestattet die Aufgabe eine Lösung mit Hülfe von Kreis und gerader Linie. Für drei sich in einem Punkt schneidende Gerade zeigt der Verfasser ein Verfahren, das auf dem Wege der Rechnung zu den vier Systemen unter sich paralleler Ebenen führt, welche in diesem Falle die gewünschten Dreiecke erzeugen.

Die Lösung der allgemeinen Aufgabe ist die folgende. Sind A, B, C die gegebenen Geraden, so nehme man auf einer, A, einen Punkt a willkürlich an und lege durch ihn ein Strahlenbüschel perspectivisch zu B, welches diese Linie in der Punktreihe b schneide. Construirt man nun über einer Strecke ab die Dreiecke mit den vorgeschriebenen Winkeln $\alpha \beta \gamma$, so liegen die dritten Spitzen auf einem Kreise. Die Kreisschaar, welche hiernach den

sämmtlichen Strahlen des Büschels zugeordnet ist, liegt auf einer Fläche vierter Ordnung. Setzt man diese als construirt voraus, so liefern ihre Durchschnittspunkte mit der Geraden C ersichtlich die dritten Ecken von Dreiecken der gesuchten Art, deren es hiernach vier giebt.

Die Fläche vierter Ordnung wird eingehend untersucht, insbesondere wird ihr Doppelkegelschnitt als ein durch den Punkt a gehender Kreis nachgewiesen. Rg.

L. LEBRUN. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XX. 12-13.

Geometrischer elementarer Beweis dafür, dass die Centralprojection einer Schraubenlinie auf eine zur Axe senkrechte Ebene eine Archimedische Spirale ist, wenn das Projectionscentrum auf der Axe liegt. O.

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Ebene Gebilde.

W. FUHRMANN. Einleitung in die neuere Geometrie für die oberen Klassen. Leipzig. Teubner.

W. St.

W. ERLER. Die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zweite Auflage. Leipzig. Teubner.

W. St.

A. DRONKE. Die Kegelschnitte in synthetischer Behandlung für die Prima höherer Lehranstalten. Leipzig. Teubner.

W. St.

F. SCHUR. Ueber den Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie. Klein Ann. XVIII. 252-255.

Das Referat findet sich im vorigen Bande p. 418.

Rg.

P. BOSCHI. Alcune proprietà delle forme geometriche fondamentali collineari di seconda e di terza specie aventi elementi uniti. Bologna, Mem. (4) II. 507-518.

In dieser Abhandlung werden die bekannten Sätze über collineare Gebilde der zweiten und dritten Stufe bewiesen.

W. St.

W. BINDER. Das Problem der vier Punkte im Sinne der neueren Geometrie. Wien. Ber. LXXX. 659-667.

Dieses schon oft behandelte Problem wird hier auf graphischem Wege gelöst durch die bekannte Construction, welche in einer gegebenen Involution zu einem Elemente das entsprechende liefert.

W. St.

E. MAHLER. Ueber das vollständige Viereck. Hoppe Arch. LXVII. 324-327.

W. St.

S. KANTOR. Die Configurationen $(3,3)_{10}$. Wien. Ber. LXXXIV. 1291-1314.

Zehn Gerade und ebenso viele Punkte liegen so, dass stets drei Gerade durch einen Punkt gehen und drei Punkte auf einer Geraden liegen. Eine solche „Configuration" wird gebildet durch zwei perspectivische Dreiecke, mit ihrer perspectivischen Axe und den Verbindungslinien entsprechender Ecken, und zwar ist sie die einzige, welche bisher von zehn möglichen, wie sie der Verfasser nachweist, bekannt war. Auf die weiteren Arten von Configurationen führt unter anderen die Betrachtung 1) des einem

gegebenen Fünfeck um- und eingeschriebenen Fünfecks; 2) des einem Kegelschnitt eingeschriebenen und einem zweiten umschriebenen Sechsecks; 3) des einem vollständigen Vierseit umschriebenen vollständigen Vierecks; 4) gewisser Tangentialcyklen bei den Curven dritter Ordnung, vierter Classe. Die Configurationen werden unterschieden nach den „Restfiguren", das sind drei Punkte, mit denen ein beliebiger Configurationspunkt nicht verbunden ist, und die sie verbindenden Configurationsgeraden. Solcher Figuren giebt es drei Arten: 1) die Punkte sind isolirt; 2) einer der Punkte wird mit den beiden anderen durch Configurationsgerade verbunden; 3) je zwei der drei Punkte sind durch eine Configurationsgerade verbunden. Es gilt nun das (allgemeine) Gesetz: Zwei Configurationen sind identisch, wenn sie dieselben Arten von Restfiguren haben und in denselben Anzahlen besitzen, wenn nicht, sind sie wesentlich verschieden.

Schliesslich wird ein Verfahren mitgeteilt, welches ermöglicht, aus einer Form der $(3, 3)_{10}$ alle anderen topologisch zu erschliessen. Rg.

S. Kantor. Ueber die Configurationen (3, 3) mit den Indices 8, 9 und ihren Zusammenhang mit den Curven dritter Ordnung. Wien. Ber. LXXXIV. 915-932, Wien. Anz. 1881, 245.

S. Kantor. Die Configurationen $(3, 3)_{10}$. Wien. Ber. LXXXIV. 1291-1314; Wien. Anz. 1881, 253.

„Ebene Configuration" heisst eine Gruppirung von x Punkten und y Geraden dann, wenn immer auf jeder von den y Geraden je m von den x Punkten liegen, und andererseits auch durch jeden von den x Punkten je n von den y Geraden gehen. Hiernach muss immer $y = nx:m$ sein. Von bekannten Configurationen seien beispielsweise erwähnt: das einfache p-Eck, bei welchem $x = y = p$, $n = m = 2$ ist, das vollständige Vierseit, bei welchem $x = 6$, $y = 4$, $m = 3$, $n = 2$ ist, der ebene Schnitt eines räumlichen Fünfecks, wofür sich $x = y = 10$, $m = n = 3$ ergiebt.

Den Ausdruck „Configuration" gebrauchte zuerst Herr Reye,

welcher in seiner Geometrie der Lage (Bd. I., 2. Aufl. 1876, S. 4 und 162) die Aufmerksamkeit der Geometer auf derartige regelmässige Gruppirungen gelenkt hat. Neuerdings hat Herr Reye seine Studien auf diesem Gebiete wieder aufgenommen (Acta Mathematica, I. p. 94-108), und namentlich gewisse räumliche Configurationen eingehend untersucht. Von räumlichen Configurationen sind namentlich zwei besonders bekannt. Erstens die durch die zwölf Aehnlichkeitspunkte von vier Kugeln veranlasste Configuration, bei welcher 12 Punkte zu je drei in 16 Geraden und zu je sechs in 12 Ebenen liegen, und andererseits diese 12 Ebenen zu je drei durch die 16 Geraden und zu je sechs durch die 12 Punkte gehen. Zweitens die von den 16 Knotenpunkten und den 16 singulären Ebenen der Kummer'schen Fläche erzeugte Configuration (F. Klein in Clebsch Ann. II. p. 214ff., s. F. d. M. II. 1870. p. 605), bei welcher 16 Ebenen zu je sechs durch 16 Punkte gehen, und andererseits diese 16 Punkte zu je sechs auf einer Ebene, und zwar in einem Kegelschnitt liegen.

Herr S. Kantor hat es nun unternommen, zu ermitteln, zu welchen Werten von x, y, n, m (vgl. oben) ebene Configurationen gehören und wie dieselben erzeugt werden können. In den vorliegenden Arbeiten werden die Fälle behandelt, wo immer $m = n = 3$ und ausserdem $x = 8$ oder 9 oder 10 ist. Für $x = 8$ findet er, dass nur eine einzige Configuration möglich ist, und dass dieselbe aus zwei Vierecken besteht, die einen gemeinsamen Diagonalpunkt haben und derartig liegen, dass die Ecken und Seiten des einen den Seiten und Ecken des andern incident sind. Für $x = 9$ ergeben sich drei Configurationen, welche auf mehrfache Weise construirt und aufgefasst werden. An die eine dieser drei Configurationen knüpft der Verfasser Untersuchungen, welche die Eigenschaften gewisser Punktgruppen auf den Curven dritter Ordnung in neuem Lichte erscheinen lassen. Für $x = 10$ ergeben sich zehn wesentlich verschiedene Arten von Configurationen, von denen nur die eine bis dahin bekannt war, nämlich diejenige, welche vervielfältigt die Figur des Pascal'schen Sechsecks liefert. Im Anschluss an die Constructionen dieser zehn

verschiedenen Formen stellt Herr S. Kantor mehrere Principe auf, welche auch für ein beliebiges x und $m = n = 3$ gültig sind. Das erste Princip ist das der Restfiguren, wonach die durch etwaige geometrische Construction erhaltenen Figuren als identisch oder verschieden erkannt werden können. Das zweite Princip, ein topologisches, gestattet es, durch gewisse gestaltliche Aenderungen aus einer Configuration alle solche erschliessen zu können, welche derselben Zahl x angehören. Scht.

G. Veronese. Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e superficie di 2° grado e di altre curve e superficie. Rom., Acc. L. Mem. (3) IX.

In dieser ausführlichen und etwas breit geschriebenen Abhandlung beweist und vervollständigt der Verfasser die Sätze, welche er im Jahre 1880 in den Transunti della R. Acad. dei Lincei (s. F. d. M. XII. 502) veröffentlicht hat. Im Wesentlichen kommt es hierbei auf das Studium von projectivischen Gruppen an, welche offen oder geschlossen sind und von Clebsch, Gordan, Klein, Lie, Lüroth und anderen schon eingehend betrachtet worden sind. Der Ausgangspunkt ist in dieser Abhandlung jedoch neu. Der Verfasser gelangt zu den Punktgruppen in der Ebene mit Hülfe zweier Kegelschnitte, im Raume mit Hülfe zweier beliebiger Flächen zweiten Grades. Bezüglich der einen Curve oder Fläche construire man die Polare p resp. Polarebene π eines beliebigen Punktes P; bezüglich der zweiten Curve oder Fläche von p resp. π den Pol P'; bezüglich der ersten Curve oder Fläche wieder die Polare p' resp. Polarebene π' von P' etc. Man erhält so eine Gruppe von Punkten $P, P', P'', \dots$, von Geraden $p, p', p'', \dots$, von Ebenen $\pi, \pi', \pi'' \dots$. Der Verfasser beweist auf analytischem Wege, dass diese Gruppen projectivisch sind und mit ihnen interessante Gruppen von Kegelschnitten resp. Flächen zweiten Grades in enger Beziehung stehen. Die gegenseitige Lage der Kegelschnitte resp. Flächen wird dann bestimmt, wenn die Gruppen geschlossen sein sollen. Besonders werden Gruppen von

zwei und drei Elementen eingehend untersucht. Man gelangt hierbei auf merkwürdige Gruppen von Kegelschnitten von vier und neun Elementen, von welchen die letzteren in der Theorie der Curven dritter Ordnung von Bedeutung sind. In dem zweiten Teile der Abhandlung werden geschlossene Punktgruppen im Raume betrachtet, welche zu den Figuren führen, die von Stéphanos (Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres. Darboux Bull. (2) III. 424-456, s. F. d. M. XI. 1879. p. 431) untersucht worden sind, und zu welchen F. Klein (Linearcomplexe 1[ten] und 2[ten] Grades, Clebsch Ann. II. 198-226, siehe F. d. M. II. 1870. p. 615) zuerst durch sechs in Involution stehende lineare Complexe geführt worden ist. W. St.

B. Klein. Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde. Marburg. V. G. Elwert.

Drei Elemententräger heissen trilinear auf einander bezogen, wenn immer zwei Elemente, welche auf zweien von den drei Trägern beliebig angenommen sind, ein Element auf dem dritten Träger eindeutig bestimmen, oder, algebraisch ausgedrückt, wenn die Elemente auf den drei Trägern durch eine Gleichung von der Form

$$axyz+bx+cy+dz+ex+fy+gz+h=0$$

in ihrer Lage von einander abhängen. In dieser Definition stimmt Herr Benno Klein mit dem Referenten überein, welcher in den Math. Ann. XVII. 454 (F. d. M. XII. 1880. p. 454), von einem Studium dieser Beziehung ausgehend, zu gewissen Eigenschaften und Constructionen der allgemeinen Fläche dritter Ordnung gelangt ist. Herr Klein nimmt jedoch einen anderen Ausgangspunkt und steckt sich auch schliesslich ein anderes Ziel. Er geht von der zuerst von Weyr (Theorie der mehrdeutigen, geometrischen Elementargebilde) eingehend studirten ein-zweideutigen Verwandtschaft aus und begründet geometrisch die Hauptsätze derselben. Von dieser Verwandtschaft erscheint nun die trilineare Beziehung insofern wie eine Verallgemeinerung, als beim Zusammenfallen

von zweien der drei Träger einer trilinearen Beziehung jedem Elemente des dritten Trägers eine Involution mit zwei Doppelpunkten auf den zusammenfallenden Trägern entspricht. Der Verfasser betrachtet jedoch von der trilinearen Beziehung hauptsächlich nur den speciellen Fall, wo alle drei Träger in einen einzigen Träger zusammenfallen. Dann entsprechen je zwei Elementen des letzteren drei dritte Elemente, da ja jedes Element eigentlich drei Trägern angehört. Specialisirt man nun weiter, indem man immer je drei zusammengehörige Elemente sich auch dreifach entsprechen lässt, so gelangt man zu der ein-ein-ein-deutigen Beziehung auf einem und demselben Träger, welche Herr Klein unter dem Namen der trilinear-symmetrischen Beziehung sehr eingehend behandelt. Namentlich wird auch gezeigt, in welchen Fällen diese Verwandtschaft eindeutig bestimmt ist. Dies ist z. B. der Fall, wenn drei Tripel zusammengehöriger Elemente gegeben sind. Als Träger nimmt Herr Klein sowohl die gerade Linie und das Strahlbüschel, wie auch den Kegelschnitt. Manche Resultate stehen in engem Zusammenhang mit der cubisch-involutorischen Punktreihe zweiter Ordnung. Dieselbe wird von je drei Eckpunkten eines derjenigen Dreiecke gebildet, die einem Kegelschnitte einbeschrieben und gleichzeitig einem andern umbeschrieben sind. Weitere Untersuchungen beziehen sich auf die Ordnungselemente eines trilinear-symmetrischen Elementargebildes, d. h. auf diejenigen drei Elemente, in welchen drei zusammengehörige Elemente zusammenfallen. Da eine trilinear-symmetrische Verwandtschaft durch die Gleichung

$$axyz+b(xy+xz+yz)+c(x+y+z)+d = 0$$

dargestellt werden kann, und da deshalb die Ordnungselemente als die drei Wurzeln der Gleichung

$$ax^3+3bx^2+3cx+d = 0$$

erscheinen, so gelingt es dem Verfasser auch, durch seine Verwandtschaft die graphische Lösung der Gleichungen dritten Grades mit einer Unbekannten auf die Fundamentalaufgabe aller Aufgaben dritten und vierten Grades zurückzuführen, nämlich auf die Aufgabe: „Wenn ein Schnittpunkt zweier beliebig ge-

gebener Kegelschnitte bekannt ist, die drei übrigen Schnittpunkte derselben zu construiren."

In dem letzten Teil des Büchelchens gelangt der Verfasser zu einer zweiten Erzeugungsart der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft, indem er von der oben erwähnten Definition der cubisch-involutorischen Reihen ausgeht. Im Anschluss hieran wird der Zusammenhang besprochen, der zwischen einer trilinear-symmetrischen Curve zweiter Ordnung oder Klasse und der Theorie der linearen Kegelschnitt-Mannichfaltigkeiten zweiter Stufe besteht. Scht.

HERMANN WIENER. Ueber Involutionen auf ebenen Curven. Diss. München.

Der Verfasser studirt in dieser Abhandlung die Involutionen n^{ten} Grades zunächst auf geraden Punktreihen und Curven mit dem Geschlechte Null und dann auf Curven höheren Geschlechts, aber letztere nur von ganz specieller Art.

Ist eine Strahleninvolution durch zwei ihrer Gruppen gegeben, so werden mit Hülfe einer Curve n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$-fachem Punkte die übrigen Gruppen hergestellt. Fallen die Elemente jeder der beiden ersten Gruppen in je ein Element zusammen, so ist die Involution eine cyklische. Die Betrachtung einer solchen auf einer Curve n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$-fachem Punkte, welche zwei Tangenten besitzt, die je in n aufeinander folgenden Punkten die Curve treffen, giebt Veranlassung zur Construction von $x = \sqrt[n]{y}$, wenn y beliebig gegeben ist.

Ist eine Involution n^{ten} Grades auf einer Curve mit $p = 0$ gegeben, so umhüllen die Verbindungslinien der Punkte einer Gruppe eine „Involutionscurve", deren Geschlecht nicht abhängt von der besonderen Natur der ersten Curve und das Geschlecht der Involution heisst. Es werden dann die verschiedenen Involutionen 3ten und 4ten Grades aufgeführt, und es wird besonders als Träger der Involution eine rationale Curve 3ter oder 4ter Ordnung angenommen. Die Betrachtungen schliessen sich enge an diejenigen

an, welche Em. Weyr über Involutionen aufgestellt hat, und liefern analoge Resultate.

Im zweiten Teile betrachtet der Verfasser Curven höheren Geschlechtes und die auf ihnen befindlichen Involutionen. Er giebt eine einfache Construction der Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten und ist dadurch im Stande, auf leichte Art die mannichfachen Formen, welche die Curve annehmen kann, zu erörtern. Diese sind aufgezeichnet und bieten grosses Interesse.

W. St.

E. Mahler. Das Erzeugnis einer Tangenteninvolution auf einer Curve m^{ter} Ordnung und eines mit ihr projectivischen Curvenbüschels n^{ter} Ordnung. Wien. Anz. 1881. 162-163.

W. St.

Em. Weyr. Ueber biquadratische Involutionen erster Stufe. Wien. Ber. LXXXIII. 300-321.

Denkt man sich die allgemeine Involution vierten Grades erster Stufe auf die Tangenten eines Kegelschnittes K_2 übertragen, so erfüllen die Schnittpunkte der einander entsprechenden Tangenten eine allgemeine Curve dritter Ordnung sechster Klasse.

„Ist eine Curve J_3 Involutionscurve einer auf einem Kegelschnitte K_2 befindlichen biquadratischen Tangenteninvolution, so sind die Gegeneckenpaare aller die Involution bildenden Tangentenvierseite Paare correspondirender Punkte desselben Systems auf J_3.“ Hieraus ergiebt sich der von Schröter herrührende für die Construction der Curven dritter Ordnung wichtige Satz: „Ist auf einem Kegelschnitte eine biquadratische Tangenteninvolution gegeben, und sind s, s' zwei Gegenecken in irgend einem von vier Tangenten einer Gruppe gebildeten vollständigen Vierseite, so projiciren sich die Gegeneckenpaare aller übrigen solchen Vierseite aus s und s' in zwei projectivischen quadratischen Involutionen.“ Sind a, b, c die Schnittpunkte der Geraden mit J_3 und a', b', c' die ihnen in einem Systeme correspondirenden Punkte, so bilden

bekanntlich die sechs Punkte die Ecken eines der Curve eingeschriebenen Vierseits. Wenn man einem solchen Vierseit einen beliebigen Kegelschnitt K_2 einschreibt, so kann man ihn als Träger einer biquadratischen Tangenteninvolution betrachten, deren Erzeugnis J_3 ist. Es ergiebt sich hieraus der Satz: „Befindet sich auf einem Kegelschnitte K_2 eine biquadratische Tangenteninvolution, so umhüllen die den Tangentenquadrupeln zugehörigen Diagonaldreiecke eine Curve dritter Klasse, welche als Cayley'sche Curve mit der als Hesse'sche Curve auftretenden Involutionscurve J_3 einer gewissen Fundamentalcurve dritter Ordnung entspricht."

In dem weiteren Verlaufe der Abhandlung macht der Verfasser in mannichfacher Weise Anwendung von bekannten Sätzen der Geometrie, um mit deren Hülfe wichtige Sätze über Involutionen zu erhalten, oder umgekehrt, bekannte Sätze über Involutionen ergeben ihm neue geometrische Beziehungen. Es mögen hier nur einige auf die Bestimmung von biquadratischen Involutionen sich beziehende Sätze angeführt werden. „Eine biquadratische Involution ist eindeutig bestimmt, wenn man ein Quadrupel und drei (nicht einem Tripel angehörende) Elementenpaare kennt." „Eine biquadratische Involution ist eindeutig bestimmt durch drei beliebig gewählte Tripel." Der letzte Satz, in geometrischer Form ausgesprochen, lautet: „Wenn drei beliebige Dreiseite einem Kegelschnitte umschrieben sind, so ist die durch ihre neun Ecken gehende Curve dritter Ordnung eine Involutionscurve bezüglich des Kegelschnittes, d. h. es giebt unendlich viele vollständige Vierseite, welche der Curve eingeschrieben und dem Kegelschnitte umschrieben sind." „Eine biquadratische Involution ist (nicht eindeutig) durch sechs Elementenpaare bestimmt." W. St.

Em. Weyr. Ueber Ausartungen biquadratischer Involutionen und über die sieben Systeme der eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte. Wien. Ber. LXXXIII. 807-829.

Mit Hülfe der dem Verfasser eigenen Methoden, aus bekannten

Sätzen der Geometrie neue Sätze der Algebra über Involutionen zu beweisen und zur Anschauung zu bringen und rückwärts diese zur Lösung geometrischer Probleme zu benutzen, werden in dem ersten Teile dieser Abhandlung specielle biquadratische Involutionen untersucht, welche auf die Tangenten eines Kegelschnitts K_2 übertragen werden. Einige der vom Verfasser erhaltenen Resultate mögen hier angegeben werden. Die Involutionscurve, d. h. der Ort der Schnittpunkte solcher Tangenten, die einem Quadrupel der Involution angehören, ist eine Curve I_3 dritter Ordnung. Enthält die Involution eine Gruppe mit zwei Doppelelementen, so hat I_3 einen Doppelpunkt in dem Schnittpunkt der die Doppelelemente darstellenden Tangenten von K_2. „Wenn eine biquadratische Involution zwei nur Doppelelemente enthaltende Gruppen besitzt, so besteht sie aus Elementenpaaren der durch diese beiden Gruppen bestimmten quadratischen Involution, so zwar, dass je zwei Elementenpaare der quadratischen Involution, welche die beiden Doppelelementengruppen harmonisch trennen, ein Quadrupel der biquadratischen Involution bilden. Die Doppelelemente der quadratischen Involution stellen das fünfte und sechste Doppelelement der biquadratischen Involution dar."

„Jeder einem dem Kegelschnitte K_2 umgeschriebenen einfachen Vierecke umgeschriebener Kegelschnitt I_2 ist zu K_2 in biquadratisch involutorischer Lage und umgekehrt." Die Curve I_3 ist in I_2 und eine Gerade I_1 zerfallen. Ein Elementenpaar von K_2 heisst conisch oder linear, je nachdem der Schnitt der das Paar darstellenden Tangenten auf I_2 oder I_1 liegt. „Durch ein Quadrupel und ein conisches Elementenpaar sind drei biquadratische Involutionen bestimmt, von denen jede zwei nur aus Doppelelementen bestehende Gruppen enthält." „Wenn eine biquadratische Tangenteninvolution auf K_2 drei nur Doppelelemente enthaltende Gruppen besitzt, so zerfällt die Involutionscurve in drei Gerade, welche ein bezüglich K_2 sich selbst conjugirtes Dreiseit bilden."

In dem zweiten Teile der Abhandlung werden gewisse biquadratische Involutionen auf rationalen ebenen Curven C_4 vierter

Ordnung betrachtet. Als fundamental werden solche Involutionen bezeichnet, welche in den drei Curvendoppelpunkten Punktepaare besitzen. Die Gruppen einer fundamentalen Involution werden durch ein Kegelschnittbüschel ausgeschnitten, dessen Grundpunkte auf C_4 liegen. Zwei fundamentale Involutionen heissen einander conjugirt, wenn jede Gruppe der ersten mit jeder der zweiten Involution auf einem Kegelschnitte liegt.

„Wenn eine biquadratische Involution, welche in den Doppelpunkten einer ebenen Curve vierter Ordnung Elementenpaare besitzt, sich selbst conjugirt ist, so sind ihre Quadrupel Berührungspunkte der Curve mit vierfach berührenden Kegelschnitten; umgekehrt bestimmen die vier Berührungspunkte eines solchen Kegelschnittes, als Quadrupel aufgefasst, mit den drei Curvendoppelpunkten, als Punktepaare aufgefasst, eine sich selbst conjugirte Involution."

Zu diesen sich selbst conjugirten Involutionen kommt der Verfasser durch folgenden Satz: „Wenn man auf C_4 eine fundamentale biquadratische Involution mit zwei nur Doppelelemente enthaltenden Gruppen construirt, so sind die Punkte der einen Gruppe und die Schnittpunkte der Curve mit der Verbindungslinie der Punkte der anderen Gruppe immer vier Punkte, in denen die Curve C_4 von einem Kegelschnitte berührt wird." Da nun die Doppelpunkte von C_4 als conische und lineare Doppelelemente der letzteren Involutionen aufgefasst werden können, wird man zu verschiedenen vierfach berührenden Kegelschnittsystemen geführt, deren Zahl sieben ist. W. St.

Em. Weyr. Ueber Involutionen zweiter Stufe.
Wien. Ber. LXXXIII. 349-351.

In dieser Notiz giebt der Verfasser an, wie die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ neutralen Elementenpaare einer Involution n^{ten} Grades und zweiter Stufe gefunden werden können.

„Wenn von einer Involution n^{ten} Grades zweiter Stufe drei beliebige sie bestimmende Elementengruppen $a_1 \dots a_n$, $b_1 \dots b_n$, $c_1 \dots c_n$ gegeben sind, so bestimmen je zwei eine Involution

n^{ten} Grades und erster Stufe. Diese drei Involutionen besitzen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ gemeinschaftliche Elementenpaare, und diese sind zugleich die neutralen Paare der Involution zweiter Stufe."

W. St.

C. LE PAIGE. Note sur la théorie des polaires dans les courbes géométriques. Cas. X. 212.

Enthält zwei Sätze über die Polaren ebener Curven.

Std.

C. LE PAIGE. Note sur la théorie des polaires. Belg. Bull. (3) I. 134-138.

J. M. DE TILLY. Rapport sur cette note. Belg. Bull. (3) I. 73-74.

Der Verfasser zeigt die Beziehungen, welche zwischen der Theorie der successiven Polaren der Curven und der Theorie der Involutionen von der Ordnung n bestehen. Z. B.: Wenn man durch einen Punkt eine Transversale zieht, die eine Curve n^{ter} Ordnung in n Punkten und die erste Polare in $n-1$ Punkten schneidet, so bildet jeder dieser letzteren, wenn man ihn als $(n-1)$-fach betrachtet, mit dem gegebenen Punkt eine Gruppe von n conjugirten harmonischen Punkten der n Schnitte der Transversalen mit C_n.

Mn. (O.).

F. BESSELL. Grundzüge der Geometrie des Cirkels. Hoppe Arch. LXVII. 44-63.

Unter der Geometrie des Cirkels versteht der Verfasser den Inbegriff aller derjenigen Constructionen, welche sich in einer Ebene ohne Hülfe des Lineals durch alleinige Anwendung des Cirkels als Constructionselement ausführen lassen. In derselben hat man es nur mit Kreisen und mit Punkten zu tun. Eine gerade Linie wird jedesmal nur durch zwei isolirte Punkte dar-

gestellt, welchen man zwar mit Leichtigkeit noch beliebig viele andere in derselben Richtung liegende hinzufügen kann, denen jedoch der continuirliche Zusammenhang fehlt und principiell fehlen muss.

Es wird nun die Lösung der Fundamentalaufgaben, nämlich den Durchschnitt 1) zweier Geraden, 2) eines Kreises und einer Geraden zu finden, ausführlich erörtert; ferner die graphische Lösung einer beliebigen Gleichung zweiten Grades mit rationalen Coefficienten angegeben. Dadurch ist dann auch das Problem der Kreisteilung in dem Sinne dieser Geometrie gelöst. Die Durchführung der Constructionen beruht auf elementaren Betrachtungen und bietet viel Interesse. W. St.

Z. Reggio. Sulla determinazione del polo di una retta data. Ven. Atti Ist. (5) VII. 1117-1120.

Die Beziehungen, welche zwischen Pol und Polare bezüglich eines Kreises bestehen, werden durch Abbildung mittels reciproker Radii vectores übertragen auf die Beziehungen, die zwischen einem Kreisbüschel und einem festen Kreise stattfinden. Hierdurch ergeben sich einige interessante Sätze. W. St.

K. E. Hoffmann. Ueber einen speciellen Fall des Apollonischen Taktionsproblems. Hoppe Arch. LXVI. 246-260.

Der Verfasser behandelt in elementarer Weise das Problem, diejenigen Kreise zu finden, welche drei einem Dreiecke anbeschriebene Kreise berühren. Unter den gesuchten Kreisen findet sich der Feuerbach'sche, für welchen einige bekannte Sätze bewiesen werden. W. St.

J. Blaschke. Ueber einige Eigenschaften der Kegelschnitte. Hoppe Arch. LXVII. 104-106.

W. St.

M. LERCH. Beitrag zur Theorie der Kegelschnitte. Cas. X. 160. (Böhmisch).

Unter Verwendung eines Princips von Chasles wird eine dreifache Constructionsart eines durch fünf Elemente gegebenen Kegelschnittes geliefert. Std.

TOWNSEND. Solution of a question (6410). Ed. Times XXXIV. 48.

Man zeichne Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt und constanter grosser Axe. Liegen dann ihre Mittelpunkte auf einem festen Kreise, so ist die Enveloppe derselben ein Kegelschnitt mit demselben Brennpunkt. O.

A. J. TORRY. Geometrical notes. Mess. (2) XI. 54-56.

Von einem bekannten Satze über das Vierseit ausgehend, stellt der Verfasser eine imaginäre Construction durch eine reelle Figur dar und leitet daraus in einfacher Weise verschiedene bekannte Sätze her. Glr. (O.).

A. J. TORRY. On conics circumscribed about or inscribed in triangles which are self-conjugate with respect to a given conic. Mess. (2) X. 161-170.

Ein Kegelschnitt, welcher einem in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt sich selbst conjugirten Dreieck um- oder eingeschrieben ist, wird der dem gegebenen Kegelschnitt harmonisch um- oder eingeschriebene Kegelschnitt genannt. Der Verfasser giebt in dieser Abhandlung eine Reihe von Sätzen über diese Kegelschnitte. Der Fall, dass diese Kegelschnitte Kreise sind, wird speciell betrachtet. Glr. (O.).

C. Intrigila e F. Laudiero. Dimostrazione d'un teorema di Faure. Batt. G. XIX. 245-258.

Der betreffende Satz lautet: Der Ort der Mittelpunkte aller einem gegebenen Dreieck einbeschriebenen und durch einen festen Punkt gehenden Kegelschnitte ist ein Kegelschnitt, welcher die Linien berührt, welche die Mitten der Seiten des gegebenen Dreiecks verbinden.

Nachdem auf synthetischem Wege der Beweis geliefert worden, werden durch Centralprojection der Figuren allgemeinere Sätze abgeleitet. Rg.

R. F. Davis, Genese, Townsend, Matz. Solutions of a question (6245). Ed. Times XXXIV. 49-50.

Die Enveloppe der Axen von Kegelschnitten, die zwei Gerade in zwei gegebenen Punkten berühren, ist eine Parabel.

O.

A. Ernst. Construction von Ellipsentangenten. Hoffmann Z. X. 179-189.

W. St.

E. Hain. Zur Polaritätstheorie der Kegelschnitte. Hoppe Arch. LXVI. 274-280.

Es werden folgende Sätze bewiesen:

Bestimmt man in der Ebene eines Dreiecks in Bezug auf dasselbe die conische Polare eines beliebigen Punktes und construirt bezüglich derselben das Polardreieck des Urdreiecks, so ist das perspectivische Centrum beider Dreiecke der ursprünglich gewählte Punkt selbst.

Der Ort der Punkte, deren Polaren bezüglich zweier Kegelschnitte auf einander senkrecht stehen, ist ein Kegelschnitt; der Ort der Punkte, deren Polaren parallel sind, eine Curve dritter Ordnung, welche dem gemeinsamen Polardreiecke umschrieben ist.

Durch einen Punkt P werden zu einer Geraden G in der

Ebene eines Kegelschnittes k Strahlen gezogen. Construirt man zu dem Schnittpunkte eines jeden Strahles durch P mit der Geraden G auf derselben den conjugirten Punkt bezüglich k, so beschreibt derselbe bei der Drehung des Strahles einen Kegelschnitt K. Einem Kegelschnittbüschel der k entspricht ebenfalls ein solches der K. Rg.

E. Hain. Ueber eine Verwandtschaft ersten Grades. Hoppe Arch. LXVI. 282-286.

Die Schwerpunkte aller Dreiecke, welche mit einem gegebenen Dreieck ähnlich liegen und einen gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt haben, liegen auf einer Geraden, welche durch den gemeinsamen Aehnlichkeitspunkt und den Schwerpunkt des Urdreiecks geht. Auf dieser Geraden bilden gewisse Punktepaare, deren Lage der Verfasser jedoch nur durch Coordinaten definirt, eine Involution. Rg.

Em. Weyr. Ueber die involutorische Lage sich berührender Kegelschnitte. Wien. Ber. LXXXIII. 63-69.

Wird eine Involution n^{ten} Grades erster Stufe auf das Tangentensystem eines Kegelschnittes K übertragen, so ist ihr Erzeugnis eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche für $n \leqq 4$ allgemeiner Natur ist. Es sei auf K eine cubische Tangenteninvolution mit einem dreifachen Elemente A gegeben. Der Involutionskegelschnitt I_2 wird K im Berührungspunkte a von A berühren und kann betrachtet werden als ein Kegelschnitt, welcher K in a berührt und irgend einem dem K umschriebenen Dreiseite umschrieben ist. Es ergeben sich dann leicht folgende Sätze:

„Wenn sich zwei involutorisch liegende Kegelschnitte berühren, so verhalten sich ihre Krümmungen in dem Berührungspunkte wie 1 : 4, und zwar hat der Träger der Punktinvolution die viermal grössere Krümmung.“ „Zwei sich berührende Kegelschnitte sind in (cubisch) involutorischer Lage, wenn sich ihre Krümmungen im Berührungspunkte verhalten wie 1 : 4.“ „Wenn

sich zwei Kegelschnitte doppelt berühren und einer von ihnen hat in einem der Berührungspunkte eine viermal grössere (kleinere) Krümmung als der andere, so findet dasselbe auch im zweiten Berührungspunkte statt." Der letzte Satz ist nur eine Specialisirung eines allgemeineren. W. St.

C. Taylor. On harmonically circuminscribed conics. Quart. J. XVIII. 50-52.

Ein Kegelschnitt heisst einem anderen harmonisch einbeschrieben oder umschrieben, wenn er einem Polardreieck des letzteren und dann unendlich vielen einbeschrieben oder umschrieben ist.

Es werden dann auf sehr einfachem Wege folgende zwei Sätze bewiesen:

A) Wenn ein Kegelschnitt C einem anderen J harmonisch umschrieben ist, so ist J der Curve harmonisch einbeschrieben.

B) Ist ein Dreieck dem Kegelschnitt C, welcher J harmonisch umschrieben ist, beliebig einbeschrieben, so liegt das perspektivische Centrum des Dreieckes und des ihm polaren Dreiecks auf C. W. St.

Fr. Hofmann. Ueber dreifach berührende Kegelschnitte mit vorgegebenem Brennpunkte. Hoppe Arch. LXVII. 332-333.

Es wird die Aufgabe gelöst: Einen Kegelschnitt zu construiren, der einen gegebenen Punkt B zum Brennpunkt hat und einen gegebenen Kegelschnitt K im Berührungspunkte A der gegebenen Tangente a möglichst innig berührt. W. St.

P. Kössler. Ueber die Entstehung eines Kegelschnittbüschels aus einem Strahlenbüschel nach der Methode von Newton. Pr. Breslau.

Die Newton'sche Methode ist in folgendem Satze enthalten:

Wenn sich zwei Winkel $EAF = \alpha$ und $GBH = \beta$ um ihre Scheitel A und B in derselben Ebene so drehen, dass der Durchschnittspunkt P der Schenkel AF und BG eine Gerade OQ durchläuft, dann beschreibt der Durchschnittspunkt D der Schenkel AE und BH einen durch A und B gehenden Kegelschnitt. Allen Strahlen des Büschels P entsprechen die Kegelschnitte eines Büschels mit den folgenden Basispunkten: A, B, dem Punkte, welchem P entspricht, und dem Punkte, welcher dem Schnittpunkte eines beliebigen Strahles mit der Verbindungslinie des Büschels entspricht.

Auf analytischem Wege wird dieses Kegelschnittbüschel und namentlich der Mittelpunktskegelschnitt desselben untersucht. Schliesslich werden Durchmesserconstructionen angegeben.

Rg.

E. Mahler. Ueber gewisse Systeme von Kegelschnitten, die mit einander projectivisch sind, und deren Erzeugnis. Hoppe Arch. LXVI. 358-365.

Es werden die folgenden beiden Sätze bewiesen:

„Wenn man bezüglich eines jeden Kegelschnittes eines Büschels den Ort der Punkte sucht, deren Tangentenpaar an ihn harmonisch geteilt wird durch das an einen Fundamentalkegelschnitt des Büschels gezogene Tangentenpaar, so bekommt man ein System von Kegelschnitten, welchem das den Elementen des Büschels gemeinsame, sich selbst conjugirte Dreieck als sich selbst conjugirtes Dreieck entspricht und das mit jenem Büschel projectivisch verwandt ist. Das Erzeugnis dieses Systems von Kegelschnitten mit jenem Büschel ist eine C_6, die in das betreffende Fundamentalelement des Büschels und in eine C_4 zerfällt, deren Schnittpunktepaare mit den Seiten des genannten sich selbst conjugirten Dreiecks durch dessen Ecken harmonisch geteilt werden."

Wenn man das Erzeugnis jener zwei Systeme von Kegelschnitten sucht, von denen das eine so beschaffen ist, dass das von einem Punkte irgend eines Kegelschnitts dieses Systems an den entsprechenden Kegelschnitt des Büschels $K-\lambda K'$ gezogene Tangentenpaar harmonisch geteilt wird durch das von diesem

Punkte an $K = 0$ gezogene Tangentenpaar, und das andere System dieselbe Eigenschaft gegenüber dem Büschel bezüglich $K' = 0$ hat, so bekommt man eine C_8, welche die Seiten des dem gegebenen Büschel sich selbst conjugirten Dreiecks in vier Punktepaaren einer Involution schneidet, deren Doppelpunkte die Dreiecksecken sind.“ Rg.

F. Bergmann. Kegelschnittbüschel-Constructionen. Hoppe Arch. LXVII. 177-191.

Der Verfasser geht von einer bekannten Construction des Kegelschnittbüschels aus. Zwei Gerade sind Träger involutorischer Punktreihen. Von einem festen Punktepaar der ersten Geraden werden die Punktepaare der zweiten projicirt. Die Schnitte der zu demselben Paare der zweiten Geraden gehörenden Projectionsstrahlen liegen auf einem Kegelschnitt. Wird das Paar der ersten Geraden verändert, so erhält man die Kegelschnitte eines Büschels. Insbesondere wird der Fall betrachtet, dass die Grundpunkte des Büschels imaginär sind, und für ihn der Ort der Mittelpunkte der Asymptoten und Axen der Curven des Büschels construirt. W. St.

J. Tesař. Synthetische Untersuchung der gemischten Kegelschnittschaar $S(3l, 1p)$ mit einem imaginären Tangentenpaar. Wien. Ber. LXXXIV. 194-228.

Herr Schröter hatte in seiner „Theorie der Kegelschnitte“ (Leipzig, 1876, 2. Aufl. 3. Abschn. p. 360) das System aller Kegelschnitte, welche drei gegebene Strahlen berühren und durch einen gegebenen Punkt gehen, und das dual entsprechende System nur unter der Voraussetzung untersucht, dass die gegebenen drei gleichartigen Elemente sämmtlich reell sind. Herr Tesar fügt nun hier eine synthetische Behandlung desjenigen Kegelschnittsystems hinzu, welches durch einen reellen Punkt A, eine reelle Tangente A und zwei imaginäre Tangenten bestimmt ist. Die beiden letzteren denkt er sich als die Doppelelemente eines in-

volutorischen Strahlbüschels M, von welchem zwei Paare einander doppelt entsprechender conjugirter Strahlen a, α und b, β gegeben sind. Der Verfasser basirt seine Untersuchung auf das Princip der affinen Zuordnung ebener und räumlicher Systeme und findet auf rein synthetischem Wege 1) die beiden Kegelschnitte des Systems, welche die Basistangente in einem gegebenen Punkte berühren, 2) den einen Kegelschnitt, welcher im Basispunkt A eine durch diesen gelegte Gerade berührt, 3) die vier (zwei reelle und zwei imaginäre) Kegelschnitte des Systems, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, und 4) die beiden (je nach der Lage der Basiselemente zwei reelle oder zwei imaginäre) Kegelschnitte, welche eine gegebene Gerade berühren. Bei der Betrachtung der in eine Doppelgerade ausgearteten Kegelschnitte des Systems übersieht der Herr Verfasser, dass zu der einen reellen Ausartung noch zwei imaginäre hinzutreten. Schliesslich werden die Lagenverhältnisse der Kegelschnitte und die Entscheidungsmerkmale, ob Ellipse, Parabel, Hyperbel, ausführlich erörtert, und zwar im Zusammenhang mit dem Kegelschnitt, welcher der Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte des Systems (3l, 1p) ist. Für das System (1l, 3p) werden die Resultate durch duale Uebertragung gewonnen. Scht.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Gebilde ersten und zweiten Grades in synthetischer Behandlung von D. Edwardes, Genese, Taylor, Townsend, W. J. C. Sharp, R. F. Davis, G. Eastwood, C. Morgan, G. Turriff, R. E. Riley, R. Knowles, R. Tucker, G. F. Walker, W. B. Grove, C. A. Scott, C. Bickerdike, A. Easton, Ch. Ladd, J. O'Regan, W. H. Harris, W. H. Blythe, T. R. Terry, Wolstenholme, F. Laudiero, Gambey, Moret-Blanc, H. du Montel finden sich Ed. Times XXXIV. 24-25, 31, 34-35, 38-39, 71, 97, 103-104, 112-113, 119, XXXV. 26-27, 28, 48-49, 50, 77, 80-81, 85; Nouv. Ann. (2) XX. 179, 273-275, 372-373.

O.

E. Dewulf. Exercices de géométrie. Nouv. Ann. (2) XX. 391-401.

Es werden in diesem Aufsatze zwei Aufgaben gelöst.

1) Die Jacobi'sche Curve eines Netzes von Curven dritter Ordnung, welches durch sieben Punkte gegeben ist, soll construirt werden.

2) Die Zahl der Doppelpunkte eines Büschels von Curven dritter Ordnung, welches durch sieben Punkte gegeben ist, soll construirt werden.

Als Vorfrage ergiebt sich: Welche Relation besteht zwischen den Systemen der Punkte x und y, welche den Kegelschnittbüschel (1, 2, 3, x) [4, 5, 6, 7] und den Strahlenbüschel y[4', 5', 6', 7'] projectiv machen, wenn 1, 2, 3, 5, 6, 7, 4', 5', 6', 7' beliebig gegebene Punkte sind? Der Verfasser findet den schon bekannten Satz, dass allen Punkten y, welche auf einem dem Viereck 4', 5', 6', 7' umschriebenen Kegelschnitte liegen, alle Punkte x einer Curve C_4 vierter Ordnung entsprechen, welche in 1, 2, 3 Doppelpunkte besitzt und die Punkte 4, 5, 6, 7 enthält. Der Kegelschnitt und C_4 beschreiben einander projective Curvenbüschel, deren Schnitt eine Curve C_6 sechster Ordnung ist, der Ort der Punkte x, welche die Büschel (1, 2, 3, x) [4, 5, 6, 7] und x[4', 5', 6', 7'] projectiv machen. C_6 hat die Punkte 1, 2, 3 zu Doppelpunkten und enthält die Punkte 4, 5, 6, 7, 4', 5', 6', 7'. Fallen 4', 5', 6', 7' mit 4, 5, 6, 7, zusammen, so ist C_6 der Ort der Punkte x, welche die Büschel (1, 2, 3, x) [4, 5, 6, 7] und x(4, 5, 6, 7) projectiv machen. Es folgt hieraus: Der Ort der Doppelpunkte eines Netzes von Curven dritter Ordnung durch die Punkte (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) oder die Jacobi'sche Curve des Netzes ist eine Curve sechster Ordnung, welche in jedem der sieben Puukte (1, 2 ...) einen Doppelpunkt hat. Diese Curve kann auch erzeugt werden durch die Schnitte der projectiven Büschel von Curven dritter Ordnung

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, z)\ [9, 10, 11, 12, 13]$$

und

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)\ [9, 10, 11, 12, 13],$$

wenn 8, 9, 10, 11, 12, 13 Doppelpunkte solcher Curven des Netzes sind, welche zerfallen; der Punkt z ist dadurch eindeutig bestimmt.

Da zwei entsprechende Curven dieser Büschel sich noch in zwei Punkten schneiden, so folgt, dass die Jacobi'sche Curve des Netzes mit Hülfe des Cirkels und Lineals construirt werden kann.

Nun folgt durch Betrachtung zweier Netze, welche sechs gemeinsame Grundpunkte haben, dass unter den Curven eines Büschels sich zwölf befinden, welche Doppelpunkte haben. Dass diese zwölf Punkte aber mit Hülfe des Cirkels und Lineals construirbar seien, wie der Verfasser angiebt, kann der Berichterstatter nicht einsehen.

Dieselben Fragen nach den Doppelpunkten von Netzen und Büscheln von Curven dritter Ordnung werden zum zweiten Male beantwortet mittels Erledigung der Vorfrage: „Welche Relation besteht zwischen den Punktsystemen x und y, welche die Büschel: $(1, 2, 3, x)$ $[4, 5, 6, 7, 8]$ und $y[4', 5', 6', 7', 8']$ projectiv machen?" Der Verfasser findet zwischen x und y eine birationale Transformation zehnten Grades, welche zwölf Doppelpunkte hat.

W. St.

J. R. Vaňaus. Ueber die Trisectorie. Cas. X. 153. (Böhmisch)

Nach durchgeführter Ableitung der betreffenden Curve dritten Grades wird deren Rolle bei der Trisection des Winkels besprochen, welche Aufgabe zugleich eine historische Beleuchtung erfährt.

Std.

A. Ameseder. Ueber Constructionen ebener Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten. Prag. Ber. 1880. 3-9.

Eine rationale C_4 ist durch fünf weitere Bedingungen bestimmt. Bezeichnet man mit p die Bedingung für einen Punkt, mit A, Ap die für eine Tangente, resp. Tangente mit Berührungs-

punkt, mit D, Dp_1, Dp_2 die für eine Doppeltangente allein, resp. mit einem oder zwei Berührungspunkten, mit i, i_1 endlich die für eine Wendetangente allein, resp. mit zugehörigem Wendepunkt, so muss daher sein:

$$p+t+2tp+2D+3Dp_1+4Dp_2+2i+3i_1 = 5.$$

Vorausgesetzt, dass von den Bedingungen eine dieser Relation genügende Gruppe gegeben ist, wird die Aufgabe gestellt, die betreffende C_4 zu construiren, und die Lösung, sowie die jedesmalige Zahl derselben auf Grund der involutorischen Erzeugung der Curve gegeben, welche der Verfasser in einer früheren Arbeit erläutert hat. V.

K. Bobek. Ueber die Krümmungsmittelpunkte der Curven, welche die Punkte einer Ebene bei einer unendlich kleinen Verschiebung derselben in ihr beschreiben. Prag. Ber. 1880. 56-64.

Der Construction der Krümmungsmittelpunkte liegt eine specielle Steiner'sche Verwandtschaft zu Grunde, welche durch folgenden Satz gegeben ist: „In der speciellen Steiner'schen Verwandtschaft entsprechen den Geraden G der Ebene Kegelschnitte K, welche durch die Hauptpunkte m und n gehen, in n eine bestimmte Gerade berühren und auf G Involutionen induciren, die aus m durch eine einzige Strahleninvolution projicirt werden. Die letztere hat mit den projectiven Büscheln (n) die Doppelstrahlen gemeinschaftlich.“

Denkt man sich nun die Verschiebung einer Ebene dadurch hervorgebracht, dass eine Curve C auf einer festen Curve Γ abgerollt wird, so wird jeder Punkt a der Ebene eine Trajectorie beschreiben, deren Normale in einem bestimmten Punkte nach dem momentanen Berührungspunkte von C mit Γ geht. Der Krümmungsmittelpunkt α der Trajectorie ist an der Stelle a dann construirbar. Die Punkte a der Ebene und die Punkte α stehen für einen gegebenen Moment in einer speciellen Steiner'schen Verwandtschaft, bei welcher die Grundpunkte m und n in dem

Berührungspunkte von C mit Γ sich vereinigt haben; die für n sich ergebende Strahleninvolution ist eine orthogonale.

„Die Krümmungsmittelpunkte der Trajectorien einer Geraden G bei einer unendlich kleinen Verschiebung derselben in der Ebene liegen auf einem Kegelschnitt K, der durch das Momentancentrum geht. Alle Kegelschnitte K osculiren einander in m und induciren auf den ihnen zugehörigen Geraden G Polinvolutionen, die aus m durch Rechtwinkelstrahlen projicirt werden." Ist a ein Punkt der Trajectorie, α der entsprechende Krümmungsmittelpunkt, so gilt die Gleichung $\overline{am}^2 = \overline{a\alpha}.\overline{an}$. „Die Punkte, welche Inflexionspunkte ihrer Trajectorien beschreiben, liegen auf einem Kreise J, der durch das Momentancentrum geht." Sind die Curven C und Γ bekannt, so wird schliesslich die Construction des Kreises J gegeben. W. St.

S. Roberts. On an immediate generalization of local theorems in which the generating point divides a variable linear segment in a constant ratio. Sylv., Am. J. III. 336-343.

Eine Curve, „Verhältniscurve", wird bestimmt als Ort eines Punktes, welcher eine der Länge und Richtung nach variable Strecke nach constantem Verhältnis teilt. Im Zusammenhange mit dieser Curve steht ihre „Scheitelcurve", deren Punkte die dritten Ecken ähnlicher, mit der gegebenen Strecke als Basis construirter Dreiecke sind. Beide Curven haben dieselbe Ordnung und dasselbe Geschlecht. Rg.

S. F. W. Baehr. Note sur une enveloppe. Nouv. Ann. (2) XX. 250-253.

Setzt man voraus, dass die Zeiger einer Uhr von gleicher Länge sind, und verbindet man die Endpunkte der Zeiger durch eine Gerade, so wird diese eine Curve umhüllen, welche hier untersucht wird. Diese Curve ist eine Epicycloide, welche von einem Punkte eines Kreises beschrieben wird, dessen Radius

gleich $\frac{1}{13}$ des Halbmessers der Uhrscheibe ist, und welcher auf einem Kreise rollt, dessen Radius gleich $\frac{11}{13}$ des Halbmessers der Uhrscheibe ist, und welcher mit letzterer concentrisch liegt. Das Problem ist schon im Jahre 1872 (s. F. d. M. IV. 354) von Herrn Kiepert in allgemeinerer Form erledigt und darüber in dem Jahrbuch berichtet worden. W. St.

A. SUCHARDA. Eine Tangentenconstruction zur Astroide. Hoppe Arch. LXVI. 321-325.

Dieser Aufsatz giebt eine Annäherungsconstruction der durch einen beliebigen Punkt gehenden Tangenten der Astroide.

W. St.

WEILL. Note sur la cardioïde et le limaçon de Pascal. Nouv. Ann. (2) XX. 160-171.

Aus einer Reihe von zum Teil bekannten Sätzen über die Cardioide und die Pascal'sche Schnecke werden hier Theoreme über Curven abgeleitet, welche mit den ersten collinear verwandt sind. W. St.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Curven von höherem als dem zweiten Grade in synthetischer Behandlung von F. D. THOMSON, G. TORELLI, E. W. SYMONS, D. EDWARDES, NASH, CH. LADD, MATZ, E. PECQUERY, E. CHRÉTIEN finden sich Ed. Times XXXIV. 118-119, 119, 120, XXXV. 39-40, 40-41, 54, 54-55; Nouv. Ann. (2) XX. 184-185.

O.

B. Räumliche Gebilde.

G. Veronese. Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens. Klein Ann. XIX. 161-234.

Es ist bekannt, dass gewisse Sätze der Geometrie der Lage für ebene Gebilde, welche in dieser Disciplin grundlegend sind, mit Hülfe räumlicher höchst einfacher Figuren abgeleitet werden können. Eigenschaften der räumlichen Figur, welche keines Beweises bedürfen, werden auf die Eigenschaften der ebenen Figur, die nicht selbstverständlich erscheinen, übertragen. Es ist nun naheliegend, und mehrere Mathematiker haben sich schon mit Erfolg damit beschäftigt, zu zeigen, wie interessante projectivische Eigenschaften von Figuren im ebenen Raume R_3 von drei Dimensionen aus einfachen selbstverständlichen Eigenschaften von Figuren in Räumen mit mehr als drei Dimensionen sich ergeben. Da eine directe Anschauung von solchen Räumen uns versagt ist, so wird die Grundlage der Operationen und Constructionen in denselben stets eine analytische sein, die freilich einfach genug ist. Es lassen sich dann die auf analytischem Wege gefundenen Fundamentalsätze in eine synthetisch-geometrische Form kleiden, und man kann dann mit ihnen operiren, wie man es in der Geometrie der Lage zu tun gewohnt ist. In dieser Weise verfährt der Verfasser. Er stellt sich die Aufgabe, in consequenter Weise die n-dimensionale Geometrie zu benutzen, um die projectivischen Beziehungen in Räumen von verschiedenen Dimensionen, daher auch in der Ebene und in gewöhnlichen Räumen zu studiren. Die Arbeit hat viele Berührungspunkte mit der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, in welcher die hier verwendeten Principien zum ersten Male und vollständig durchgebildet auftreten.

Wir haben es mit einer Einleitung und fünf Abschnitten zu tun. Die Einleitung befasst sich mit der Aufstellung und Erklärung der Gebilde, welche in einem Fundamentalraume R_n

von n Dimensionen möglich sind. Zwei beliebige Räume R_m und $R_{m'}$ in R_n schneiden sich in einem Raume R_a, wobei $a = m + m' - n$ ist. Ist $a = 0$, so haben R_m und $R_{m'}$ einen Punkt gemein; ist a negativ, so schneiden sich die Räume nicht. Im Allgemeinen schneiden sich $(s+1)$ Räume: R_m, $R_{m^{(1)}} \ldots R_{m^{(s)}}$ in R_n in einem Raume R_q, wobei $q = \Sigma m^{(i)} . \Sigma d_k - s . n$ ist, und es können hier alle d verschwinden. Eine Curve m^{ter} Ordnung wird definirt durch die Bewegung eines Punktes, die durch ein algebraisches Gesetz so bestimmt ist, dass der Punkt von seiner Anfangslage nur in zwei entgegengesetzten Richtungen fortrücken kann. Diese Curve ist von der m^{ten} Ordnung, wenn sie mit einem R_{n-1} in R_n in m Punkten geschnitten wird; sie kann nur in einem $R_2 \ldots R_m$ enthalten sein. Wenn eine Curve sich stetig bewegt, so erzeugt sie einen 2-dimensionalen Raum, der von der m^{ten} Ordnung ist, wenn er von einem beliebigen Raume R_{n-1} von R_n in einer Curve C^m geschnitten wird.

Abschnitt I. Configurationen aus einer endlichen Anzahl von linearen Räumen. Eine Fundamentalpyramide in R_n ist die einfachste Pyramide dieses Raumes und besteht aus $(n+1)$ beliebigen Punkten, welche nicht in einem niederen Raume liegen, und allen Räumen, welche diese Punkte mit einander verbinden. Unter den verschiedenen Arten einer Configuration von m Punkten versteht der Verfasser die verschiedenen Lagen, welche m Punkte in der Configuration annehmen können, ohne dass sie teilweise zusammenfallen, und ohne dass Rücksicht auf die metrischen Beziehungen genommen wird. Es wird dann folgender für die Aufstellung solcher Configurationen wichtige Satz bewiesen: „Jede Configuration von $n+1$ oder weniger als $n+1$ Punkten in einem Raume R_r, die nicht gleichzeitig in einem niedrigeren Raume als R_r liegen, kann als Projection von unendlich vielen Fundamentalpyramiden in R_n oder als Schnitt unendlich vieler Fundamentalpyramiden eines höheren Raumes als R_r angesehen werden."

Abschnitt II. Classification der Grundgebilde; projectivische Zuordnung. Analog der Bestimmung der Grundgebilde in der Geometrie der Lage wird hier definirt: „Das Grundgebilde

n^{ter} Stufe ist der Raum R_n selbst. Die anderen Grundgebilde haben entweder einen Raum als Träger oder als Axe; d. h. entweder liegen sie „in einem Raume" oder sie gehen „durch einen Raum." Zwei duale Räume wie R_m und R_{n-m-1} sind Träger und Axen von zwei dualen Gebilden derselben Stufe. Zwei Grundgebilde derselben Stufe, welche beide einen Träger oder eine Axe besitzen, heissen gleichartig, wenn sie durch duale Elemente erzeugt werden." Es muss wohl hinzugefügt werden, dass diese dualen Elemente sich nicht auf R_n beziehen, sondern auf den Träger resp. die Axe. Wenn von zwei Grundgebilden das eine einen Träger S_m und das andere eine Axe S_{n-m-1} hat, so heissen sie gleichartig, wenn das zweite den Träger des ersten in einem zu diesem gleichartigen Gebilde schneidet. Der Verfasser beweist dann den Satz: „Wenn zwei Gruppen von $n+1$ beliebigen Punkten $A_0^{(1)} \ldots A_0^{(n+1)}$; $A_0^{1(1)} \ldots A_0^{1(n+1)}$ in zwei Räumen Σ_{n-1}, Σ'_{n-1}, ohne in niedrigeren Räumen zu liegen, enthalten sind, so kann man sie durch successives Projiciren und Schneiden aus $n+1$ Punkten $A_{(1)}^{(1)} \ldots A_{(n+1)}^{(n+1)}$ eines dritten Raumes Σ''_{n-1} erhalten und somit in einander überführen." Er geht dann über zu der Definition der collinearen und reciproken Gebilde im Raume R_n, wie sie durch Verallgemeinerung der von Möbius gegebenen Definition in R_3 folgt: „Zwei m-dimensionale Räume S_m und S'_m heissen collinear oder reciprok verwandt, wenn einem Punkte R_0 von S_m ein Punkt R'_0 oder ein Raum R'_{m-1} von S'_m entspricht, so dass, wenn der Punkt R_0 ein Gebilde p^{ter} Stufe in S_m beschreibt, das entsprechende Element das entsprechende Gebilde p^{ter} Stufe von S'_m beschreibt." Ferner: „Zwei Gebilde m^{ter} Stufe um zwei Axen S_{n-m-1}, S'_{n-m-1} in R_n sind collinear oder reciprok auf einander bezogen, wenn sie von einem R_m in zwei collinearen oder reciproken Gebilden S_m, S'_m geschnitten werden." Ist R_m eine Gerade, so folgt, dass zwei projective Gebilde erster Stufe in R_m gleichzeitig collinear und reciprok sind. Die Bemerkung, welche in Rücksicht hierauf über einen von Herrn Reye in seiner Geometrie der Lage ausgesprochenen Satz gemacht wird, beruht wohl auf einem Misverständnisse seitens des Verfassers. Da zwei collineare Räume R_{n-1} in R_n durch

$n+1$ Paare von Punkten bestimmt sind, so schliesst man: „Zwei collineare Gebilde $(n-1)^{ter}$ Stufe $S^{(1)}_{n-1}$, $S^{(2)}_{n-1}$ in R_n lassen sich durch fortgesetztes Projiciren und Schneiden mittels der Elemente eines dritten Gebildes $(n-1)^{ter}$ Stufe $S^{(3)}_{n-1}$ in einander überführen." Es werden in diesem Abschnitte noch in einander liegende collineare Räume betrachtet.

Abschnitt III. behandelt die $(n-1)$-dimensionale Fläche zweiten Grades F^2_{n-1} und enthält interessante Sätze über die F^2_{n-1}, welche im Wesentlichen als Verallgemeinerungen von bekannten Sätzen über Flächen zweiten Grades in R_3 angesehen werden können.

Abschnitt IV. Curven. Die Charactere einer Curve C^m in R_n ergeben sich in analoger Weise, wie diejenigen einer C^m in R_3. Man hat hier aber die Beziehungen von C^m mit den Räumen $R_1 \ldots R_{n-1}$ in Betracht zu ziehen, um die Charactere zu erhalten. Der Verfasser findet so für C^m $3n$ Charactere, zwischen welchen $3(n-1)$ Gleichungen bestehen, die aus den Plücker'schen Formeln in ähnlicher Weise abgeleitet werden wie die Cayley'schen Gleichungen. Es ergiebt sich ebenso das Geschlecht p von C^m aus den Characteren. Interessante Anwendungen dieser Beziehungen werden gemacht. Der Verfasser nennt zwei Curven von derselben Art, wenn sie dieselben Charactere besitzen. Alle C^n von R_n gehören zu derselben Art, ihr Geschlecht ist Null, und sie heissen daher rationale Normalcurven des Raumes R_n; sie haben keine stationären und keine Doppelelemente. Für $p=1$ folgt: „Die elliptische Curve C^{n+1} in R_n hat keine doppelten oder stationären Elemente mit Ausnahme von $(n+1)^2$ stationären Räumen R_{n-1}." Alle elliptischen Curven C^{n+1} in R_n gehören also zu derselben Art. Folgende Sätze verdienen besondere Beachtung: „Jede beliebige Rationalcurve n^{ter} oder niedrigerer Ordnung in R_2, $R_3 \ldots R_{n-1}$ ist immer die eindeutige Projection einer Normalcurve C^n des R_n. Jede rationale Curve n^{ter} oder niedrigerer Klasse in $R_2 \ldots R_{n-1}$ kann immer durch geeignetes Schneiden aus der developpablen Fläche einer C^n in R_n erhalten werden." Es schliessen sich hieran noch einige Sätze über Curven mit beliebigem p.

Abschnitt V. Erzeugnisse durch collineare Grundgebilde. In diesem Abschnitte wird eine Reihe von Sätzen vorgetragen, welche den bekannten Sätzen über die Erzeugnisse von collinearen Gebilden in R_2 und R_3 entsprechen. Es kommt dabei die doppelte Erzeugung solcher Gebilde, wie sie von Herrn Schur (Klein Ann. XVIII. 1-33, s. die folgende Seite) betrachtet worden ist, zur Sprache. Der Verfasser wendet sich dann zu den Rationalcurven C^n in R_n und giebt als Beispiel die C^4 in R_4, aus welcher alle Eigenschaften der rationalen C^4 in R_2 und R_3 folgen. Weiter werden die in eine Ebene eindeutig abbildbaren Linienflächen behandelt. Für den Raum R_n giebt es eine Normalfläche F_2^{n-1}, welche eine Schaar gerader Linien enthält. Für sie gilt der Satz: „Jede beliebige in eine Ebene eindeutig abbildbare Linienfläche in R_3, $R_4 \dots R_{n-1}$ von niederer als der n^{ten} Ordnung ist immer die eindeutige Projection einer Normalfläche $R_1 \dots F_2^{n-1}$ in R_n.“ Es werden dann die Regelfläche dritter Ordnung und einige andere Flächen vierter und sechster Ordnung, die in einer Ebene eindeutig abbildbar sind, untersucht.

W. St.

G. Veronese. Sopra alcune notevoli configurazioni di punti, rette e piani, di coniche e superficie di 2° grado e di altre curve e superficie. Rom, Acc. L. Mem. (3) IX.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. A. p. 463.

M. Pasch. Beweis eines Satzes über projective Punktreihen. Kronecker J. XCI. 349-351.

Werden auf einer Geraden, in welcher durch zwei projective, aber nicht involutorische Punktreihen P und P' eine projective Beziehung gegeben ist, dem Punkte y durch die Beziehungen $P'P$ und PP' resp. die Punkte x und z zugeordnet, und wird ein weiterer Punkt so construirt, dass die gerade Punktreihe $xzyr$ einem festen Gebilde projectiv ausfällt, so ist auch die zwischen y

und r entstehende Beziehung Projectivität und bei der Projectivität PP' sich selbst homolog.

Dieser hier von Herrn Pasch rein geometrisch bewiesene Satz ist eine Verallgemeinerung eines von Herrn Schröter in seiner „Untersuchung zusammenfallender reciproker Gebilde in der Ebene und im Raume" (Borchardt J. LXXVII. p. 120, siehe F. d. M. VI. 1874. p. 375) aufgestellten Satzes. Der Schröter'sche Satz ergiebt sich aus dem obigen, wenn $xzyr$ harmonisch liegen.

Scht.

F. Schur. Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen. Klein Ann. XVIII. 1-33.

Die synthetischen Untersuchungen, welche die Eigenschaften geometrischer Gestalten durch Zusammenstellung der einfachsten Grundgebilde entwickeln, und welche von Steiner in seinen „Systematischen Entwickelungen" begonnen, von Reye in seiner „Geometrie der Lage" mit Erfolg fortgesetzt sind, werden hier bis zu den Erzeugnissen von vier collinearen Ebenenbündeln und von vier collinearen räumlichen Systemen weitergeführt. Der Verfasser beginnt mit der bekannten Erzeugung der Raumcurve dritter Ordnung aus zwei collinearen Ebenenbündeln und der Fläche dritter Ordnung aus drei solchen Ebenenbündeln, begnügt sich jedoch nicht mit den aus einer solchen Erzeugung hervorgehenden Resultaten, sondern studirt vorzugsweise (und das ist das Characteristische und Fruchtbringende in der Abhandlung) den Zusammenhang der durch eine Erzeugung eines Gebildes bedingten unendlich vielen Erzeugungen desselben. Die Gesammtheit der ∞^1 collinearen Ebenenbündel, von denen je zwei eine und dieselbe Raumcurve dritter Ordnung erzeugen, und deren Scheitel diese Curve selbst bilden, bezeichnet Herr Schur als ein „Büschel" von collinearen Ebenenbündeln. Analog wird die Gesammtheit der ∞^2 collinearen Ebenenbündel, von denen je drei nicht demselben Büschel angehörige eine und dieselbe Fläche dritter Ordnung erzeugen, und deren Scheitel die Fläche selbst bilden, ein „Netz" von collinearen Ebenenbündeln genannt.

Durch diese Definitionen erlangen die Resultate des Herrn Reye über die beiden Netze der auf einer Fläche dritter Ordnung liegenden Raumcurven dritter Ordnung eine sehr übersichtliche Gestalt. Von diesen Resultaten gelangt Herr Schur zu dem Netze collinearer ebener Systeme, von welchen je drei eine und dieselbe ebene Curve dritter Ordnung als den Ort der Schnittpunkte von sich entsprechenden Geraden der drei Systeme erzeugen. Eingehend wird die eindeutige Transformation dieser Curve in sich, sowie das vollständige System der sie erzeugenden Netze von collinearen ebenen Systemen behandelt. Die analoge Behandlung der Fläche dritten Grades führt dann den Verfasser zu einem interessanten neuen Satze über die Abhängigkeit der Geraden eines Schläfli'schen Doppelsechs von einander. Dieser Satz lautet: „Die conjugirten Geraden eines Doppelsechs einer Fläche dritter Ordnung sind reciproke Polaren in Bezug auf eine und dieselbe Fläche zweiter Ordnung."

Diesen mehr vorbereitenden Untersuchungen folgt als durchaus neuer Schritt die Betrachtung des Erzeugnisses von vier collinearen Ebenenbündeln. Hier ergeben sich folgende Resultate: Vier collineare Ebenenbündel erzeugen eine Raumcurve sechster Ordnung c_6 mit sieben scheinbaren Doppelpunkten. Die Gesammtheit (Gebüsch) der collinearen Ebenenbündel, welche diese c_6 erzeugen, enthält ∞^3 Netze collinearer Ebenenbündel, von denen je drei ein Bündel und je zwei ein Büschel von Bündeln gemein haben. Jeder Punkt des Raumes ist Centrum eines Bündels des Gebüsches; nur die Punkte der c_6 sind Centren eines Büschels von Ebenenbündeln. Jedes dieser Büschel enthält drei specielle in Ebenenbüschel ausartende Bündel, deren Axen dreifache Secanten der c_6 sind. Diese dreifachen Secanten bilden eine Linienfläche achter Ordnung. Dieselbe Raumcurve sechster Ordnung wird dann auch als Ort derjenigen Punkte erzeugt, in welcher sich Büschel entsprechender Ebenen von drei collinearen räumlichen Ebenensystemen treffen; und diese beiden Erzeugungen werden in engen Zusammenhang gebracht. Es ergiebt sich, dass es ∞^{24} Raumcurven sechster Ordnung giebt, welche durch ein Gebüsch collinearer Ebenenbündel oder das

zugehörige Netz collinearer räumlicher Elementargebilde erzeugt werden. Weitere Untersuchungen beziehen sich auf die eindeutige Abbildung der Curve sechster Ordnung auf die Fläche ihrer dreifachen Secanten, auf gewisse Punktgruppen der Curve, auf den Zusammenhang der Curve mit einem Flächengebüsch zweiten Grades, auf die Eigenschaft der Curve, Kerncurve eines Flächenbündels zweiten Grades zu sein, und auf das Polarnetz einer Fläche dritter Ordnung. Bemerkt mag noch werden, dass die von Herrn Schur studirte Raumcurve sechster Ordnung als Erzeugniss von drei collinearen räumlichen Systemen auch von Herrn Sturm in seinen einleitenden Raumcurvenuntersuchungen (Clebsch Ann. III. 281-29[illegible], s. F. d. M. II. 1870, p. [illegible]) erkannt und kurz behandelt ist.

Schliesslich geht Herr Schur auf ein noch ganz unbebautes Untersuchungsfeld, indem er das Erzeugniss von vier collinearen räumlichen Systemen studirt. Es ist dies eine Fläche vierter Ordnung, welche zwar nicht, wie die allgemeine von 34, sondern nur von 33 Constanten abhängt, jedoch alle bisher besonders behandelten Flächen vierten Grades als specielle Fälle umfasst. Zunächst entwickelt Herr Schur hier nur gewisse Haupteigenschaften, die sich für diese Fläche vierten Grades aus der erwähnten Erzeugung ergeben, indem er sich ein Eingehen auf speciellere Fragen für eine spätere Arbeit vorbehält.

Scht.

E. KLEIN. Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde. Marburg. N. G. Elwert.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. A. p. 464.

LAGUERRE. Sur la transformation par directions réciproques. C. R. XCII. 71-74.

Der Verfasser giebt hier eine Erweiterung einer schon früher (la géométrie de direction) von ihm aufgestellten Berührungstransformation in der Ebene für den Raum. Eine Fläche, welche

n Raum in zwei Teile teilt, wird als Begrenzung des einen
ler anderen Teiles als zwei Gebilde aufgefasst. Ein solches
ebilde heisst „semi-surface.“ Damit zwei solcher „semi-surfaces“
ch berühren in einem Punkte, müssen sie nicht nur in diesem
unkte dieselben Tangentialebenen haben, sondern die äusseren
egionen der Oberflächen müssen in der Nähe dieses Punktes
ereinstimmen. Als Elemente werden die Halbebenen, Halb-
egel und Halbkugeln eingeführt, wenn diese Ausdrücke in dem
en angegebenen Sinne aufgefasst werden. Parallel einer Halb-
ene kann nur eine Tangentialebene an eine Halbkugel gelegt
erden. Eine Halbkugel ist bestimmt durch die Bedingung, dass
e vier gegebene Halbebenen berührt, ein Halbkegel durch die
edingung, drei gegebene Halbebenen zu berühren. Die Trans-
rmation durch reciproke Directionen ist dann in folgender
eise definirt: „Zwei reciproke Halbebenen schneiden sich auf
ner festen Fundamentalebene; zwei Paare reciproker Halb-
enen berühren einen Halbkegel.“ Die Transformation ist be-
mmt, sobald die Fundamentalebene und zwei reciproke Halb-
enen gegeben sind. Zwei reciproke Halbebenen sind congruent.
e Krümmungslinien von Oberflächen gehen in die Krümmungs-
nien der entsprechenden Oberflächen über. Zum Schlusse wird
e reciproke Fläche einer Fläche zweiter Ordnung betrachtet.
an findet eine Fläche vierter Klasse mit Doppelkegel und fünf
oppelcurven zweiter Ordnung; sie ist eine Katakaustika einer
nderen Fläche zweiter Ordnung. W. St.

IBAUCOUR. Sur un système cyclique particulier.
C. R. XCII. 233-235.

Der Verfasser teilt einige Sätze über Oberflächen mit, welche
n Kugeln eingehüllt werden, und deren Krümmungslinien auf
n beiden Schalen einander entsprechen. Der ferner angegebene
tz, dass, wenn Kreise normal zu drei Oberflächen sind, sie zu
er unendlichen Zahl von Flächen normal stehen, führt auf
e Transformation durch „reciproke Directionen“, welche von

Laguerre herrührt. Und hier ergiebt sich das allgemeinste System solcher Flächen, zu welchen eine Ebene gehört.

W. St.

F. Aschieri. Di una corrispondenza Cremoniana quadratica fra gli elementi di due forme fondamentali di 4ª specie o spazj rigati. Lomb. Rend. (2) XIV. 123-131.

F. Aschieri. Sopra una corrispondenza quadratica Cremoniana fra gli elementi di due spazj rigati. Lomb. Rend. (2) XIV. 219-227.

In beiden Arbeiten werden Strahlengebilde betrachtet, wie sie durch specielle quadratische Transformation aus den Elementargebilden eines Linienraumes hervorgehen. Rg.

Em. Weyr. Ueber mehrstufige Curven- und Flächensysteme. Wien. Ber. LXXXIV. 884-907.

Dieser Aufsatz betrachtet mehrstufige Involutionen, welche durch Curven- und Flächensysteme auf geraden Linien oder rationalen Curven, die selbst den Systemen angehören können, ausgeschnitten werden. W. St.

Em. Weyr. Ueber die Bedeutung des räumlichen Nullsystems für cubische Involutionen beider Stufen. Wien. Ber. LXXXIV. 1264-1290.

Es werden hier zunächst die cubischen Involutionen erster Stufe auf einer cubischen Raumcurve C_3 betrachtet. Jede Gruppe der Involution bestimmt eine Ebene, und alle diese Ebenen bilden ein Büschel erster Ordnung. Die Schmiegungsebenen in den Punkten einer Gruppe bilden die Gruppe einer Involution des der Curve umschriebenen Ebenenbüschels dritter Ordnung, und der Schnittpunkt der Ebenen einer Gruppe liegt auf einer bestimmten zweiten der ersten in einem Nullsysteme conjugirten

Geraden. Die Ebenenbüschel, deren Träger zwei conjugirte Gerade sind, schneiden auf C_3 conjugirte cubische Involutionen aus.

Die cubischen Involutionen zweiter Stufe auf C_3 erhält man durch die Schnitte der Ebenen eines Bündels mit C_3. Die Schmiegungsebenen in den Punkten einer Gruppe treffen sich auf einer Ebene, welcher in dem Nullsysteme der Mittelpunkt des Bündels zugeordnet ist.

Für diese beiden cubischen Involutionen wird nun mit Hülfe der Eigenschaften der Raumcurve dritter Ordnung eine ganze Reihe interessanter Sätze bewiesen. W. St.

A. Ameseder. Ueber ein Nullsystem zweiten Grades.
Wien. Ber. LXXXIII. 385-402.

Der Verfasser behandelt synthetisch den speciellen Fall der quadratischen reciproken Verwandtschaft, bei welchem dem Punkte $y_1\, y_2\, y_3$ die Gerade

$$\lambda_1\, x_1\, y_2\, y_3 + \lambda_2\, x_2\, y_1\, y_3 + \lambda_3\, x_3\, y_1\, y_2 = 0$$

entspricht, wenn $\lambda_1 . \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Da keine wesentlichen Eigentümlichkeiten zur Sprache kommen, welche für diesen Fall von hervorragenderem Interesse erscheinen, so glaubt Referent von einer weiteren Inhaltsangabe absehen zu können.

V.

F. Schur. Ueber besondere Lagen zweier Tetraeder.
Klein Ann. XIX. 429-432.

Der Verfasser zeigt, dass der Chasles'sche Satz über zwei in besonderer Lage sich befindende Tetraeder ein specieller Fall eines umfassenden Satzes ist, welcher lautet:

„Jeder Geraden, welche die vier Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier als entsprechend gesetzter Tetraeder gleichzeitig schneidet, entspricht eindeutig eine Gerade, welche die vier Schnittlinien entsprechender Seitenflächen der beiden Tetraeder gleichzeitig schneidet und umgekehrt.“ Die Tetraeder entsprechen nämlich einander in zwei axialen Collineationen, in

welchen es jedesmal nur eine Punktreihe sich selbst entsprechender Punkte und demgemäss auch ein und nur ein Ebenenbüschel sich selbst entsprechender Ebenen giebt. Gehören die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte der Tetraeder einem Hyperboloide an, so giebt es einfach unendlich viele axiale Collineationen, und liegen die Tetraeder perspectivisch, so giebt es deren doppelt unendlich viele, in welchen die Tetraeder einander entsprechen. Der erste Fall liefert den Chasles'schen, der zweite den Poncelet'schen Satz. W. St.

S. Roberts. On certain tetrahedra specially related to four spheres meeting in a point. Lond., M. S. Proc. XII. 117-120.

Zunächst wird der Satz bewiesen: „Wird auf jeder Kante eines Tetraeders ein Punkt beliebig gewählt und werden die Kugeln construirt, welche je einen Eckpunkt mit den drei Punkten verbinden, welche auf den in dem Eckpunkt zusammentreffenden Kanten gewählt worden sind, so schneiden sich die vier Kugeln in einem Punkte.“

Man kann umgekehrt von vier in einem Punkte K sich begegnenden Kugeln ausgehen und dreifach unendlich viele Tetraeder construiren, welche alle mit den Kugeln in der oben angegebenen Beziehung stehen. Bleibt eine Ebene des Tetraeders, welche beliebig durch einen Schnittpunkt von drei der Kugeln gelegt wird, ungeändert, so ist der Ort des vierten Eckpunkts ein Kreis, welcher in einer zu der ersten Ebene parallelen Ebene liegt. Bei dem grössten zu den vier gegebenen Kugeln gehörenden Tetraeder stehen die vier Seitenflächen senkrecht zu den vier Geraden, welche den vierfachen Punkt mit den vier dreifachen Punkten verbinden.

Zum Schlusse wird die Raumfigur betrachtet, welche aus der obigen durch collineare Verwandtschaft hervorgeht, und die Bemerkung hinzugefügt, dass die Eigenschaften dieser Raumfigur auch direct gefunden werden können. W. St.

C. Stéphanos. Sur la géométrie des sphères. C. R XCII. 1195-1198.

In dieser Note zeigt der Verfasser, dass die „Geometrie der reciproken Directionen“ von Laguerre übereinstimmt mit der Kugelgeometrie von Lie (Clebsch Ann. V. p. 145, s. F. d. M. IV. 1872. p. 408-411) und eine sehr specielle Art von Kugelverwandtschaften darstellt, für welche die Berührung invariante Eigenschaft ist. W. St.

J. Ph. Weinmeister. Die Flächen zweiten Grades nach elementar-synthetischer Methode. II. Pr. Leipzig.

Ueber den ersten Teil dieser interessanten synthetischen Entwickelung der wichtigsten Eigenschaften aller Flächen zweiten Grades hat Referent im vorigen Bande der F. d. M. (p. 500-502) ein Referat geliefert, auf welches er zunächst verweisen muss.

Der Verfasser erfüllt hier sein Versprechen, nach den Rotationsflächen zweiten Grades auch den allgemeinen Kegel und die allgemeine Fläche zweiten Grades behandeln zu wollen. Zunächst wird der schiefe Kreiskegel, d. h. das Erzeugnis der Verbindungslinien eines Punktes mit den sämmtlichen Punkten der Peripherie eines Kreises als gerader elliptischer Kegel erkannt. Durch Vermittelung des Begriffs des Polarkegels (Analogon des Begriffs der Polarecke) gelangt der Verfasser dann zu dem Satze, dass jeder ebene Schnitt jedes über einem Kegelschnitt beliebig errichteten Kegels wieder ein Kegelschnitt ist. Darauf werden die Focaleigenschaften des Kegels und des Kegelschnitts in recht anschaulicher Weise entwickelt.

Die zweite Hälfte der Arbeit behandelt die allgemeine Fläche zweiten Grades. Natürlich musste der Verfasser hier von einer anderen Erzeugungsart ausgehen, als bei den in der früheren Arbeit behandelten Rotationsflächen (Vgl. das Referat F. d. M. XII. p. 501). Doch gelingt es ihm, die Rechnung soviel wie möglich fern zu halten, indem er die allgemeine Fläche zweiten Grades als den Ort eines Punktes definirt, dessen in Bezug auf

eine feste Kugel bestimmte Potenz zum Product seiner Abstände von zwei festen Ebenen ein gegebenes Verhältnis besitzt. Im Anschluss an die Einteilung der Flächen zweiten Grades, versäumt der Verfasser nicht, nachzuweisen, dass das einschalige Hyperboloid auch als Erzeugnis eines beweglichen Strahles entstehen kann. Das allgemeine hyperbolische Paraboloid entsteht dadurch, dass die feste Brennkugel in eine Ebene ausartet. Ein Anhang entwickelt schliesslich mittels des Cavalieri'schen Princips die Formeln für die Volumina von Körpern, welche von Flächen zweiten Grades und Ebenen begrenzt werden.

Scht.

W. Weitzel. Elementare Untersuchungen der Eigenschaften einer gemeinen windschiefen Fläche. Pr. Greifswald.

In klarer und eingehender Weise entwickelt der Verfasser zur Stärkung „des räumlichen Anschauungsvermögens der Primaner höherer Schulen“ die wichtigsten Eigenschaften derjenigen Fläche zweiten Grades, welche der geometrische Ort aller Strahlen ist, die drei in drei parallelen Ebenen liegende Axen zugleich schneiden. Scht.

J. S. Vaněček. Organische Construction von Linien und Flächen zweiten Grades. Cas. X. 275. (Böhmisch).

Enthält eine Ableitung von hierher gehörenden Lehrsätzen unter Verwendung des Dualitätsprincips. Std.

R. Heger. Die Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten, und verwandte Constructionen. Pr. Breslau.

Siehe Abschn. IX. Cap. 3. C.

H. Schröter. Ueber das geradlinige Hyperboloid.

G. Bauer. Ueber das geradlinige Hyperboloid.

Münch. Ber. 1881, 238-248.

Drei beliebige Paare paralleler Erzeugender eines einschaligen Hyperboloids bestimmen ein räumliches Sechseck, welches auf der Fläche des Hyperboloids verläuft. Verbindet man je zwei auf einander folgende Seiten dieses Sechsecks durch eine Ebene, so erhält man sechs Seitenflächen eines Parallepipeds. Eine durch zwei parallele Gegenkanten des Parallepipeds gelegte Diagonalebene bildet ein Parallelogramm. Nennt man die Parallelogramme, welche alle vier Ecken auf dem Hyperboloid haben, p, q, r, diejenigen aber, von welchen nur zwei Ecken auf demselben liegen, p_1, q_1, r_1, bezeichnet man ferner die Diagonalen des Parallepipeds, welche zwei auf dem Hyperboloid gelegene Gegenecken verbinden, mit a, b, c, die vierte Diagonale aber mit d, so gelten ausser der von Herrn Bauer zuerst gegebenen Relation, dass alle diese Parallepipede gleiches Volumen haben, noch die folgenden:

$$a^2+b^2+c^2-d^2 = \text{const.},$$
$$p^2+q^2+r^2-p_1^2-q_1^2-r_1^2 = \text{const.}.$$

Die sechs Ecken des auf dem Hyperboloid verlaufenden Sechsecks lassen sich auch als die Ecken eines Octaeders auffassen. Von den acht Seitenflächen sind sechs Berührungsebenen des Hyperboloids, die beiden übrigen nicht, und von den zwölf Kanten des Octaeders sind sechs Erzeugende des Hyperboloids, die sechs übrigen nicht. Von diesen so gebildeten Octaedern gilt nun:

1. Der räumliche Inhalt des Octaeders bleibt von unveränderlichem Werte.

2. Die Summe der Quadrate derjenigen sechs Kanten des Octaeders, welche Erzeugende des Hyperboloids sind, vermindert um die Summe der Quadrate der sechs übrigen Kanten des Octaeders, bleibt von unveränderlichem Werte.

3. Die Summe der Quadrate derjenigen sechs Seitenflächen des Octaeders, welche Berührungsebenen des Hyperboloids

sind, vermindert um die Summe der Quadrate der beiden übrigen Seitenflächen des Octaeders, bleibt von unveränderlichem Werte.

An diese Mitteilungen des Herrn Schröter knüpft Herr Bauer noch einige Bemerkungen über Tripel von Geraden, welche auf einem Hyperboloid liegen. Das Ergebnis derselben ist folgendes: Es seien $U = 1$ und $U' = 1$ zwei concentrische geradlinige Hyperboloide, die Discriminante ihres Büschels aber sei in der Form gebildet

$$\lambda^4 \Delta + \lambda^3 \Theta + \lambda^2 \Phi + \lambda \Theta' + \Delta' = 0.$$

Findet nun die Bedingung $\Phi = 0$ statt, so besteht zwischen den beiden Hyperboloiden eine gewisse Reciprocität in der Weise, dass die Fläche U Sechsecke enthält, gebildet aus Paaren paralleler Seiten, welche zu drei conjugirten Durchmessern von U' parallel sind, und zugleich U' Sechsecke enthält, ebenfalls aus Paaren paralleler Seiten bestehend, deren Hauptdiagonalen drei conjugirte Durchmesser von U sind. Die Sechsecke auf U sind zugleich einer Fläche V eingeschrieben, welche sich durch $U' = \frac{\Theta}{\Delta}$ darstellt; die Parallepipede, bestimmt durch die Sechsecke auf U', sind zugleich einer Fläche W umgeschrieben, die in $U = \frac{\Delta}{\Theta}$ ihren Ausdruck findet. Die Flächen V und W sind zweischalige Hyperboloide.

Schn.

Th. Schmidt. Ueber die Strictionslinie des Hyperboloids als Erzeugnis mehrdeutiger Gebilde. Wien. Ber. LXXXIV. 908-914.

Die Natur der Strictionslinie eines Hyperboloids wird synthetisch untersucht. Sie stellt sich dar als eine Raumcurve achter Ordnung, welche zweimal durch jeden Scheitel der Fläche geht. Dieselbe zerfällt in zwei Raumcurven vierter Ordnung zweiter Art, von denen jede für sich blos der einen der beiden Regelscharen als Strictionslinie angehört. Die eine Strictionslinie ist das Spiegelbild der anderen in Bezug auf die Hauptebenen der

Fläche. Diese und andere Beziehungen der Strictionslinien zu einander und zur Fläche bilden den Inhalt der Arbeit.

Schn.

H. G. Zeuthen. Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. Klein Ann. XVIII. 33-69.

Die vorliegende Abhandlung bildet einen wesentlichen Fortschritt in der Theorie der projectiven Gebilde, indem sie die Eigenschaften der projectiven Gebilde ableitet, welche auf Flächen zweiten Grades liegen.

Schon Chasles hatte (C. R. LIII.) die auf einer Fläche zweiten Grades liegenden Curven auf ein in dieser Fläche liegendes Coordinatensystem bezogen. Diese Coordinaten können auch dazu dienen, eine Projectivität zwischen zwei auf der Fläche liegenden Figuren festzustellen. Bezeichnen nämlich x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes der einen der beiden Figuren, so bestimmt sich der entsprechende Punkt der anderen Figur entweder durch $x' = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, $y' = \frac{ay+b}{cy+d}$ oder durch $x' = \frac{ay+b}{cy+d}$, $y' = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$. Es giebt also zwei Arten von Projectivität auf der Fläche zweiten Grades. Aus der mit dieser analytischen Definition übereinstimmenden geometrischen Definition der Projectivität entwickelt Herr Zeuthen im zweiten Abschnitt der Abhandlung die Eigenschaften projectiver Figuren auf Flächen zweiten Grades. Er unterscheidet die beiden Arten der Projectivität in folgender Weise. Wenn in jeder der beiden Schaaren von Erzeugenden der Fläche zwischen denselben eine homographische (oder projective) Correspondenz besteht und dem Schnittpunkte X der Erzeugenden x_1 und x_2 der Schnittpunkt X' der homologen Erzeugenden x'_1 und x'_2 correspondirt, so bilden die Punkte X und X' Figuren, welche projectiv in der ersten Art heissen sollen. Wenn aber zwischen den beiden Schaaren von Erzeugenden zwei homographische Correspondenzen bestehen und dem Schnittpunkt X der Erzeugenden x_1 und x_2 der Schnitt-

punkt X' der homologen Erzeugenden x'_2 und x'_1 correspondirt, so bilden die Punkte X und X' Figuren, welche projectiv in der zweiten Art heissen sollen. Es ergeben sich nun u. A. folgende Resultate für die eben definirten beiden Arten der Projectivität. Zwei Figuren, die in der ersten Art projectiv sind, haben im Allgemeinen vier Coincidenzpunkte, die von den Schnitten zweier Erzeugenden aus jeder Schaar gebildet werden; auch können sie eine Coincidenzcurve haben, die aus zwei Erzeugenden einer einzigen Reihe besteht; die einzigen ebenen Schnitte, welche sich selbst entsprechen, sind diejenigen, welche von den Tangentialebenen in den Coincidenzpunkten gebildet werden. Dagegen haben zwei Figuren, die in der zweiten Art projectiv sind, im Allgemeinen zwei Coincidenzpunkte, welche die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte sind, die von den gemeinsamen Punkten der in den beiden Correspondenzen homologen Erzeugenden gebildet werden; ferner giebt es zwei ebene Schnitte, welche sich selbst entsprechen. Die von vornherein eingeführte Bezeichnung „projectiv" ist dadurch gerechtfertigt, dass Herr Zeuthen beweist, dass die Correspondenz entweder durch mindestens vier oder durch mindestens drei aufeinander folgende centrale Projectionen hergestellt werden kann, je nachdem die Figuren die oben angegebene Definition der Projectivität erster Art oder die der Projectivität zweiter Art erfüllen.

Verallgemeinert man die Projectivität zwischen den Punkten einer Fläche zweiten Grades dahin, dass man einem Punkte X α' Punkte X', einem Punkte X' α Punkte X entsprechen lässt, und dass man ebenso einer Erzeugenden der einen Schaar eine beliebige Anzahl von Punkten derselben Schaar und auch eine beliebige Anzahl von Punkten der anderen Schaar zuordnet, so gelangt man zu den Betrachtungen, welche den Inhalt des ersten Abschnitts der Abhandlung bilden, und die wesentlich in einer Erweiterung des zuerst von Zeuthen für die Ebene aufgestellten Correspondenzprincips auf die Fläche zweiten Grades gipfeln.

Der dritte Abschnitt überträgt die Resultate des zweiten Abschnitts auf solche Flächen zweiten Grades, welche imaginäre Erzeugende besitzen (Ellipsoide).

Die folgenden Abschnitte enthalten interessante Anwendungen der Theorie. Der vierte Abschnitt löst das Problem, der Fläche zweiten Grades Polygone einzubeschreiben, deren Seiten durch gegebene Punkte gehen, und zeigt die Analogie der Inscriptions-Sätze für Flächen zweiten Grades mit den Poncelet'schen Sätzen über Polygone, die Kegelschnitten einbeschrieben sind. Es ergiebt sich z. B., dass ebenso wie eine Relation zwischen den Schnittpunkten einer Geraden mit einem Kegelschnitt und den Seiten eines einbeschriebenen Polygons von grader Seitenzahl besteht, auch eine Relation zwischen den Schnitten besteht, welche auf einer Ebene durch eine Fläche zweiten Grades und durch ein einbeschriebenes Polygon von ungrader Seitenanzahl hervorgerufen werden.

Im sechsten Abschnitt werden aus diesen Ergebnissen Constructionen abgeleitet, welche sich auf die Fläche zweiten Grades beziehen, und zwar erstens die Construction der Fläche, wenn ein Kegelschnitt und vier Punkte gegeben sind; zweitens die Construction der Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit einer durch einen Kegelschnitt und vier Punkte bestimmten Fläche; drittens die Construction des vierten Schnittpunktes einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art mit einer Ebene, wenn für diese Raumcurve drei in dieser Ebene gelegene Punkte und ausserdem noch fünf Punkte gegeben sind; viertens die Construction des achten Punktes, welchen die durch sieben gegebene Punkte bestimmten Flächen noch gemein haben; fünftens die Construction der Ebene, welche in einem gegebenen Punkte eine Fläche zweiten Grades berührt, zu deren Bestimmung ausser diesem Punkte noch drei Punkte und ein Kegelschnitt gegeben sind; sechstens die Construction des Kegelschnitts, in welchem eine gegebene Ebene eine Fläche zweiten Grades schneidet, die drei in dieser Ebene gelegene Punkte, noch drei andere Punkte und eine gegebene Gerade enthalten soll. Die dritte von diesen Constructionen erweist sich als im Wesentlichen identisch mit der von Herrn Paul Serret in seiner „Géométrie de direction" gegebenen Construction, während die vierte Construction anders, aber darum nicht weniger einfach ausfällt, als bei Serret.

Der siebente (letzte) Abschnitt beschäftigt sich mit einem gewissen in sich zurücklaufenden Cyclus von einbeschriebenen Kegeln, bei dem sich immer zwei auf einander folgende Kegel in einem auf der Fläche liegenden Kegelschnitt treffen.

Scht.

Th. Reye. Ueber quadratische Kugelcomplexe und confocale Cycliden. Chelini, Coll. Math. 241-258.

In seiner „Synthetischen Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme“ bezeichnet der Verfasser als Coordinaten einer Kugel

$$\alpha_0(x^2+y^2+z^2)-2\alpha_1 x-2\alpha_2 y-2\alpha_3 z+\alpha_4 = 0$$

die Grössen:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$$

und nennt die Gesammtheit aller Kugeln, deren Coordinaten einer Gleichung n^{ten} Grades genügen, einen Kugelcomplex n^{ten} Grades. Die vorliegende Untersuchung erstreckt sich auf quadratische Kugelcomplexe

$$\Sigma\, a_{ik} \,.\, \alpha_2 \,\ldots\, \alpha_k = 0.$$

Ein specieller Complex dieser Art ist der Complex aller Punktkugeln oder Kugeln vom Radius Null. Solche Kugeln sind auch im allgemeinen Complexe enthalten und erfüllen in ihm eine Cyclide.

Verschwindet die Discriminante

$$\Sigma \pm a_{00}\, a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44},$$

so entsteht der singuläre Complex, und es giebt eine Kugel, deren Coordinaten den fünf linearen Gleichungen

$$a_{i0}\,\alpha_0'+a_{i1}\,\alpha_1'+a_{i2}\,\alpha_2'+a_{i3}\,\alpha_3'+a_{i4}\,\alpha_4' = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots 4)$$

genügen. Dieselbe ist als Doppelkugel des Complexes anzusehen. Die Schnittcurve dieser Kugel mit einer gewissen anderen Fläche zweiter Ordnung ist die Focalcurve der Cyclide des Complexes. Unter Benutzung dieser Ergebnisse gelangt der Verfasser schliesslich bei der Untersuchung des Complexbüschels

$$\Sigma(a_{ik} \,.\, \alpha_i\,\alpha_k+\lambda b_{ik} \,.\, \alpha_i\,\alpha_n)$$

zu einer neuen Auffassung der Theorie orthogonaler und confocaler Cycliden. Rg.

E. Lange. Notiz zu einem Satze von Chasles. Schlömilch Z. XXVI. 98-104.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass ein von Chasles im „Aperçu historique" ausgesprochener Satz, welcher in viele Lehrbücher übergegangen ist, in der dort gegebenen Fassung falsch ist. Der Satz lautet: „Wenn die vier Seitenflächen eines beweglichen Tetraeders gezwungen sind, durch vier Gerade zu gehen, welche irgendwie im Raume liegen, und wenn drei Eckpunkte des Tetraeders auf drei anderen Geraden liegen sollen, welche auch irgendwie im Raume liegen, so wird die vierte Ecke des Tetraeders eine Curve doppelter Krümmung vom dritten Grade durchlaufen."

Es wird nachgewiesen, dass bei einer allgemeinen Lage der sieben Geraden kein entsprechendes Tetraeder möglich ist.

Sind G_1, G_2, G_3, G_4 die vier Geraden, um welche sich vier Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 des Tetraeders drehen, und $L_{123}, L_{124}, L_{134}$ die drei weiteren Geraden, auf denen sich die Schnittpunkte der durch die Indices angezeigten Tetraederebenen fortbewegen sollen, so kann nur dann eine Bewegung des Tetraeders eintreten, wenn durch die Geraden:

$$G_1, G_2, L_{123}, L_{124}; \quad G_1, G_3, L_{123}, L_{134}; \quad G_1, G_4, L_{124}, L_{134}$$

je ein Hyperboloid gelegt werden kann. Die so entstehende Raumcurve dritter Ordnung besteht aber dann aus drei Geraden. Lässt man ein gegenseitiges Schneiden der sieben Geraden zu, so kann eine wirkliche Raumcurve entstehen. Dies tritt z. B. ein, wenn G_1 und G_2 sich treffen, und ebenso L_{123} und L_{124}, und ferner $G_1, G_3, L_{123}, L_{134}$; $G_1, G_4, L_{124}, L_{134}$ je einem Hyperboloide angehören. W. St.

H. Schröter. Bemerkung zu der „Notiz zu einem Satze von Chasles von E. Lange." Schlömilch Z. XXVI. 264-270.

In der Notiz über einen Chasles'schen Satz zeigt Lange die Unrichtigkeit desselben, ohne anzugeben, wie die richtige Fassung heissen müsste, wenn der Satz die Ausdehnung eines in der Ebene bekannten sein sollte. Derselbe lautet: „Wenn die drei Seiten eines veränderlichen Dreieckes bezw. durch drei feste Punkte laufen, und zwei Ecken auf zwei festen Geraden liegen, so beschreibt die dritte Ecke einen Kegelschnitt." Der Verfasser giebt dann folgende Ausdehnung dieses Satzes der Ebene für den Raum: „Wenn die drei Seitenflächen eines veränderlichen Dreiflachs (drei Ebenen im Raume) bez. durch drei willkürlich gegebene feste Gerade im Raume laufen und zwei Kanten des Dreiflachs zwei willkürlich gegebenen festen Geraden im Raume begegnen, so beschreibt die dritte freie Kante (ebenso wie die beiden ersten) eine Regelschaar eines geradlinigen Hyperboloids und die Ecke des Dreiflachs (Durchschnittspunkt der drei Ebenen) eine Raumcurve dritter Ordnung." W. St.

A. Mannheim. Sur les surfaces parallèles. Lond., M. S. Proc. XII. 177-187.

Wenn eine Gerade A so geleitet wird, dass sie stets normal zu einer Fläche (S) ist, so beschreiben die Punkte $a, a_1, a_2, \dots$ dieser Geraden Bahnen, welche auf Parallelflächen zu (S) gelegen sind. Diese Trajectorien sind correspondirende Curven und ihre Richtungen $at, a_1t_1, a_2t_2 \dots$ correspondirende Tangenten. Aus dem Umstande, dass jede Trajectorie (a) normal gegen A gerichtet ist, folgt, dass die Parallelflächen dasselbe Normalsystem haben, dass also die Krümmungslinien auf den Parallelflächen correspondirende Curven sind. Dagegen sind im Allgemeinen die correspondirenden Curven von Asymptotenlinien nicht asymptotische Linien auf den Parallelflächen, und die Bahnen, welche einer geodätischen Linie (a) entsprechen, sind geodätische Linien auf den Parallelflächen nur in dem Fall, dass zwischen den Krümmungen von (a) eine lineare Relation besteht. Nach diesen generellen Bemerkungen wendet sich Herr Mannheim zu besonderen Beziehungen zwischen entsprechenden Curven auf Parallel-

flächen. Legt man z. B. durch correspondirende Tangenten at, $a_1 t_1 \ldots$ Ebenen, die aus den Parallelflächen Curven ausschneiden, welche in den entsprechenden Punkten von einem Kreise überosculirt werden, so durchschneiden die Radien dieser Kreise, die von correspondirenden Punkten ausgehen, eine und dieselbe Gerade. Steht von solchen Schnittebenen eine normal zu ihrer Fläche, so sind auch alle übrigen Normalebenen ihrer Flächen. Letzteres Theorem, welches Herr Ribaucour zuerst aufgestellt hat, ist Veranlassung zu der vorliegenden Arbeit gewesen. Eine Folge desselben ist, dass die Tangenten an Normalschnitten, welche durch Kreise überosculirt werden, sich auf den Parallelflächen einander entsprechen, eine Bemerkung, welche Herr de la Gournerie zuerst gemacht hat. Aus Herrn Mannheim's Entwickelungen fliesst eine ganze Reihe von Relationen, welche sich auf die eben characterisirten Schnitte von Parallelflächen beziehen; so findet er z. B., dass die Mittelpunkte der geodätischen Krümmung für solche Schnitte auf einer Geraden enthalten sind, dass die geodätischen Contingenzwinkel in correspondirenden Punkten einander gleich sind, und Anderes mehr.

Demnächst wendet sich Herr Mannheim zu einer anderen Gattung von Curven auf Parallelflächen; es sind das die von Herrn Ribaucour betrachteten Curven von constanter Normalkrümmung. Ihrer Begriffsbestimmung gemäss haben die Normalschnitte, welche längs derselben, d. h. eine solche Curve berührend, geführt werden, gleiche Krümmungsradien. Fasst man eine solche Curve Σ auf (S) als Leitlinie für a auf, so entstehen correspondirende Curven auf Parallelflächen. Die Richtung derselben im Punkte a_1 auf S_1 sei $a_1 t_1$. Zieht man längs derselben im Punkte a_1 eine Curve von constanter Normalkrümmung auf S_1, so kann man zu dieser das geodätische Krümmungscentrum bestimmen; es findet sich, dass der Ort derselben für alle Parallelflächen auf einer Geraden enthalten ist, und dass die geodätischen Contingenzwinkel einander gleich sind. Andere Relationen für diese Curve Σ auf den Parallelflächen werden hinzugefügt.

Zieht man endlich auf (S) von a aus eine Curve, welche (a) berührend das eine System der Krümmungslinien unter gleichen

Winkeln schneidet, so entsteht eine Curve, welche Herr Mannheim eine Trajectorie für die Krümmungslinien (une ligne trajectoire des lignes de courbure) nennt. Es giebt auf (S_1), (a_1) in a berührend, gleichfalls eine solche Trajectorie und so fort auf allen Parallelflächen. Für diese Trajectorien werden ganz analoge Sätze, wie für die Curven Σ_1 entwickelt.

Schn.

Em. Weyr. Notiz über Regelflächen mit rationalen Doppelcurven. Wien. Ber. LXXXIV. 691-692.

Der Verfasser beginnt mit der Behauptung: „Wenn eine Regelfläche F eine rationale Doppelcurve C besitzt, so bestimmen die Erzeugenden von F auf C ein symmetrisches Punktsystem zweiten Grades.“ Da die Erzeugenden von F nicht Secanten von C zu sein brauchen, so ist obige Behauptung nicht richtig. Der Verfasser geht dann umgekehrt von einem auf C befindlichen symmetrischen Punktsysteme zweiten Grades aus und betrachtet die durch Verbindung entsprechender Punkte entstehende Regelfläche, für welche er als Grad $2(n-1)$ findet.

W. St.

F. Buka. Die Krümmung windschiefer Flächen in den Punkten einer geradlinigen Erzeugenden. Schlömilch Z. XXVI. 15-50.

Der Verfasser betrachtet das Gebilde, das aus zwei unendlich nahen Erzeugenden einer windschiefen Fläche besteht, und definirt die „Schränkung eines solchen windschiefen Elementes“ als Wert des Bruches $\frac{w}{d}$, wo w mit dem passenden Vorzeichen den Contingenzwinkel, d die kürzeste Distanz der consecutiven Erzeugenden bedeutet. Hiervon ausgehend gelangt der Verfasser durch wesentlich geometrische Betrachtungen zu dem Zusammenhange, welcher zwischen den Krümmungsradien beliebiger Schnitte einer windschiefen Fläche in den Punkten einer geradlinigen

Erzeugenden besteht, zu der Hauptkrümmungscurve längs einer Erzeugenden, zu dem osculirenden Hyperboloid und zu der windschiefen Fläche, welche von den Tangenten der Krümmungslinien in ihren Schnittpunkten mit einer Erzeugenden gebildet wird. Die Hauptkrümmungscurven längs einer Erzeugenden, d. h. der Ort der Hauptkrümmungsmittelpunkte für alle Punkte dieser Erzeugenden wird als Schnitt zweier gleichseitiger Paraboloide erkannt. Für den Ort der Tangenten der Krümmungslinien in den Punkten einer Erzeugenden findet Herr Buka eine Fläche vierter Ordnung, während Herr Weyr eine solche fünfter Ordnung dafür gefunden hat. Die Brauchbarkeit der Resultate zeigt Herr Buka durch ihre Anwendung auf Flächen constanter Schränkung, auf Rotationshyperboloide, auf Wendelflächen (gerade Schraubenflächen, deren Erzeugende senkrecht zur Axe laufen) u. s. w. Der Verfasser hofft, dass seine Resultate ein besonderes Interesse für die kinematische Geometrie haben, weil sich die allgemeinste Bewegung eines starren Systems auf das Rollen und Gleiten einer windschiefen Fläche längs einer ebensolchen zweiten zurückführen lässt. Scht.

G. Darboux. Sur une nouvelle définition de la surface des ondes. C. R. XCII. 446-448.

Im Anschluss an eine Bemerkung des Herrn Niven (Quart. J. IX. 22 siehe F. d. M. I. 1868. 254) fasst Herr Darboux die Wellenfläche in folgender Form auf. Es sind drei in einem Punkte O concentrische, im Raum senkrecht gegen einander stehende Kreise gegeben. Drei Kugeln, von denen jede durch einen der Kreise und einen Punkt M bestimmt ist, schneiden sich zum zweiten Mal in einem Punkte P. Sucht man nunmehr den Ort derjenigen Punkte M, für welche der Winkel MPO ein rechter ist, so ergiebt sich als solcher die Wellenfläche. Um die Wellenfläche von diesem Gesichtspunkt aus zu beleuchten, hat sich der Verfasser ein allgemeineres Problem zur Untersuchung gestellt. Er betrachtet im Raum drei ganz beliebige Kreise und einen Punkt O, legt durch jeden Kreis eine Kugel, welche sich in einem

Punkte M und in einem zweiten Punkte P schneiden, und beschäftigt sich mit dem Ort der Punkte M, für welche der Winkel MPO ein rechter ist. Diese Fläche ist im Allgemeinen vom fünften Grade, sie reducirt sich aber auf den vierten, wenn die Ebenen der Kreise sich in dem Punkte O schneiden. Liegt O in dem Mittelpunkt der Kreise, so entsteht die Wellenfläche.

Nicht in unmittelbarem Zusammenhange hiermit, sondern mit früheren Mitteilungen des Herrn Darboux steht ein Theorem, welches er seinen Bemerkungen hier angefügt hat. Es lautet: Die Normale einer Fläche schneidet drei senkrecht auf einander stehende Ebenen. Zwischen ihrem Fusspunkt und jedem Schnittpunkt auf einer der Ebenen liegt ein Segment. Wenn nun zwischen diesen drei Segmenten zwei Relationen bestehen, so muss die eine notwendig die sein, dass die Segmente, welche zwischen den drei Ebenen enthalten sind, ein unveränderliches Verhältnis bewahren. Schn.

K. Zahradník. Eigenschaften der Osculationstripel bei der Strophoide. Cas. X. 261. (Böhmisch).

St.

J. S. Vaněček. Raum-Epicycloiden. Wien. Ber. LXXXIV. 69-91.

Dieser Aufsatz führt einen Gedanken von Olivier (Développements de géométrie descriptive), welcher die Epicycloiden auf einer Ringfläche betrachtet hat, weiter aus.

Eine feste Kreislinie K ist gegeben, eine zweite Kreislinie L bewegt sich in vorgeschriebener Weise der Art, dass sie stets mit K einen veränderlichen Punkt m gemein hat. Ist dann das Bogenstück, welches m auf K beschreibt, stets gleich dem Bogenstücke, welches ein auf L beweglicher Punkt auf diesem Kreise durchläuft, so beschreibt dieser Punkt eine Raumepicycloide. In dem ersten Teile der Abhandlung werden die so entstehenden Cycloiden betrachtet, wenn sich K und L in einer Ebene befinden.

Der zweite Teil befasst sich mit der Construction der Raum-epicycloiden, wenn L wirklich auf K rollt, die Ebene von L aber gleichzeitig sich um die gemeinsame Tangente der Kreise dreht. Besonders wird der Fall in's Auge gefasst, wenn K eine gerade Linie ist. W. St.

Weitere Aufgaben aus der synthetischen Geometrie des Raumes von TOWNSEND, A. LEINEKUGEL finden sich Ed. Times XXXV. 79-80; Nouv. Ann. (2) XX. 178.

O.

C. Abzählende Geometrie.

G. VERONESE. Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Raum von n Dimensionen stattfinden. Klein Ann. XVIII. 448.

Eine Curve in der Ebene hat sechs Charaktere, die durch drei Gleichungen verbunden sind, eine Curve im drei-dimensionalen Raume hat neun Charaktere mit sechs Gleichungen, eine Curve in einem n-dimensionalen Raume hat $3n$ Charaktere, welche durch $3(n-1)$ von einander unabhängige Gleichungen verbunden sind. (Siehe auch p. 488.). Scht.

R. STURM. On some new theorems on curves of double curvature. Brit. Ass. Rep. 1881.

Der Verfasser betrachtet eine Raumcurve n^{ter} Ordnung ohne singuläre Punkte, an welche h Sehnen von einem gegebenen Punkte aus gehen. Der grösste Wert von h ist bekanntlich $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Der Zweck der Arbeit ist, zu beweisen, dass der kleinste Wert von h die grösste in $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ enthaltene ganze Zahl ist. Csy. (O.).

E. Pellet. Sur le nombre des points multiples d'une courbe algébrique et les courbes unicursales. Nouv. Ann. (2) XX. 444-453.

Der Verfasser legt durch die vielfachen Punkte einer Curve m^{ter} Ordnung und durch hinreichend viele einfache Punkte derselben eine auf diese Weise eindeutig bestimmte Curve n^{ter} Ordnung und findet durch Betrachtung des Systems aller Schnittpunkte die bekannten Maxima der drei Zahlen

$$p_1,\ p_2+p_3+\cdots+p_{m-1},\ 2p_2+3p_3+4p_4+\cdots(m-1)p_{m-1},$$

wo p_i die Zahl der i-fachen Punkte ist. Auf diese Weise gelangt der Verfasser auch leicht zu den bekannten Zahlen-Relationen für diejenigen Curven, welche die Franzosen als unicursal und die Deutschen als vom nullten Geschlechte bezeichnen. Scht.

J. Bacharach. Ueber Schnittpunktsysteme algebraischer Curven. Diss. Erlangen.

Die verdienstvolle Arbeit schliesst sich an die Untersuchungen an, welche namentlich die Herren Cayley, Nöther und Brill über die Schnittpunktsysteme auf mehreren algebraischen Curven angestellt haben. (Cayley, im Cambr. J. 1843, III. p. 211, Brill und Nöther, Clebsch Ann. VII. p. 271, Nöther, Clebsch Ann. XV. p. 507, s. F. d. M. VI. 1874, p. 251, XI. p. 488). Der Verfasser bemerkt einleitend, dass die allgemeine Gültigkeit mehrerer bekannter Schnittpunktsätze deshalb zweifelhaft erscheint, weil dieselben immer nur auf das Theorem: „Eine Curve n^{ter} Ordnung ist durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte bestimmt." gestützt werden, und weil dieses Theorem doch nur im Allgemeinen gilt, indem ja bei besonderen Lagen der $\frac{1}{2}n(n+3)$ gegebenen Punkte diese zur Bestimmung der Curven n^{ter} Ordnung nicht ausreichen. Der Verfasser setzt daher an die Stelle der Beweismethode durch Constanten-Abzählung strengere Beweismethoden, wodurch er einerseits genaue Grenzen für die Gültigkeit der Schnittpunktsätze erhält, andererseits neue Sätze gewinnt, welche in Ausnahmefällen an die Stelle der allgemeinen Sätze zu treten haben.

Die Grundlage dieser Untersuchung bildet der folgende, zu-
st von Herrn Nöther (Clebsch Ann. VI., siehe F. d. M. V. 1873.
348) streng bewiesene algebraische Satz: „Wenn eine ganze
unction F von x und y für alle gemeinsamen Wertsysteme (x, y)
n zwei ganzen verschwindenden Functionen φ und ψ verschwin-
t, so hat sie die Form $F = A\varphi + B\psi$, wo A und B ebenfalls
nze Functionen von x und y sind." Aus diesem algebraischen
tz ergiebt sich dann der folgende geometrische Satz, der für
le Lagen der Punkte ausnahmslos gültig ist: „Wenn von den
Schnittpunkten einer Curve n^{ter} Ordnung mit einer Curve p^{ter}
rdnung pq auf einer Curve q^{ter} Ordnung liegen, so befinden sich
e übrigen $p(n-q)$ Schnittpunkte auf einer Curve $(n-q)^{ter}$
rdnung."

Mit Hülfe dieses Fundamentalsatzes beweist der Verfasser
n von Brill und Nöther aufgestellten Restsatz (Clebsch Ann.
II. p. 271 oder Referat von Lüroth in den F. d. M. VI. 1874.
251) und erkennt, dass derselbe auch dann noch gilt, wenn
e in Frage kommenden Curven zerfallen. Bei dem Cayley'-
hen Schnittpunktsatz wird ein Ausnahmefall constatirt, so dass
eser Satz genau folgendermassen auszusprechen ist: „Eine
rve der ν^{ten} Ordnung, welche durch $mn - \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$
o $\gamma = m+n-\nu$] Schnittpunkte zweier Curven m^{ter} und n^{ter} Ord-
ng geht ($m+n>\nu$; $\nu>m$ oder $\nu>n$), enthält im Allgemeinen
ch die übrigen $\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ Schnittpunkte der letzteren;
enn dagegen diese $\delta = \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)$ Punkte auf einer Curve
$-3)^{ter}$ Ordnung liegen, so geht eine durch die $mn-\delta$ Punkte
legte, aber sonst willkürliche Curve ν^{ter} Ordnung nicht zugleich
rch die δ übrigen Schnittpunkte der beiden Curven n^{ter} und
^{ter} Ordnung." Die besondere Behandlung dieses Ausnahmefalles
d die Betrachtung gewisser specieller Fälle bilden den Schluss
s ersten Teils der Dissertation. Im zweiten Teil wird die
ntersuchung auf Curven mit vielfachen Punkten ausgedehnt.

Scht.

E. Caporali. Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane. Chelini, Coll. Math. 144-171.

Es werden die wichtigsten Probleme der abzählenden Geometrie, welche sich beim Studium linearer dreifach unendlicher Curvensysteme darbieten, gelöst. Zu diesem Zwecke werden algebraische Flächen auf eine Ebene derartig abgebildet, dass den ebenen Schnitten einzeln die Curven des betrachteten Systems entsprechen. Neben den bisher, namentlich von Clebsch und Cremona in dieser Weise benutzten Flächen discutirt der Verfasser noch eine Fläche der fünften Ordnung mit drei sich in einem Punkte schneidenden Doppelgeraden. Die Bilder werden dann Curven der sechsten Ordnung mit sieben zweifachen und drei einfachen Fundamentalpunkten. Rg.

C. F. E. Björling. Om algebraiska rymdkurvors singulariteter och polardeveloppabelns karakterer. Stockh. Öfv. 1881.

Die Coordinaten eines algebraischen Raumcurvenzweiges lassen sich in endlicher Umgebung eines beliebigen Punktes in der Form

$$(1)\quad x = \alpha^l,\ y = M\alpha^m + M_1\alpha^{m+1} + \cdots,\ z = N\alpha^n + N_1\alpha^{n+1} + \cdots$$

darstellen. Der Punkt wird also charakterisirt durch drei Zahlen (Indices), von welchen die erste l, zweite m, dritte n angiebt, wie viele Punkte der Zweig resp. mit einer willkürlichen, einer berührenden, der Schmiegungs-Ebene gemeinsam hat. Deshalb kann der Punkt als ein (l, m, n)-Punkt bezeichnet werden. Die Singularität eines solchen ist mit $l-1$ stationären Punkten (β), $n-m-1$ stationären Ebenen (α) und $m-l-1$ stationären Tangenten (θ) äquivalent. Ein (l, m, n)-Punkt ist zu einem $(n-m, n-l, n)$-Punkte reciprok.

Je nachdem ein Index ungrade oder grade ist, durchdringt der Zweig die betreffende Ebene oder nicht. Die Zahl der verschiedenen Formen, die ein reeller Curvenzweig in einem seiner Punkte darbieten kann, ist also 8.

Untersucht werden weiter die Veränderungen, welche die Plücker'schen Charaktere des Perspectivkegels der Curve und des Ebenenschnittes der abwickelbaren Fläche erleiden, wenn der Kegelscheitel ein (l, m, n)-Punkt ist oder in der Tangente eines solchen liegt; ferner wenn die Schnittebene die Schmiegungsebene in einem (l, m, n)-Punkte ist oder durch die Tangente eines solchen geht.

Die Parameterdarstellung (1) giebt ein Mittel an die Hand, die Frage, welche Singularität in einer zu der Originalcurve correspondirenden Curve einem (l, m, n)-Punkt in jener entspricht, zu beantworten. Anwendung wird schliesslich auf die Bestimmung der Charaktere der Polardeveloppable gemacht, wenn die Originalcurve entweder von der 3[ten] Ordnung oder von der 4[ten] Ordnung und Klasse ist. Im ersten Falle ergeben sich, je nach der Beziehung des Originals zu der unendlichen Ebene und dem unendlichen Imaginärkreise, vier verschiedene Resultate; im zweiten dreizehn. Bg.

E. B. Holst. Ueber algebraische cycloidische Curven. Lie Arch. VI. 125-152.

Untersuchungen über die Singularitäten der algebraischen cycloidischen Curven. L.

A. V. Peschka. Normalenfläche einer Developpabeln längs ihres Durchschnittes mit einer krummen Fläche. Wien. Ber. LXXXIII. 790-803.

A. V. Peschka. Normalenfläche einer krummen Fläche längs ihres Schnittes mit einer zweiten krummen Fläche. Wien. Ber. LXXXIV. 30-36.

Während Herr Peschka in seinem vorjährigen Beitrage zur Theorie der Normalenfläche (Wien. Ber. LXXXI., siehe F. d. M. XII. 1880. p. 526-528) noch voraussetzt, dass die Normalen, welche die untersuchte Linienfläche bilden, einer allgemeinen Punktfläche oder einer allgemeinen Developpabeln angehören,

und dass auch ihre Fusspunkte auf dem Schnitt einer dieser Flächen mit einer punktallgemeinen Fläche liegen, geht er hier einen Schritt weiter, indem er die gegebenen Flächen und die gegebene Developpable mit beliebigen Plücker'schen Singularitätenzahlen behaftet voraussetzt. Die Mitteilung der Formeln, welche die Charaktere der Normalenfläche durch die Charaktere der erzeugenden Flächen ausdrücken, würde hier zu viel Raum kosten. Scht.

H. Krey. Ueber einen besonderen Fall des eindeutigen Entsprechens der Punkte zweier Flächen. Klein Ann. XVIII. 82-91.

In dem Flächenpaar, das durch vier doppelt-quaternäre homogene Gleichungen definirt wird, entspricht jedem Punkte der einen Fläche nur ein einziger Punkt der andern und umgekehrt. Folglich haben beide Flächen gleiches Geschlecht. Sie haben aber verschiedene Ordnungszahlen. Denn die Ordnungen n, resp. ν der beiden Flächen F und Φ drücken sich durch die Gradzahlen

$$n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4$$

der definirenden Gleichungen folgendermassen aus:

$$n = m_1 n_2 n_3 n_4 + m_2 n_1 n_3 n_4 + m_3 n_1 n_2 n_4 + m_4 n_1 n_2 n_3,$$
$$\nu = n_1 m_2 m_3 m_4 + n_2 m_1 m_3 m_4 + n_3 m_1 m_2 m_4 + n_4 m_1 m_2 m_3.$$

Hieraus geht hervor, dass die Flächen im Allgemeinen Singularitäten haben werden. Von diesen bestimmt Herr Krey hier für die Fläche F die Ordnung b der Doppelcurve, die Zahl j ihrer pinch-points und die Zahl t ihrer dreifachen Punkte. Aus diesen Singularitätenzahlen ergeben sich dann die beiden Geschlechtszahlen (Zeuthen, Clebsch Ann. IV., siehe F. d. M. III. 1871. 295) der Fläche F. Die so entstehenden Ausdrücke für die Geschlechtszahlen bleiben, wie es wegen des eindeutigen Entsprechens sein muss, bei Vertauschung der m_i mit den n_i ungeändert. Die Ableitung der genannten drei Singularitätenzahlen beruht auf einer geschickten Anwendung der Strahlenpaar-Formeln des Referenten. Für die Ordnung b der Doppelcurve von F ergiebt sich

$$b = \frac{1}{2}[n^2 - Mn - (N-4)e],$$

wo der Kürze wegen $M = \Sigma(m_i)$, $N = \Sigma(n_i)$ und

$$e = m_1 m_2 n_3 n_4 + m_1 m_3 n_2 n_4 + m_1 m_4 n_2 n_3 + m_2 m_3 n_1 n_4 + m_2 m_4 n_1 n_3 + m_3 m_4 n_1 n_2$$

gesetzt ist. Für die Ordnung θ der einfachen Curve auf Φ, welche der Doppelcurve auf F entspricht, ergiebt sich

$$\theta = (n-M)e - (N-4)\nu.$$

Die Zahl j der pinch-points auf F wird

$$j = \nu(N_2 - 4N + 10) + nM_2 + e(MN - 4M - P),$$

wo

$$M_2 = \sum_{i<k}(m_i m_k), \quad N_2 = \sum_{i<k}(n_i n_k) \quad \text{und} \quad P = \Sigma(m_i n_i)$$

gesetzt ist. Die Zahl t der dreifachen Punkte auf F ergiebt sich dann aus

$$t = \frac{1}{3}[bn - 2bM - (N-4)\theta + j].$$

Scht.

H. G. Zeuthen. Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. Klein Ann. XVIII. 33-69.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. B. p. 501.

E. B. Holst. Saetninger om de Cirkler i Rummet, som skjaere et fact Keglesnit to Gange. Christiania Forh 1881.

Sätze über Flächen, die von Kreisen erzeugt werden, welche einen festen Kegelschnitt zweimal schneiden. L.

O. Rupp. Ueber die Abhängigkeit der Charaktere einer durch Leitcurven bestimmten Regelfläche von den Charakteren dieser Leitcurven. Klein Ann. XVIII. 366-379.

Die vorliegende Abhandlung bildet insofern eine wesentliche Ergänzung gewisser von Salmon, Cayley und auch von Picquet, Zeuthen und dem Referenten unternommenen Untersuchungen,

als sie die Charaktere des Ortes der Strahlen, welche entweder jede von drei Curven einfach oder eine Curve zweifach, eine zweite einfach oder endlich eine Curve dreifach schneiden, durch die Charaktere der gegebenen Leitcurven auch in dem Falle ausdrückt, wo diese Leitcurven stationäre Punkte haben. Bei der Ableitung seiner Formeln macht der Verfasser einerseits von der Zeuthen'schen Geschlechtsformel für zwei auf einander bezogene Curven, andererseits von den in den erweiterten Correspondenzsätzen und dem Princip von der Erhaltung der Anzahl gipfelnden Methoden des Referenten Gebrauch. Den Ausgangspunkt für die Bestimmung der Charaktere der Regelflächen bildet in jedem von den drei Fällen erstens die Erkenntnis, dass die stationären Erzeugenden einer Regelfläche nur von den stationären Punkten der Leitcurven herrühren können, und zweitens die Erkenntnis, dass eine Ebene, welche eine Regelfläche in zwei Punkten einer Erzeugenden berührt, dieselbe in allen Punkten berühren muss, dass also die Erzeugende eine Torsallinie sein muss. Von den Resultaten des Verfassers mögen in diesem Referate nur diejenigen Platz finden, welche den Rang der erzeugten Regelflächen durch die Charaktere der Leitcurven ausdrücken, da die Ordnung der Regelflächen schon von Andern auf mehrfache Weise bestimmt ist, und nach der Ordnung wohl der Rang die wichtigste Singularitätenzahl ist. Es bezeichne immer m_i die Ordnung der Leitcurve C_i, r_i ihren Rang, h_i die Zahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte, β_i die Zahl ihrer stationären Punkte. Dann ist der Rang der Regelfläche, deren Erzeugende jede der Curven C_1, C_2, C_3 einfach schneiden, gleich:

$$2m_1 m_2 m_3 + m_1 m_2 r_3 + m_2 m_3 r_1 + m_3 m_1 r_2,$$

und der Rang der Regelfläche, deren Erzeugende C_1 zweifach und C_2 einfach schneiden, gleich

$$r_1 m_2 (m_1 - 3) + m_1 m_2 (m_1 - 1) + h_1 r_2 - 3\beta_1 m_2,$$

und der Rang der Regelfläche, die von den Dreipunkten-Secanten einer Curve C gebildet wird, gleich

$$-2h^2 + h(m^2 + 5m - 24) - \frac{1}{6}(16m^3 - 84m^2 + 104m) - 3\beta(h - 2m + 6).$$

Scht.

H. Valentiner. Bidrag til Rumcurvernes Theori.
Diss. Kjöbenhavn.

Die Arbeit behandelt solche Sätze über Raumcurven, welche mittels Constantenzählungen hergeleitet werden können. Sie zerfällt in fünf Abschnitte. Der erste derselben enthält die einleitenden Sätze, welche die Grundlage der zu entwickelnden Theorien bilden, und insbesondere solche Sätze, welche aussagen, durch wie viele Punkte einer Gruppe eine gewisse Curve gehen muss, „damit sie durch alle übrigen geht.“ Im zweiten Abschnitt wird die Darstellung der Curven erörtert. Wie bei Cayley (C. R. LIV.) werden dieselben als Raumgebilde betrachtet, welche punktweise ebenen Curven entsprechen. Dies wird dadurch erreicht, dass man sie als Schnittcurven von Kegeln φ_n und einer willkürlichen Fläche der m^{ten} Ordnung mit $(m-1)$-fachem Punkte im Scheitel des Kegels betrachtet. Eine solche Fläche M_m wird eine Monoide genannt und kann durch eine Gleichung der Form

$$M_m \equiv \varphi_m + a\varphi_{m-1} = 0,$$

wo a die Gleichung einer Ebene ist, dargestellt werden. φ_m wird der „Oberkegel“, φ_{m-1} der „Unterkegel“ von M_m genannt. Solche Gerade, welche von einem gegebenen Punkte ausgehend die Curve in zwei Punkten schneiden, werden Doppelstrahlen genannt. Die Hauptsätze dieses Abschnittes sind dann die folgenden: 1) Wenn man durch die von einem willkürlichen Punkte ausgehenden Doppelstrahlen einer Curve c_n einen Kegel φ_{m-1} legen kann, so giebt es immer eine Monoide M_m, welche φ_{m-1} als Unterkegel hat und c_n enthält. 2) Wenn die Anzahl der Doppelpunkte einer ebenen Curve ψ_n höchstens $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ ist, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass dieselbe als die Projection einer Raumcurve c_n aufgefasst werden kann, diejenige, dass eine Curve ψ_{n-4} durch einen der Doppelpunkte geht, weil sie alle übrigen enthält. Der dritte Abschnitt handelt von den Schnittpunkten von Curven mit Flächen. Hier wird der folgende Hauptsatz bewiesen. „Hat eine c_n dem Anschein nach h Doppelpunkte, so sind die Schnittpunkte von c_n

mit einer Fläche F_p bestimmt durch $np-\frac{(n-1)(n-2)}{2}+h$ unter ihnen, falls $p \geqq n-2$." Ferner enthält dieser Abschnitt eine Reihe von Bestimmungen für die Anzahl von Schnittpunkten, welche durch die andern bestimmt sind, im Falle, dass $p<n-2$.

Der vierte Abschnitt handelt von den Doppelstrahlen und schliesst sich einem im zweiten Teile bewiesenen Satze an. Können nämlich aus irgend einem Punkte h Doppelstrahlen zu c_n gelegt werden, so wird ein Kegel der m^{ten} Ordnung wenigstens $\frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}$ derselben enthalten, weil er durch die übrigen geht, wenn nur

$$n-2>m \geqq \frac{n-2}{2}$$

und zugleich

$$h \leqq \frac{m(m+3)}{2}+\frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}.$$

Es wird nun zuerst gezeigt, dass wenn c_n nicht auf einer Fläche der zweiten Ordnung liegt, ein Kegel der m^{ten} Ordnung immer mehr Doppelstrahlen als die hier angegebene Anzahl enthalten muss, wenn er durch die übrigen geht, falls $h<m-4$. Demnächst wird genauer untersucht, wie viele der Doppelstrahlen ein Kegel der n^{ten} Ordnung wenigstens enthalten muss, damit er durch die übrigen geht, sofern c_n auf einer Fläche der q^{ten} Ordnung liegt. Im letzten Abschnitte wird endlich untersucht, wie vielen Bedingungen eine Raumcurve noch unterworfen werden darf, wenn nur die Ordnung und die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte gegeben sind. Es wird gefunden, dass die gesuchte Anzahl $4n$ ist, wenn $h>\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, ein schon früher bekanntes Resultat.

Dies sind kurz die Hauptresultate der vorliegenden bedeutenden Arbeit; auf eine Wiedergabe des Gedankenganges der Beweise, welche übrigens mit grosser Sorgfalt durchgeführt sind, müssen wir wegen der Schwierigkeit dieser Art von Untersuchungen verzichten. Gm.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Capitel 1.

Coordinaten.

H. M. Jeffery. On dual inversion of cartesian and boothian coordinates. Quart. J. XVII. 311-319.

Die Diagonale, welche die Fusspunkte der Cartesischen Coordinatenstrecken eines variablen Punktes (x, y) verbindet, umhüllt eine Curve, deren Grad im Allgemeinen doppelt so hoch ist als derjenige der von dem Punkte beschriebenen Curve, und deren Gleichung durch die Substitutionen $\frac{1}{\xi}$ und $\frac{1}{\eta}$ aus der Gleichung der letzteren hervorgeht. Die Arbeit enthält specielle Untersuchungen über die Beschaffenheit dieser Klassencurve, wenn die ursprüngliche Curve ein Kegelschnitt in verschiedenen Lagen ist, sowie über den reciproken Fall, dass die in Liniencoordinaten (ξ, η) gegebene Gleichung durch die Substitutionen $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ für ξ und η transformirt wird. Besonders eingehend werden die singulären Punkte behandelt. Schg.

R. W. Genese. On a system of coordinates. Lond. M. S. Proc. XII. 157-168.

Das hier untersuchte Coordinatensystem stimmt, wie der Verfasser nachträglich bemerkt hat, mit den von Walton aufgestellten Trigonic coordinates (siehe F. d. M. I. 1868. 151) überein. Nur nimmt der Verfasser die drei Fundamentalpunkte auf einer Axe statt in der Ebene an. Es zeigt sich dann die bemerkenswerte Eigentümlichkeit, dass für alle Curven, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen, der Grad der Gleichung in diesen Coordinaten niedriger ist, als in den gewöhnlichen. So stellt die allgemeine lineare Gleichung einen Kreis, die quadratische eine C_4 dar. Der Verfasser giebt Anwendungen auf beide Arten von Curven und findet namentlich für die letzteren und für Kegelschnitte einfache kinematische Erzeugungsweisen, wobei die Curve sowohl als Ort eines Punktes wie einer Geraden betrachtet wird. Den Schluss bilden Untersuchungen über die Ovale von Descartes. Schg.

R. W. Genese. On biangular coordinates. Quart. J. XVIII. 150-154.

Es werden hier nur zwei von den drei Winkeln des oben besprochenen Coordinatensystems benutzt. Mit Hülfe dieser Coordinaten wird eine Anzahl von Aufgaben aus der höheren Geometrie allgemein oder in Specialfällen gelöst, z. B.: Wenn die Spitze eines Dreiecks mit fester Basis eine gegebene Curve durchläuft, welches ist der Ort für den Mittelpunkt des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises? Schg.

H. Hart. On the general equation of the second degree in tetrahedral coordinates. Lond. M. S. Proc. XII. 135-141.

Untersuchungen über die parallel zu den Tetraederflächen geführten Schnitte durch das Centrum einer Fläche zweiter Ordnung und über sonstige aus der Gleichung in Tetraedercoordinaten sich ergebende Merkmale des speciellen Charakters der Fläche. Schg.

O. STAUDE. Ueber lineare Gleichungen zwischen elliptischen Coordinaten. Leipzig. B. G. Teubner.

Bezogen auf ihr gemeinsames Polardreieck sind

$$\alpha_1 u^2 + \beta_1 v^2 + \gamma_1 w^2 = 0;\quad \alpha_2 u^2 + \beta_2 v^2 + \gamma_2 w^2 = 0$$

die Gleichungen zweier Kegelschnitte in trimetrischen Coordinaten u, v, w. An diese schliesst sich mit dem Parameter $t_1 : t_2$ die einfach unendliche Schaar von Kegelschnitten

$$(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1) u^2 + (\beta_1 t_2 - \beta_2 t_1) v^2 + (\gamma_1 t_2 - \gamma_2 t_1) w^2 = 0$$

an, welche mit den beiden ersten je vier Tangenten gemein haben. Die Gleichung der Schaar in Punktcoordinaten

$$\frac{x^2}{\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1} + \frac{y^2}{\beta_1 t_2 - \beta_2 t_1} + \frac{z^2}{\gamma_1 t_2 - \gamma_2 t_1} = 0$$

kann auf die Form

$$(4) \qquad p t_1^2 - q t_1 t_2 + r t_2^2 = 0$$

gebracht werden, wo

$$p = \beta_2 \gamma_2 x^2 + \gamma_2 \alpha_2 y^2 + \alpha_2 \beta_2 z^2,$$
$$q = (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) x^2 + (\gamma_1 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_1) y^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) z^2,$$
$$r = \beta_1 \gamma_1 x^2 + \gamma_1 \alpha_1 y^2 + \alpha_1 \beta_1 z^2.$$

Die Gleichung (4) liefert für jedes complexe Wertsystem der zwei Verhältnisse $x:y:z$ zwei im Allgemeinen complexe Werte von $t_1 : t_2$. Diese zwei Werte heissen die elliptischen Coordinaten des Punktes xyz. Der erste Abschnitt der Arbeit handelt über lineare Gleichungen zwischen elliptischen Coordinaten in der Ebene, der zweite über dieselben im Raume, letzterer in vier Capiteln: I. Das elliptische Coordinatensystem im Raume; II. Trilineare Gleichungen zwischen homogenen elliptischen Coordinaten; III. Ueber specielle Formen linearer Gleichungen zwischen den gewöhnlichen elliptischen Coordinaten; IV. Analytische Behandlung der singulären Punkte einer Fläche unter Zugrundelegung ihrer Gleichung in elliptischen Coordinaten. H.

W. UNVERZAGT. Ueber die Grundlagen der Rechnung mit Quaternionen. Pr. Wiesbaden.

Ausführliche Erläuterung dieser Grundlagen unter vergleichen-

der Heranziehung von Grassmann's und Scheffler's höheren Einheiten, und mit Widerlegung der Einwürfe (gegen Nutzen, Berechtigung und Richtigkeit der Quaternionentheorie), welche teils in einer Recension von Hoppe über des Verfassers Programmschrift „Der Winkel als Grundlage mathematischer Untersuchungen" (1878), teils von Scheffler in seinem Buche über polydimensionale Grössen erhoben worden sind. Reelle Vorwürfe können sich nach Ansicht des Referenten nur gegen die unpraktischen Bezeichnungen des Quaternionencalcüls richten und gegen das einseitige Verfahren der Autoren, diesem Calcül auch solche Probleme zur Erledigung zu überweisen, die naturgemäss anderen Zweigen der Ausdehnungslehre zufallen. (Vgl. F. d. M. IX. 1877. 512.) **Schg.**

W. R. Hamilton. Elemente der Quaternionen. Deutsch von P. Glan. Bd. I. T. 1. u. 2. Leipzig. J. A. Barth.

Das Referat erfolgt nach Vollendung des Werkes. **Schg.**

C. A. Laisant. Introduction à la méthode des quaternions. Paris, Gauthier-Villars.

Ein ausführliches Referat darüber von H. Brocard findet sich Nouv. Ann. (3) I. 332-335, über welches im nächsten Jahre berichtet werden wird. **O.**

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

H. W. Westin. Elementarlärobok i analytiska geometrien. Stockholm 8°.

M. L.

E. Mahler. Zur allgemeinen Theorie der ebenen Curven.
Hoppe Arch. LXVI. 365-372.

Die gewöhnlichen Coordinaten x, y werden zu Functionen zweier unabhängiger Variabeln u, v gemacht und die ebene Geometrie auf dieselbe allgemeinere Grundlage gestellt, welche Gauss für die Geometrie auf der beliebigen Fläche anwendet. Namentlich wird die Tangente und die Krümmung einer beliebigen ebenen Curve $v = f(u)$ in dieser Form bestimmt. Ueber die dazu verwandte dem Verfasser eigentümliche Einführung der Grössen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ ist jedoch zu bemerken, dass ihre Erklärung Bezug auf eine Curve nimmt, aber nicht gesagt wird, auf welche?, und dass diese Erklärung ohne Beantwortung dieser Frage unverständlich ist, wahrscheinlich sogar einen principiellen Irrtum vermuten lässt. H.

J. S. Vaněček. Krumme Linien in der Ebene und im Raume. Prag. (Böhmisch).

Eine selbständige Schrift über dieses reichhaltige Thema, in der die Hauptpunkte nach französischen Quellen erörtert werden. Std.

M. d'Ocagne. Sur la construction de la normale dans un certain mode de génération des courbes planes.
Nouv. Ann. (2) XX. 197-201.

Schneiden sich die in den Punkten p und p_1 zweier fester Curven errichteten Normalen in einem Punkte m, setzt man ferner $mp = \varrho$, $mp_1 = \varrho_1$, so ist die fragliche Curvengattung der Punkte m definirt durch die Gleichung

$$\mathfrak{F}(\varrho, \varrho_1) = 0.$$

Die Normale in m ergiebt sich als Diagonale eines gewissen Parallelogrammes. Als Beispiel wird die Lemniscate behandelt.

Rg.

C. J. Monro. Solution of a question (6438). Ed. Times XXXIV. 78-79.

Es wird der Winkel bestimmt, den die in einem Punkte einer ebenen Curve gezogene Normale mit der Geraden macht, welche von diesem Punkte nach dem Halbirungspunkte der benachbarten und der Tangente an die Curve parallelen Sehne gezogen ist. Daran schliesst sich eine Discussion der Frage, ob das gestellte Problem sich auf eine Fläche erweitern lasse. O.

G. Koenigs. Construction de la parabole osculatrice en un point d'une courbe. Nouv. Ann. (2) XX. 11-12.

Diese Construction gründet sich auf den bekannten Satz, dass der Krümmungshalbmesser der Parabel in irgend einem Punkt gleich ist der doppelten Strecke, welche auf der Normalen zwischen dem Punkte und der Directrix enthalten ist.

W. St.

F. Schiffner. Zur Theorie der asymptotischen Punkte. Hoppe Arch. LXVII. 203-207.

Der Verfasser unterscheidet vier Arten asymptotischer Elemente. Bedeuten x, y und r bez. die rechtwinkligen Coordinaten und den Radiusvector, so hat man, wenn gleichzeitig

x zunehmend, y abnehmend, r zunehmend } eine Asymptote erster Art,

x zunehmend, y zu- und abnehmend, r zunehmend } eine Asymptote zweiter Art,

x ab- und zunehmend, y zu- und abnehmend, r abnehmend } einen asymptotischen Punkt erster Art,

x abnehmend, y zu- und abnehmend, r abnehmend } einen asymptotischen Punkt zweiter Art.

Insbesondere werden die Eigenschaften letztgenannter Punkte, welche bisher weniger untersucht waren, an einem Beispiele betrachtet.

Wir geben hier die Gleichungen einer Curve mit Asymptoten erster Art wieder, da dieselben in der Arbeit durch Druckfehler entstellt sind:

$$x = \alpha, \quad y = \frac{a}{\alpha}, \quad r = \frac{1}{\alpha}\sqrt{a^2 + \alpha^4},$$

worin α das Argument, a eine Constante ist.

(Vergl. die Arbeit des Verfassers: „Ueber eine Raumcurve mit einem asymptotischen Punkte etc.“ pag. 207 ff. und das betreffende Referat Abschn. IX. Cap. 3 A.). Rg.

E. Fauquembergue. Solution d'une question (583). Nouv. Ann. (2) XX. 35-38.

E. Catalan. Note. Nouv. Corr. VI. 521-524.

E. Fauquembergue. Sur une question de licence. Nouv. Ann. (2) XX. 171-173.

Die Aufgabe ist: Eine Curve so zu bestimmen, dass die Krümmungsradien von ihr und von der ihr durch reciproke Radienvectoren aus gemeinsamem Pole entsprechenden Curve ein gegebenes constantes Verhältnis haben. Sie wird zuerst von Herrn Fauquembergue gelöst, dann der Weg der Herleitung und der Ausdruck des Resultats von Herrn Catalan vereinfacht. Der zweite Artikel reproducirt die letztere Darstellung. Es ergiebt sich, dass die gesuchte Curve das folgende System zweier Kreise ist:

$$(x^2+2y^2+y\sqrt{c^2-b^2}-b^2)\,(x^2+y^2-2y\sqrt{c^2-b^2}-b^2) = 0.$$

Das Lesen des ersten Aufsatzes stören viele Druckfehler.

H.

M. Azzarelli. Applicazione della teorica dei limiti alla determinazione dei raggi di curvatura e delle evolute. Rom., Acc. P. d. N. L. XXXIII. 323-336.

Der Krümmungsmittelpunkt einer ebenen Curve wird bestimmt als Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks zwischen

drei consecutiven Punkten der Curve. Die Rechnung stützt sich darauf, dass der Radius des Umkreises gleich dem Product der Seiten dividirt durch das vierfache Dreieck ist. H.

P. Vogel. Note über Discontinuitäten bei Curven.
Schlömilch Z. XXVI. 391-392.

Zunächst bespricht der Herr Verfasser einige Mitteilungen des Herrn J. Plateau an die belgische Akademie, in welcher Letzterer auf gewisse Discontinuitäten bei Functionen einer reellen Veränderlichen aufmerksam macht, die er durch geschlossene Ausdrücke, in welche nur algebraische und trigonometrische Functionen eingehen, darstellen zu können glaubt. Nachdem der Herr Verfasser einen hierbei vorgefundenen Fehler erwähnt hat, giebt er selbst einige Beispiele, um die von Herrn Plateau gemeinten Discontinuitäten im Curvenlauf zu erzeugen, indem er von einer Function ausgeht, die im Punkte $x = a$ eine wesentliche Unstetigkeit besitzt.

Im ersten Beispiel ersetzt der Herr Verfasser die Curve

$$y = x\sqrt{a-x}$$

durch folgende:

$$y = \frac{x^n}{\log x} + x\sqrt{a-x}.$$

Im zweiten Beispiel wird die Curve

$$x = y^2(1+\sqrt{1-y})$$

ersetzt durch

$$x = (y-x^{\sqrt{2}})^2\,(1+\sqrt{1-y+x^{\sqrt{2}}})$$

und das Verhalten derselben besprochen. Am Schluss sagt der Verfasser, dass man durch trigonometrische Functionen oder durch Combinationen einer endlichen Zahl derselben nicht im Stande ist, solche Unstetigkeiten zu erzeugen. Mz.

L. de la Rive. Exercices de géométrie analytique.
Bibl. un. (3) V. 34-42.

B. Theorie der algebraischen Curven.

ROSANES. Zur Theorie der reciproken Verwandtschaft. Kronecker J. XC. 303-322.

Die im Bd. LXXXVIII. des Borchardt'schen J. (vgl. F. d. M. XI. 484-488) von Herrn Rosanes entwickelte Theorie der linear-abhängigen Punktsysteme erfährt hier eine wesentliche Erweiterung, welche auch zu interessanten Verallgemeinerungen bekannter Eigenschaften der Kegelschnitte führt.

Linear-abhängig nennt Herr Rosanes ein System von p Punkten dann, wenn bei demselben jede Form eines gewissen Grades, für die $p-1$ von den Punkten Nullpunkte sind, auch den letzten Punkt zum Nullpunkte hat, wobei man unter Nullpunkt einer binären, ternären oder quaternären Form einen Punkt zu verstehen hat, der diese Form zu Null macht. Zunächst wird analytisch durch die bilineare ternäre Form diejenige Verwandtschaft zweier Ebenen definirt, welche unter dem Namen der Reciprocität oder Correlation (Hirst, Sturm) der Gegenstand vieler rein geometrischer Untersuchungen geworden ist, und bei welcher jedem Punkte der einen Ebene eine Gerade in der andern Ebene und umgekehrt auch jeder Geraden der ersten Ebene ein Punkt in der zweiten Ebene entspricht. Von den Resultaten, zu denen der Verfasser gelangt, mögen hier die folgenden beiden Platz finden: 1) „Zerlegt man die sechs Punktepaare eines abhängigen Systems beliebig in zwei Gruppen von je drei Paaren, so bilden die zwölf Seiten dieser beiden Paare von Dreiecken ein abhängiges System von Geradenpaaren." Der bekannte Satz, dass die sechs Seiten zweier Dreiecke, deren sechs Ecken auf einem Kegelschnitte liegen, einen andern Kegelschnitt berühren müssen, erscheint als specieller Fall dieses Satzes, sobald man bei jedem von den sechs erwähnten Punktepaaren die beiden Punkte, welche das Paar constituiren, zusammenfallen lässt. 2) „Ordnet man die zweimal sechs Ecken zweier vollständiger Vierseite $a_1 a_2 a_3 a_4$ und $b_1 b_2 b_3 b_4$ einander derartig zu, dass immer zwei Ecken ein Paar bilden, bei deren Bezeichnung durch die ihnen incidenten vier Seiten sämmt-

liche vier Indices auftreten, so erhält man sechs conjugirte Punktepaare eines und desselben Kegelschnitts." Die Gleichung des Kegelschnitts, welcher durch diesen Satz, der neu sein dürfte, definirt wird, drückt der Verfasser durch die gegebenen Elemente aus.

Den Schluss der Abhandlung bildet die analoge Behandlung der bilinearen quaternären Form, wodurch sich analoge Sätze für Punktepaare, Ebenenpaare und Flächen zweiten Grades ergeben. Scht.

H. Schubert. Die trilineare Verwandtschaft zwischen drei einstufigen Grundgebilden. Hamb. Mitt. 1881.

Siehe Abschn. II. Cap. 2. p. 108.

C. le Paige. Bemerkungen über cubische Involutionen. Wien. Ber. LXXXIII. 351-357.

Der Verfasser strebt auf dem Wege symbolischer Rechnung die lineare Lösung des folgenden Problems an: Es seien auf einem als Träger betrachteten Kegelschnitte drei Punktetripel $x_1 x_2 x_3$, $y_1 y_2 y_3$, $z_1 z_2 z_3$ einer cubischen Involution zweiter Stufe gegeben. Man soll den Punkt u_3 finden, welcher mit zwei gegebenen Punkten $u_1\, u_2$ ein viertes Paar bildet. Rg.

C. le Paige. Ueber conjugirte Involutionen. Wien. Ber. LXXXIV. 233-237.

V.

Cretin. Sur l'équation de Hesse aux points d'inflexion. Nouv. Ann. (2) XX. 131-132.

V.

M. Pasch. Ueber die rationalen Curven. Klein Ann. XVIII. 91-92.

Einfacher Beweis des Satzes: „Ist eine rationale ebene Curve gegeben durch

$$\varrho x_i = f_i(\lambda), \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wo die f_i ganze Functionen von λ sind, so ist die Form $F(x_i)$, die durch Elimination von ϱ und λ daraus entsteht, (und gleich 0 gesetzt, die rationale Curve darstellt) entweder selbst irreducibel oder Potenz einer irreduciblen Form. My.

WEILL. Théorèmes sur les courbes algébriques.
Nouv. Ann. (2) XX. 498-500.

Es wird der Ausdruck für die Summe der Quadrate der gegenseitigen Entfernungen der Schnittpunkte einer Geraden mit einer algebraischen Curve bestimmt. Daraus ergiebt sich: Damit auf den Schaaren paralleler Secanten diese Summe je einen constanten Wert habe, muss die Gleichung der Curve durch geeignete Coordinatentransformation auf die Form

$$y^m + \varphi_{m-2}(xy) + \varphi_{m-3} + \cdots = 0$$

gebracht werden können, und jener constante Wert ist Null, wenn $\varphi_{m-2}(x, y)$ verschwindet. V.

E. CAPORALI. Sulle tangenti condotte ad una curva algebrica piana da un suo punto multiplo. Nap. Rend. XX. 143-147.

Die Arbeit enthält eine Verallgemeinerung des Satzes, den Herr Bertini in der Acc. R. d. L. (3) I. 92-96 (siehe F. d. M. IX. 1877. p. 484) gegeben hat. O.

CH. BIEHLER. Théorie des points singuliers dans les courbes algébriques. Seconde et troisième partie.
Nouv. Ann. (2) XX. 97-110, 489-498, 537-546.

Der Verfasser setzt seine analytisch-geometrischen Untersuchungen über den Verlauf einer algebraischen Curve in der Nähe eines vielfachen Punktes fort. (Vgl. F. d. M. XII. 1880. 539).

Zuerst wird der Fall behandelt, wo der vielfache Punkt unendlich fern liegt. Die folgenden Capitel beschäftigen sich mit der Construction der parabolischen Zweige, die von einer vielfachen Richtung zu unendlich fernen Punkten herrühren. Scht.

J. J. Walker. Solution of a question (6534). Ed. Times XXXV. 22-23.

Gegeben seien fünf Kegelschnitte $U_1, \dots U_5$. Man kann dann in der Regel auf unendlich viele Arten fünf Constante a, b, c, d, e so bestimmen, dass $aU_1+bU_2+cU_3+dU_4+eU_5$ entweder ein vollständiges Quadrat L^2 oder ein Product von zwei Factoren MN ist. Es wird gezeigt, dass die Linie L einen Kegelschnitt berührt, während M und N in Bezug auf diesen Kegelschnitt conjugirt sind. Daraus folgt zugleich, dass, wenn M gegeben ist, N durch einen festen Punkt geht. O.

D'Esclaibes. Nouvelle démonstration d'un théorème relatif aux courbes du second genre. Brux. S. Sc. V. B. 34-36.

Die Arbeit enthält einen einfachen Beweis des folgenden Satzes: „Die Coordinaten der Punkte einer Curve der Ordnung n, welche $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte hat, lassen sich als rationale Functionen eines Parameters λ und der Quadratwurzel eines Polynomens sechsten Grades in λ ausdrücken." Mn. (O.).

R. A. Roberts. On the tangents drawn from a point to a nodal cubic. Lond. M. S., Proc. XII. 99-101.

V.

M. Pasch. Notiz über ternäre Formen mit verschwindender Functionaldeterminante. Klein Ann. XVIII. 93-94.

Zwischen drei ternären Formen n^{ten} Grades mit verschwin-

dender Functionaldeterminante, aber ohne gemeinsamen Teiler, besteht allemal eine irreducibele Gleichung ν^{ten} Grades vom Geschlechte Null, wo ν einen Teiler von n bedeutet. Ist $n = \nu\mu$, so lassen sich die gegebenen Formen darstellen als Formen ν^{ten} Grades, deren Argumente zwei ternäre Formen μ^{ten} Grades sind.

V.

F. Brioschi. Sur une propriété du paramètre de la transformée canonique des formes cubiques ternaires. Lond. M. S., Proc. XII. 58-63.

Der Parameter l der canonischen Form

$$x^3+y^3+z^3+6lxyz = 0$$

einer ternären cubischen Form U mit den Invarianten S und T hängt ab, wie Herr Brioschi schon vor längerer Zeit (C. R. 1863) gezeigt hatte, von der Lösung der Gleichung

$$x^4-6Sx^2+8Tx-3S^2 = 0.$$

Setzt man

$$x = \mu\sqrt{S},\ (1-2k^2)S\sqrt{S} = T,$$

so geht dieselbe in die Multiplicatorgleichung der Transformation dritter Ordnung der elliptischen Functionen über, nämlich

$$\mu^4-6\mu^2+8\mu(1-2k^2)-3 = 0.$$

Diesen Zusammenhang benutzt Herr Brioschi hier, um für l eine durch den Modul $q = e^{-n\frac{K'}{K}}$ ausgedrückte Formel zu finden. Es ergiebt sich so

$$l = -\frac{1}{2q^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{1+2q^3+2q^{12}+2q^{27}+\cdots}{1+q+q^3+q^6\ldots}\right],$$

sowie für den Parameter L der canonischen Form der Cayley'schen Curve

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+6L\alpha\beta\gamma = 0:$$

$$L = -\frac{1}{6q^{\frac{1}{3}}}\left[\frac{1+5q^2-7q^4-11q^{10}\ldots}{1-3q^6+5q^{18}\ldots}\right].$$

V.

H. M. JEFFERY. On plane curves of the 4th class with quadruple foci. Quart. J. XVIII. 1-41.

H. M. JEFFERY. On the stapete-points of class-quartics with quadruple foci. Quart. J. XVIII. 158-166.

H. M. JEFFERY. On bicircular quartics. Lond. M. S., Proc. XII. 17-26.

H. M. JEFFERY. On spherical quartics with a quadruple cyclic arc and a triple focus. Lond. M. S., Proc. XII. 168-177.

Die beiden ersten Abhandlungen geben ein Bild über die Fortsetzung der Untersuchungen des Verfassers über die Gestaltsverhältnisse von Curven 4ter Classe, über deren allgemeine Gesichtspunkte bereits früher referirt ist. (S. F. d. M. VIII. 1876. 512, 476; IX. 560; X. 482; XI. 513.). Dieselben Methoden sind auch in den anderen beiden Noten über Curven vierter Ordnung angewandt.

V.

N. M. FERRERS. Property of a quadric curve with three double points. Quart. J. XVIII. 73-74.

Die beiden Bedingungen, unter denen die Gerade

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

Wendetangente einer C_4 wird, deren drei Doppelpunkte sich in den Ecken des Coordinatendreiecks befinden, werden mit Hülfe der Invarianten eines Kegelschnittbüschels aufgestellt. Da eine derselben vom zweiten Grade in λ, μ, ν ist, so hat man den Beweis des bekannten Satzes, dass die sechs Wendetangenten der rationalen C_4 einen Kegelschnitt berühren. V.

H. VALENTINER. Bevis for en Sätning om algebraiske Kurver. Zeuthen T. (4) V. 1-3.

H. VALENTINER. Bevis for en plangeometrisk Sätning. Zeuthen T. (4) V. 167-170.

Es werden die folgenden beiden Sätze über ebene Curven bewiesen:

1) Wenn mn Punkte so liegen, dass eine Curve der n^{ten} Ordnung, welche durch $mn - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ derselben hindurchgeht, auch die übrigen $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ enthält, so liegen sie auf einer Curve der m^{ten} Ordnung, indem $n > m > 3$.

2) Wenn eine Curve der n^{ten} Ordnung

$$\frac{(p+q-n-1)(p+q-n-2)}{2}$$

Punkte aus einer Punktgruppe α mit pq Punkten enthält, welche Punkte dann auf einer Curve der p^{ten} Ordnung liegen, weil sie durch alle die übrigen Punkte der Gruppe α hindurchgeht, so kann durch α eine Curve der Ordnung p gelegt werden.

Gm.

E. C. Valentiner. Nogle Sätninger om visse algebraiske Kurver. Zeuthen T. (4) V. 88-91.

Wenn eine Curve der 6ten Ordnung $C^{(6)}$, neun Doppelpunkte hat, so ist einer derselben durch die anderen bestimmt; er liegt auf einer gewissen $C^{(9)}$ mit dreifachen Punkten in den acht gegebenen. Hat die $C^{(6)}$ ausser acht gegebenen noch zwei andere, so liegen auch diese beiden auf der erwähnten Curve $C^{(9)}$.

Gm.

E. C. Valentiner. Nogle Fundamentalsätninger om algebraiske Kurver. Zeuthen T. (4) V. 124-126.

Beweis der Existenz nicht zerfallender Curven von der n^{ten} Ordnung und dem Geschlecht p, wo

$$0 \leqq p \leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Gm.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

J. Ellinger. Einiges über den Unterricht in der analytischen Geometrie II. Pr. Tilsit.

Der Herr Verfasser zeigt, wie seiner Ansicht nach ein Leitfaden der analytischen Geometrie beim Unterricht auf Realschulen beschaffen sein muss, indem er selbst in vorliegender Arbeit Bruchstücke eines solchen Leitfadens liefert. Er will dadurch erreichen, dass einerseits dem Lehrer bei Benutzung desselben freier Spielraum im Unterrichte bleibt, andererseits aber auch dem Schüler eine genügende Basis zur häuslichen Tätigkeit gegeben wird. Die gegenwärtige Abhandlung ist die Fortsetzung einer früheren, und beginnt mit den Linien ersten Grades oder den Geraden, deren Gleichungen in klarer und hinreichend vollständiger Weise hergeleitet werden. Es folgt dann die Entfernung zweier Punkte, die Gerade durch zwei Punkte, Durchschnitt und Winkel zweier Geraden, ferner, was senkrechte und parallele Lage angeht, Abstand einer Geraden von einem Punkt, u. a. m. Weiterhin wird nach der vorgetragenen Methode bewiesen, dass in einem Dreieck die Höhen durch denselben Punkt gehen, ebendasselbe von den Schwerlinien und Loten durch die Mitten der Seiten, dass ferner in einem vollständigen Viereck die Mitten der drei Diagonalen in einer Geraden liegen. Dann kommt die Fläche des Dreiecks, woran sich Aufgaben vom Dreiecke schliessen. Hierauf folgt die Gleichung des Kreises, der Kreis durch drei Punkte, Oerter, die den Kreis betreffen, Tangente; Schnittpunkte, Chordale zweier Kreise und zuletzt der Satz vom Chordalpunkt dreier Kreise. Mz.

O. Hesse. Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Dritte Aufl. revid. von S. Gundelfinger. Leipzig. Teubner.

Dieses Buch ist, wie in der Vorrede gesagt wird, sowohl für die Schule als auch für die Universität passend. Die behan-

delten Gegenstände sind der Sphäre des Schulunterrichts entnommen; nur eine besondere Methode der Auflösung biquadratischer Gleichungen, die in der 7ten Vorlesung vorkommt, gehört nicht in den Schulunterricht. Die Art der Darstellung ist aber eine solche, wie sie auf die Universität gehört, d. h. umfassend und dem heutigen Standpunkt der Wissenschaft angemessen. Die vorliegende dritte Auflage unterscheidet sich von der früheren nur durch wenige Aenderungen. Der Gang des Buches ist folgender: Erste Vorlesung: Einleitung. Zweite Vorlesung: Gerade Linie. Dritte Vorlesung: Harmonisches Verhältnis und Involution von Geraden. Vierte bis sechste Vorlesung: Punkt, Gleichung des Punktes, harmonische Punkte, Involution. Achte Vorlesung: Linienpaare und Punktepaare. Neunte und zehnte Vorlesung: Transformation der Coordinaten und orthogonale Substitution. Elfte Vorlesung: Homogene Coordinaten und Dreieckscoordinaten. Zwölfte Vorlesung: Das Pascal'sche und das Brianchon'sche Sechseck. Dreizehnte Vorlesung bis zu Ende: Kreis, System von Kreisen, die durch dieselben beiden Punkte gehen; Berührungsproblem. Mz.

A. Droz. Note sur des formules de Joachimsthal.

Nouv. Ann. (2) XX. 411-414.

Der Herr Verfasser leitet die Ausdrücke für den Dreiecksinhalt, wenn die Seiten durch ihre Gleichungen, und das Tetraedervolumen, wenn die Flächen durch ihre Gleichungen gegeben sind, sehr kurz und übersichtlich her. Er geht hierbei von dem Satze aus: „Wenn

$$\varDelta = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}$$

und $\alpha_{\varphi\psi}$ der Coefficient von $a_{\varphi\psi}$ in $\varDelta$ ist, so hat man

$$\varDelta' = \Sigma \pm \alpha_{11}\, \alpha_{22} \dots \alpha_{nn} = \varDelta^{n-1}.“$$

Wenn nun

$$(1) \qquad a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0,$$
$$(2) \qquad a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0,$$
$$(3) \qquad a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

die Gleichungen der Seiten des Dreiecks sind, und x_1, y_1 die

Coordinaten des Durchschnittspunktes der Geraden (2) und (3); ferner x_2, y_2 und x_3, y_3 die analoge Bedeutung haben, so ist

$$x_1 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{13}}, \quad y_1 = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{13}}; \qquad x_2 = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{23}}, \quad y_2 = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{23}};$$

$$x_3 = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}}, \quad y_3 = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}},$$

und es folgt:

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha_{13}\,\alpha_{23}\,\alpha_{33}} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

oder

$$2S = \frac{\Delta^2}{\alpha_{13}.\alpha_{23}.\alpha_{33}}.$$

Ganz entsprechend, nur mit Hinzufügung des Index 4, ergiebt sich das Volumen des Tetraeders V aus der Formel

$$6V = \frac{\Delta^3}{\alpha_{14}\,\alpha_{24}\,\alpha_{34}\,\alpha_{44}}.$$

Mz.

F. J. van den Berg. Over twee met betrekking tot een driehoek symmetrische groepen van drie cirkels, en over twee dergelijke groepen van drie rechte lijnen. Nieuw Arch. VII. 78-90

„Wenn drei über den Seiten eines Dreiecks als Sehnen beschriebene Kreise durch einen Punkt gehen, müssen auch die drei zu diesen Seiten symmetrischen Kreise einen Punkt mit einander gemein haben.“ Nachdem dieser Satz mit Hülfe von trilinearen Coordinaten bewiesen worden ist, wird die Verwandtschaft der beiden Gruppen von Kreisen näher entwickelt. Die conjugirten Schnittpunkte beider Gruppen haben folgende Eigenschaften: 1) Jedes Paar solcher Punkte sind die Endpunkte eines der Durchmesser einer dem Dreieck umschriebenen gleichseitigen [Hy]perbel. 2) In Folge dessen ist der geometrische Ort der [Mit]ten jedes solchen Paars der Neunpunktekreis des Dreiecks.

Weiter wird die analoge Untersuchung für die beiden gemeinschaftlichen Schnittpunkte in zwei in Bezug auf die Winkel symmetrischen Gruppen von drei geraden Linien angestellt.

G.

Lugli. Soluzione di alcuni problemi generali di geometria. Lomb. Rend. Ist. (2) XIV. 564-576.

Einige Probleme, die sich auf Construction von Vielecken beziehen, werden rein geometrisch und nachher auch analytisch aufgelöst.

Mz.

E. Hunyady. Ueber ein Kriterium von Steiner in der Theorie der Kegelschnitte. Kronecker J. XCI. 248-253.

Das hier analytisch bewiesene Kriterium lautet: Sind A, B, C drei Punkte eines Kegelschnitts und P sein Mittelpunkt, so lässt sich in folgender Weise entscheiden, ob der Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel sei. Sind $A' B' C'$ die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks ABC, so teilen die Verbindungsgeraden der Punkte $A' B' C'$ die Ebene in sieben Teile, von welchen einer im Innern des Dreiecks $A' B' C'$ liegt, drei sich über die Ecken und drei sich über die Seiten erheben; liegt nun der Mittelpunkt P in den ersten vier Teilen der Ebene, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse, wenn hingegen P in den letzten drei Teilen liegt, dann ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.

Scht.

G. Halphen. Sur un critérium de Steiner à la théorie des sections coniques. Brit. Ass. Rep. 1881.

Der Satz, um den es sich handelt, betrifft die Bestimmung der Art eines Kegelschnitts, von dem drei Punkte und sein Mittelpunkt gegeben sind.

Csy. (O.).

H. Hart. Notes on areal coordinates. Mess. (2) XI. 104-105.

Ausgehend von der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in Liniencoordinaten stellt der Verfasser auf: 1) Die Gleichung, welche die Länge der Halbaxen bestimmt, 2) den Winkel zwischen den Asymptoten, 3) die Bedingung, dass die Curve ein Kreis wird, 4) die Gleichung des von einem Punkt gezogenen Tangentenpaars. Glr. (O.).

A. Quidde. Analytisch-geometrische Aufgaben. Pr. Erfurt.

Die vorliegende Abhandlung bietet reiches Material zur Beschäftigung mit Aufgaben und Sätzen, welche Kegelschnitte betreffen; und zwar beziehen sich diese Aufgaben und Sätze auf Eigenschaften der Kegelschnitte, welche erst bei etwas eingehenderem Studium betrachtet werden. Zuweilen ist die Lösung angedeutet, zuweilen dem Leser vollständig überlassen. Zur Charakterisirung des Inhaltes seien einige der gegebenen Aufgaben herausgegriffen. „Von den Punkten einer geraden Linie s lege man Tangenten p, q an einen Kegelschnitt und von ihren Einschnitten in eine andere gegebene Gerade t wieder Tangenten m und n, wo schneiden m und n einander?" „Ein Winkel von gegebener Grösse hat seinen Scheitel in einem festen Punkte eines Kegelschnittes; welche Curven berühren die Verbindungslinien der Einschnitte seiner Schenkel?" „Um die Punkte einer Ellipse oder Hyperbel sind Kreise zu beschreiben, welche einen gegebenen Kreis berühren, dessen Mittelpunkt der eine Brennpunkt ist; es soll die Umhüllungscurve dieser Kreise gefunden werden." U. s. w. Es wird auch gelegentlich angedeutet, wie die besprochenen Aufgaben sich verallgemeinern lassen.

Mz.

E. Lebon. Normale menée à une conique à centre d'un point de l'axe focal. Nouv. Ann. (2) XX. 133-134, 240.

Es wird folgender Satz bewiesen: „Zieht man durch einen Punkt o der Focalaxe eines Kegelschnittes mit dem Mittelpunkt c

ı den Kegelschnitt die beiden gleichen Normalen *og* und *oh*, nd ferner ein Lot *ok* zu einem Kegelschnittdurchmesser *pq*, so t der Ort des Durchschnittspunktes *r*, den dieses Lot mit dem ı *pq* conjugirten Durchmesser *ij* hat, die Gerade *gh*, welche die eiden Normalenfusspunkte verbindet.“

Der Beweis ist sehr einfach und kurz nach analytischer ethode. Es folgt dann als Anwendung die Construction der ormalen aus einem Punkte der Focalaxe mit Benutzung der-nigen conjugirten Durchmesser, die von gleicher Länge sind. uch wird auf ein Problem des Raumes hingewiesen. In einer äteren Note sagt der Herr Verfasser, dass die andere Axe des egelschnitts in gleicher Weise verwendbar ist. Mz.

ETNIKOW. Sur les propriétés principales des foyers des courbes du second degré et sur la détermination analytique de ces points. Nouv. Ann. (2) XX. 289-305.

Der Inhalt ist im Titel genügend gekennzeichnet. Es sind ı Wesentlichen nur bekannte Dinge, jedoch in guter wissen-haftlicher Darstellung gegeben. Mz.

Veitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Kegelschnitte im Allgemeinen in analytischer Behandlung von J. E. A. STEGGALL, R. L. KNOWLES, D. WICKERSHAM, E. W. SYMONS, WOLSTENHOLME, J. J. WALKER, R. E. RILEY, E. RUTTER, W. H. BLYTHE, B. EASTON, MORET-BLANC, N. GOFFART finden sich Ed. Times XXXIV. 27, 62-63, 74-75, 105-106, XXXV. 29, 101, 102; Nouv. Ann. (2) XX. 65-73, 427-428.

O.

Veitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über die Parabel in analytischer Behandlung von C. J. MONRO, J. E. A. STEGGALL, A. ANDERSON, C. MORGAN, J. O'REGAN,

D. Edwardes, W. M. Coates, L. A. Kittudge, W. S. McCay, J. Boudènes, A. Chambeau finden sich
Ed. Times XXXIV. 24, 60-61, 115-116, XXXV. 104-105; Nouv. Ann. (2) XX. 180-182, 464-468.

O.

Weill. Théorèmes sur les normales à l'ellipse.
Nouv. Ann. (2) XX. 73-94, 110-113.

In dieser Arbeit findet sich eine grosse Zahl bemerkenswerter Sätze über Normalen an die Ellipse, die sich im Auszuge nicht wol wiedergeben lassen; auch die Normalen des Ellipsoides werden gelegentlich betrachtet. Die Darstellung ist nach der Methode der analytischen Geometrie. Mz.

C. Lauermann. Ueber die Normalen der Ellipse.
Wien. Ber. LXXXIII. 92-96.

Der Herr Verfasser geht von der gleichseitigen Hyperbel

$$a^2\alpha\eta - b^2\beta\xi = \xi\eta c^2$$

aus, welche die Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

in den Fusspunkten der von (α, β) auf die Ellipse gefällten Normalen trifft. Er zeigt, dass diese Hyperbel sich folgendermassen leicht construiren lässt: Der Hyperbelmittelpunkt hat die Coordinaten:

$$x' = \frac{a^2\alpha}{c^2}, \quad y' = -\frac{b^2\beta}{c^2}.$$

Betrachtet man nun in der Gleichung:

$$\frac{x'}{\xi} + \frac{y'}{\eta} = 1$$

x', y' als laufende Coordinaten, so gehört sie einer durch den Hyperbelmittelpunkt gelegten Geraden zu, die auf den Coordinatenaxen die Stücke ξ, η abschneidet. Man nehme daher den Hyperbelmittelpunkt zum Mittelpunkt eines Strahlbüschels und construire zu jedem Strahl den Punkt, dessen Coordinaten die Abschnitte sind, die der Strahl auf den Coordinatenaxen be-

stimmt; der Ort dieser Punkte ist die gleichseitige Hyperbel. Der Mittelpunkt der Hyperbel selbst ist leicht als Durchschnitt von

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1 \quad \text{mit} \quad y=-\frac{b^2\beta}{a^2\alpha}x$$

gefunden. Hierauf bespricht der Herr Verfasser die Fälle, in denen die Hyperbel mit der Ellipse vier reelle und gesonderte, vier reelle und von diesen zwei coincidirende, zwei reelle und zwei imaginäre Punkte gemein hat. Sehr einfach ergiebt sich aus den Gleichungen

$$\beta v+\alpha u=c^2\left(\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}\right),\quad b^2\beta u+a^2\alpha v=c^2uv,$$
$$b^2u^2+a^2v^2=a^2b^2,$$

die sich auf den zweiten der eben genannten Fälle beziehen, mit (u, v) als Coordinaten des Berührungspunktes die Gleichung der Evolute der Ellipse und auch die Gleichung der Berührungshyperbel:

$$\frac{u^3}{a^2\xi}+\frac{v^3}{b^2\eta}=1.$$

Der Berührungspunkt und die beiden Durchschnittspunkte, welche diese Hyperbel und die Ellipse gemein haben, stehen in einem einfachen constructiven Zusammenhang, welcher erklärt wird. Ausserdem wird gezeigt, dass, wenn α der excentrische Winkel des Berührungspunktes (u, v), d. h. $u=a\cos\alpha$, $v=b\sin\alpha$, und wenn ebenso β und γ die excentrischen Winkel der beiden Durchschnittspunkte sind, die Gleichung besteht:

$$2\alpha+\beta+\gamma=180.^\circ$$

Mz.

C. Lauermann. Ueber die Normalen der Ellipse.

Schlömilch Z. XXVI. 389-391.

Hier wird (vgl. voriges Referat) noch ferner gezeigt, dass, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die excentrischen Winkel der Fusspunkte der Normalen sind, die von einem Punkte der Ebene auf eine Ellipse

gefällt werden können, die Gleichung besteht:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180^\circ.$$

Weiter wird bewiesen: Je drei dieser Normalenfusspunkte und der dem vierten diametral gegenüberliegende Punkt der Ellipse liegen auf einem Kreise.

Am Schlusse wird die Aufgabe besprochen, von dem Punkte P, der in der Ebene einer construirten Ellipse gegeben ist, die Normalen auf die Ellipse zu fällen, in der Voraussetzung, dass eine derselben bekannt ist. Mz.

O. Schlömilch. Eine Eigenschaft concentrischer Ellipsen und Hyperbeln. Schlömilch Z. XXVI. 135-136.

Folgender Satz wird in dieser Schrift behandelt: „In einer aus den Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ construirten Ellipse sei P der Punkt mit dem excentrischen Winkel ω, also mit den Coordinaten

$$x = a\cos\omega;\quad y = b\sin\omega.$$

In einer zweiten aus gleichgerichteten, sonst aber willkürlichen Axen CA_1 und CB_1 construirten Ellipse gehöre der Punkt P_1 zu demselben excentrischen Winkel; dann ist die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte P und P_1 immer normal zu einer dritten Ellipse $A_2P_2B_2$ und schneidet letztere in einem Punkte P_2, der zu demselben excentrischen Winkel gehört.“ Weiter wird angegeben, wie diese dritte Ellipse, die mit den beiden ersten concentrisch und von gleichgerichteten Axen ist, construirt wird. Es werden ferner besondere Fälle besprochen; auch wird der Hyperbel, bei welcher der excentrische Winkel durch die Gleichungen

$$x = a\sec\omega;\quad y = b\tang\omega$$

erklärt ist, Erwähnung getan. Mz.

P. Barbarin. Solution d'une question proposée par M. Catalan. Nouv. Ann. (2) XX. 453-456.

Eine Cycloide bleibt beständig mit zwei festen Geraden in

Berührung. Der Ort der Mittelpunkte der Kreise, die durch den festen Schnittpunkt der beiden Geraden und die Berührungspunkte gehen, ergiebt sich als eine Ellipse. O.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Ellipse und Hyperbel von C. Morgan, J. A. Kealy, J. E. Steggall, Matz, W. B. Grove, C. Bickerdike, Scott, R. Knowles, G. Eastwood, J. McDowell, A. Anderson, A. Hilaire, J. Boudènes, H. Lez, A. Geneix, Martin finden sich Ed. Times XXXIV. 58-59, 86-87, 89-90, XXXV. 62, 88, 90; Nouv. Ann. (2) XX. 14-17, 127-131, 235-238, 423-424, 459-464.

O.

D. Andere specielle Curven.

G. Witte. Ueber die Construction der Curven dritter Ordnung aus drei Polpaaren. Pr. Lauenburg a. d. E.

In einigen einleitenden Worten erwähnt der Herr Verfasser die Beziehung einer Curve dritter Ordnung zu ihrer Hesse'schen und geht dann zur analytischen Behandlung der Aufgabe über, eine Curve dritter Ordnung als Inbegriff der Polpaare zu construiren, wenn drei dieser Polpaare gegeben sind. Das Nähere ist in der Arbeit selbst nachzusehen. Mz.

W. H. L. Russell. On certain geometrical theorems Lond. R. S., Proc. XXXIV. 211-214.

Der erste Teil enthält die Ableitung einer gewissen Form der Gleichung eines Kreises, der einem Dreieck einbeschrieben ist. Nro. 2) enthält den analytischen Nachweis einer bekannten Eigenschaft der cubischen Curve. Die dritte Note endlich giebt eine Untersuchung über den Ort der Punkte, von dem aus zwei an

eine cubische Curve gezogene Tangenten sich rechtwinklig schneiden. Es geschieht durch Lösung einer cubischen Gleichung.

Cly. (O.).

G. Halphén. Problème concernant les courbes planes du troisième ordre. S. M. F. Bull. IX. 96-112.

Man verdankt Herrn Cremona den Satz, dass sich die Cayley'sche und Hesse'sche Curve eines Kegelschnittnetzes in neun Punkten berühren. Da sich jede Curve dritter Ordnung auf dreifache Art als Hesse'sche Curve eines Netzes ansehen lässt, so existiren drei Cayley'sche Curven, welche in der genannten Beziehung zu ihr stehen. Herr Halphén untersucht nun, ob diese Curven dritter Classe die einzigen sind, und findet, dass die äquianharmonische C_3 ausser den drei Cayley'schen Curven noch ein einfach unendliches System von neunfach berührenden äquianharmonischen Curven dritter Classe besitzt, dass dagegen bei einer allgemeinen C_3 die drei ersteren die einzige Lösung bilden. Die Untersuchung über die äquianharmonische C_3 wird mit elementaren Mitteln geführt; gleichzeitig wird auch ein Beweis des Cremona'schen Satzes gegeben. Für den allgemeinen Fall aber bedient sich der Verfasser der elliptischen Functionen. Soll nämlich überhaupt eine Curve dritter Classe α eine C_3, deren Coordinaten eindeutige doppelt-periodische Functionen von u sind, in neun Punkten berühren, deren Argumente durch $u_1\, u_2 \dots u_9$ bezeichnet werden, so ist bekanntlich:

$$\Sigma u_i \equiv 0,\ \frac{\omega}{2},\ \frac{\omega'}{2},\ \frac{\omega+\omega'}{2} (\mathrm{mod}\,\omega, \omega').$$

Da der erste Fall nicht eintreten kann (wie besonders gezeigt wird), so bleiben nur die drei anderen übrig, welche sich grade auf die drei Cayley'schen Curven beziehen. Und dass endlich ausser diesen keine anderen Curven der verlangten Art existiren, ergiebt sich in folgender Weise: Gäbe es noch eine Curve dritter Classe β dieser Art, so würde für eine der drei Cayley'schen Curven α der Quotient $\frac{\beta}{\alpha}$ das Quadrat einer eindeutigen dop-

pelt-periodischen Function, welche sich auf eine Constante reducirt.
V.

A. Cayley. A partial differential equation connected with the simplest case of Abel's theorem. Brit. Ass. Rep. 1881.

Eine Curve dritten Grades werde durch eine Gerade in den Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) geschnitten. Die beiden ersten seien beliebig; sie bestimmen dann den dritten Punkt. Dieser ist, wie hier bewiesen ist, mit dem ersten und zweiten verbunden durch die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d}{dx_1}\cdot\frac{d}{dx_2}\log\left(\frac{dx_3}{dx_1}:\frac{dx_3}{dx_2}\right)=0$$

und unabhängig von der besonderen Curve dritten Grades.

Csy. (O.).

Hesse. Ueber die Teilung des Winkels, speciell die Trisection. Pr. Montabaur.

Der Herr Verfasser stellt zu Anfang eine allgemeine Curvengleichung für die Teilung eines Winkels in n gleiche Teile auf. Er sucht hierzu den geometrischen Ort aller Punkte P, zu welchen Linien durch zwei feste Punkte A und B gehen, und wo das Lot von P auf AB den Winkel APB im Verhältnisse $1:(n-1)$ teilt. Ist A der Coordinatenanfangspunkt, AB die Axe der positiven x, so ist α aus

$$x = y\tan\alpha \quad \text{und} \quad a-x = y\tan(n-1)\alpha$$

zu eliminiren, wobei $AB = a$ gesetzt ist. Mit Hülfe der Formeln, die die Tangente vielfacher Bogen aus der Tangente der einfachen Bogen berechnen lassen, wird die Elimination durchgeführt und die Gleichung

$$\frac{a-x}{y}=\frac{\binom{n-1}{1}y^{n-2}x-\binom{n-1}{3}y^{n-4}x^3\dots}{y^{n-1}-\binom{n-1}{2}y^{n-3}x^2\dots}$$

gefunden. Nun wird speciell der Fall $n = 3$ betrachtet; der Verlauf der Curve, ihre Construction, ihre Verwendbarkeit für die Trisection des Winkels, ihre Asymptoten und ihre Krümmung werden besprochen. Hieran schliessen sich die einfachen Integrale, nämlich das Flächenintegral, der Schwerpunkt der Fläche und der Inhalt des von der Curve erzeugten Rotationskörpers. Dann wird noch in Kürze die Curve, welche sich auf die Fünfteilung des Winkels bezieht, erwähnt. Mz.

J. H. van Leeuwen. Verdeeling van den hoek in een willekeurig aantal gelijke deelen. Nieuw Arch. VII. 213.

Elementare Betrachtung über die Teilung eines Winkels in eine beliebige Anzahl gleicher Teile mittels einer Epicycloide. G.

Schwering. Mathematische Miscellen. Pr. Coesfeld.

Enthält die Behandlung dreier Aufgaben:

1) Eine Halbkugel durch eine dem Grundkreise parallele Ebene zu halbiren.

Führt auf eine Gleichung dritten Grades und weiter auf die Construction eines regulären Neunecks.

2) Bildung der Doppeltangentengleichung einer rationalen ebenen Curve.

Das Verfahren ist directer als bei Clebsch (Borchardt J. LXIV.) und vermeidet fremde Factoren. Anwendungen auf Lemniscate, Cardioide, rationale Curven vierter Ordnung werden zugefügt.

3) Die Summe der Flächeninhalte aller Kreise, welche einem Kreissegmente, sich gegenseitig berührend, eingeschrieben sind.

Führt auf eine Anwendung der elliptischen Functionen. My.

E. Catalan. Note sur la question 393. Nouv. Ann. (2) XX. 403-405.

Verallgemeinerung eines Satzes über die cubische Parabel.

O.

C. Blasel. Die Cissoide und eine ihr verwandte Curve. Pr. Neisse.

Der Herr Verfasser sagt zu Anfang, dass der Zweck seiner Arbeit nur der ist, seine Schüler dadurch zu weiterem eigenem Fortschreiten anzuspornen, dass er ihnen in fasslicher Weise zeigt, wie sie das in den Elementen der analytischen Geometrie Erlernte bei Linien von höherer als zweiter Ordnung zweckmässig verwenden können. Es folgt dann die analytische Behandlung einer einfachen geometrischen Aufgabe, die zur Cissoide $y^2 = \frac{x^3}{c-x}$ führt. Hierauf wird gezeigt, dass die Cissoide Fusspunktcurve der Parabel ist; ferner wird Newton's Methode angegeben, die Cissoide durch eine stetige Bewegung zu beschreiben. Es kommt dann die Betrachtung der Tangenten an die Cissoide. Hernach wird die Ophiuride (Schlangenschwanzlinie von ὄφις und οὐρά) geometrisch definirt und für diese Curve die Gleichung gefunden:

$$x^3 - y^2(c-x) + axy = 0.$$

Die Tangente an diese Curve und die Polargleichung dieser Curve werden besprochen. Auch ihre Beziehung zum delischen Problem wird angegeben. Wenn nämlich $y = -a$, so kommt $x^3 = a^2c$; und setzt man $c = 2a$, so hat man $x^3 = 2a^3$.

Dann wird auch gezeigt, wie die Cissoide mit dem delischen Problem in Beziehung gebracht werden kann. Zum Schluss folgt noch eine Andeutung über die Quadratur der Cissoide.

Mz.

A. Ameseder. Ueber die eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte, welche ein einzelnes System bilden. Wien. Ber. LXXXIII. 829-885.

Das System vierfach berührender Kegelschnitte einer rationalen ebenen C_4, welches Herr Ameseder bereits wiederholt betrachtet hat, wird hier einer sehr ausführlichen Untersuchung unterworfen. Die Abhandlung enthält 1) die Characteristiken des Systems, 2) von dem Systeme gegebene symmetrische Elementarsysteme, 3) die Kegelschnitte des Systems als Träger von projectivischen die C_4 erzeugenden Tangentensystemen, 4) Tangenteninvolutionen dritten und vierten Grades auf einem Kegelschnitte des Systems, 5) Polareigenschaften des Systems, 6) Hesse'sche und Cayley'sche Curve des Systems. V.

E. Dewulf. Combien existe-t-il de courbes rationnelles du quatrième ordre qui ont deux points doubles en a_1 et a_2 et qui passent par les sept points simples 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? Nouv. Ann. (2) XX. 401-402.

Vermöge einer sehr einfachen Abzählung, die auf den Eigenschaften der Jacobi'schen Curve eines Netzes beruht, wird gezeigt, dass zwölf Curven der verlangten Art existiren.

V.

Eigil Schmidt. Om de Kurver af fjerde Orden, hvis Ligninger kun indeholde Kvadraterne af de variable. Zeuthen T. (4) V. 145-156.

Eine analytische Untersuchung der Curven vierter Ordnung, welche durch die Gleichung

$$f(\xi) \equiv a_{11}\xi_1^2+a_{22}\xi_2^2+a_{33}\xi_3^2+2a_{12}\xi_1\xi_2+2a_{13}\xi_1\xi_3+2a_{23}\xi_2\xi_3 = 0,$$

wo $\xi_i = x_i^2$, darstellbar sind.

Es wird bewiesen, dass solche Curven (und nur diese) auf vier verschiedene Weisen als geometrische Orte der Punkte, aus welchen zwei gegebene Kegelschnitte unter einem gegebenen anharmonischen Verhältnis gesehen werden, betrachtet werden können. Ferner zeigt der Verfasser, dass eine rationale $C^{(4)}$ (mit drei Doppelpunkten) in eine Curve der betrachteten Art übergeführt werden kann mittels einer quadratischen Linientrans-

formation, welche mit derjenigen Punkttransformation, welche einen Kegelschnitt in die Curve transformirt, analog ist. Betrachtet man die Wendetangenten, so werden diese einen Kegelschnitt berühren, und dieser Kegelschnitt hat mit demjenigen doppelte Berührung, welcher die sechs von den Doppelpunkten ausgehenden gewöhnlichen Tangenten berührt. Gm.

K. Nagel. Bestimmung der Doppelpunkte einer rationalen Curve 4ter Ordnung. Klein Ann. XIX. 433-434.

Es wird gezeigt, wie die Bestimmung der drei Doppelpunkte der rationalen ebenen C_4, deren Coordinaten in der Form $x_i = f_i(\lambda_1 \lambda_2)$ mit den homogenen Parametern λ_1, λ_2 gegeben sind, auf die Auflösung einer cubischen Gleichung zurückgeführt werden kann. V.

A. G. Greenhill. On conjugate functions of cartesians and other quartics. Cambr. Proc. IV. 77-92.

Discussion der Curven $\xi =$ const. und $\eta =$ const., wo

1) $x+iy = \sin^2(\xi+i\eta)$, 2) $x+iy = \mathrm{sn}^2(\xi+i\eta)$,

3) $x+iy = \mathrm{sn}(\xi+i\eta)$ oder $\mathrm{cn}(\xi+i\eta)$ oder $\mathrm{dn}(\xi+i\eta)$.

Aus dem Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}$$

leitet der Verfasser Beweise bekannter Eigenschaften von bicircularen Quartiks her, wo a, b, c, d complexe Grössen sind, welche die Vectoren der Foci sind. Glr. (O.).

W. Hess. Eigenschaften der Lemniscate. Schlömilch Z. XXVI. 143-144.

Es werden für die Lemniscate:

$$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi = b^2 \cos 2\varphi$$

mehrere einfache Sätze aufgestellt, die in gewissem Sinne Sätzen über Kegelschnitte entsprechen. Einige dieser Sätze sind: Für

jeden Lemniscatenpunkt ist die Summe der Brennstrahlen gleich der Projection der Axe $2b$ auf den Mittelstrahl. Zieht man zu einem Brennstrahl durch den benachbarten Scheitel eine Parallele, so schneidet diese auf dem Mittelstrahl ein Stück ab, das der Differenz der Brennstrahlen gleich ist. Trägt man im Mittelpunkte an einen Mittelstrahl einen rechten Winkel, im Curvenpunkte dagegen den halben Winkel der dort sich treffenden Brennstrahlen an, so ist die Hypotenuse des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks gleich der Halbaxe u. s. w. In dieser Weise folgen dann noch Sätze, die Scheitelstrahlen, Tangente und Normale, Krümmungsradius, Lemniscatensectoren und besondere Punkte betreffen. Der Nachweis dieser Sätze, die eben nur angegeben sind, wird für den betreffenden Leser immerhin eine gute Uebung sein.

Mz.

R. A. Roberts. Note on a system of cartesian ovals passing through four points on a circle. Lond. M. S., Proc. XII. 200-201.

V.

Stammer. Tangentenconstruction der Astroide. Hoppe Arch. LXVII. 222-224.

Die Astroide wird bekanntlich von einer Geraden constanter Länge a eingehüllt, deren Endpunkte auf zwei zu einander senkrechten Linien hingleiten. Die gesuchten Tangenten werden mit Hülfe eines Kreises vom Halbmesser a und zweier Hyperbeln gefunden, indem jene Linien parallel zu den Verbindungslinien des Kreismittelpunktes mit den Schnittpunkten beider Curven sind. Es giebt nur vier Richtungen, nicht acht, da dieselben paarweise einander gleich sind. Ferner wird die Construction des Berührungspunktes auf einer festen Tangente mitgeteilt.

Wir heben hervor, dass das erstere Verfahren auch anwendbar bleibt, wenn die beiden festen Axen einen beliebigen Winkel mit einander einschliessen.

Rg.

W. W. JOHNSON. The strophoids. Sylv., Am. J. III. 320-325.

Der Herr Verfasser sagt zu Anfang, dass der Name „Strophoide" von französischen Mathematikern einer gewissen cubischen Curve beigelegt worden sei, die Dr. James Booth auch „Logocyklische Curve" genannt habe. In diesem Aufsatze wird nun „Strophoide" in allgemeinerem Sinne aufgefasst als Ort der Durchschnitte zweier gerader Linien, die um zwei feste Punkte A und B in der Ebene gleichförmig rotiren. Nach dieser Definition wird $n\theta+m\varphi=\alpha$ die Gleichung der Strophoide, indem θ und φ die Winkel bezeichnen, welche die Radii Vectores PA und PB, die nach einem Curvenpunkte P gehen, mit dem primären Vector AB bilden. Das Verhältnis $n:m$ setzt der Verfasser als commensurabel voraus und sieht die Zahlen n, m als positiv an, so dass zwei Arten von Curven:

$$n\theta+m\varphi=\alpha \quad \text{und} \quad n\theta-m\varphi=\alpha$$

zu betrachten sind. Ist A Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten, AB die X-Axe, so wird

$$x=\sqrt{x^2+y^2}\cos\theta, \quad y=\sqrt{x^2+y^2}\sin\theta.$$

Ferner ergiebt sich aus $(x+iy)^n=X_n+iY_n$ sehr übersichtlich die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten

$$X_nX'_m-Y_nY'_m-q(Y_nX'_m+X_nY'_m)=0$$

für die eine Art und

$$X_nX'_m+Y_nY'_m-q(Y_nX'_m-X_nY'_m)=0$$

für die andere Art. Hier ist $q=\cot\alpha$, und X'_m, Y'_m geht aus X_m, Y_m durch Substitution von $x-a$ für x hervor ($AB=a$). Es folgt hierauf eine weitere Behandlung dieser Curven.

Mz.

S. GÜNTHER. Note sur la logocyclique ou strophoïde. Math. I. 81-84.

Tangente, Fläche, Länge eines Bogens, ausgedrückt mit Hülfe eines Bogens einer gleichseitigen Hyperbel und eines Lemniscatenbogens. Mn. (O.).

Correspondance. Nouv. Ann. (2) XX. 321-329.

1. Schreiben des Herrn Doucet, Professor am Lyceum Corneille zu Rouen. Der Herr Verfasser behandelt nach einigen einleitenden Worten über frühere Arbeiten folgende Aufgabe: „Einer gegebenen Ellipse wird ein Dreieck umschrieben, dessen Höhen die Linien von den Ecken nach den Berührungspunkten der Gegenseiten sind; man soll den Ort der Ecken des Dreiecks und ferner den Ort der Höhenschnittpunkte finden.“ Die in der Tat hübsche und einfache Lösung des Problems wird von dem Herrn Verfasser so gegeben:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p = P = 0,$$
$$x\cos\beta+y\sin\beta-q = Q = 0,$$
$$x\cos\gamma+y\sin\gamma-r = R = 0$$

seien die Gleichungen der Polaren der Dreiecksecken. Dann ist die Gleichung des Kegelschnitts von der Form:

$$\frac{A}{P}+\frac{B}{Q}+\frac{C}{R} = 0.$$

Die Bedingungen der Aufgabe ergeben aber

$$A = B = C,$$

so dass die Gleichung des Kegelschnitts lautet

$$\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}+\frac{1}{R} = 0.$$

Diese Gleichung wird nun mit

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2 = 0$$

identificirt, wodurch fünf Gleichungen zwischen $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$ erhalten werden. Bezeichnet man das Verhältnis $\frac{qr+pr+pq}{-a^2b^2}$ mit λ, so findet sich als Wert desselben

$$\lambda = \frac{a^2+b^2-\sqrt{(a^2+b^2)^2+3c^4}}{c^4},$$

wo die Quadratwurzel das negative Zeichen hat. Sind nun x_1, y_1 die Coordinaten des Poles von $R = 0$, so kann man setzen:

$$x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha = p+\mu',$$
$$x_1\cos\beta+y_1\sin\beta = q+\mu',$$
$$x_1\cos\gamma+y_1\sin\gamma = r-\mu'$$

und findet durch Multiplication mit $\cos\beta+\cos\gamma$, etc. und nachherige Addition:

$$\lambda b^2 x_1 = \mu' \cos\gamma.$$

Analog ergiebt sich

$$\lambda a^2 y_1 = \mu' \sin\gamma.$$

Hieraus folgt

$$\mu'^2 = \lambda^2 (b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2).$$

Aber andererseits ist auch

$$\mu'^2 = \lambda (a^2 b^2 - a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2),$$

und folglich wird die Gleichung des Ortes von M

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2 + \lambda (a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2) = 0.$$

In ähnlicher Weise findet man den Ort des Höhenschnittpunktes $H(x_0, y_0)$:

$$3(b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2) = c^4 \lambda (a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - a^2 b^2).$$

2. Schreiben des Herrn Legoux, Professor in Grenoble. Dieses Schreiben enthält eine geometrische Methode der Integration von

$$-xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y^2 - x^2 + b^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

3. Schreiben des Herrn Hilaire, Professor am Lyceum in Douai. Dieses Schreiben bezieht sich auf die Autorschaft folgender beider Sätze:

I. Ist ein Kegelschnitt einem Dreieck eingeschrieben, und ist die Quadratsumme der Axen dieses Kegelschnittes constant, so ist der Ort des Mittelpunktes von diesem Kegelschnitt ein Kreis, der den Höhenschnitt des Dreiecks zum Centrum hat.

II. Ist ein Ellipsoid sechs Ebenen eingeschrieben, und bleibt die Quadratsumme seiner Axen constant, so beschreibt der Mittelpunkt des Ellipsoids eine Kugel.

Die Lage des Kugelcentrums zu den sechs Ebenen hat, wie der Herr Verfasser sagt, P. Serret angegeben. Mz.

O. Schlömilch. Ueber Summen und Producte von Vectoren der Ellipse und verwandter Curven.
Schlömilch Z. XXVI. 59-63.

In dieser Arbeit wird gezeigt, wie die Zerlegungen von x^n-y^n, x^n+y^n in Producte, deren Factoren

$$x-y,\ x+y,\ x^2-2xy\cos\frac{k\pi}{n}+y^2$$

sind, sich verwerten lassen, um Relationen aufzufinden, die sich auf Radii vectores von Ellipsen und verwandten Curven beziehen. Es wird

$$x=\sqrt{\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}},\quad y=\sqrt{\frac{\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}}$$

gesetzt. Man erhält dann für grade n die Formel:

$$\left(\xi+\eta\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(\xi+\eta\cos\frac{4\pi}{n}\right)\cdots\left(\xi+\eta\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\left\{\left(\frac{\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}\right)^{\frac{n}{2}}-\left(\frac{\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$$

und ähnliche. Aus ihnen werden weitere Formeln gefunden durch Uebergang zu den Logarithmen und nachherige Differentiation. Dann wird $\xi=a$, $\eta=\sqrt{a^2-b^2}$ gesetzt, wodurch in den Formeln Summanden wie $\dfrac{b^2}{a+\sqrt{a^2-b^2}\cos\frac{k\pi}{n}}$ auftreten. Ein solcher Summand ist aber der Focalvector, welcher in einer Ellipse von den Halbaxen a und b der wahren Anomalie $\frac{k\pi}{n}$ zugehört. So erhält man Ausdrücke für die Summen und Producte dieser Vectoren. Auch die Centralvectoren der Ellipse können ähnlich behandelt werden, wenn man von der Gleichung

$$R^2=\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2-(a^2-b^2)\cos 2\Theta}$$

ausgeht. Endlich kann man diese Betrachtung auf Curven anwenden, deren Polargleichungen eine der Formen haben

$$r^\mu=\alpha+\beta\cos\vartheta \quad\text{und}\quad r^\mu=\alpha+\beta\cos 2\vartheta.$$

Mz.

W. Budde. Ueber Polar-Umhüllungscurven. Festschr. Duisburg.

Nach einigen einleitenden Worten über die Methode des Unterrichts in der analytischen Geometrie geht der Herr Verfasser zur Behandlung einer Aufgabe über, die in ihrer allgemeinsten Form lautet: „Welches ist die Umhüllungscurve der Polaren eines festen Punktes als Pol in Bezug auf einen veränderlichen Kegelschnitt?“ Die Fälle, die im Besonderen hierbei betrachtet werden, sind folgende vier: 1) Der Kegelschnitt ändert seine Gestalt. 2) Der Kegelschnitt vollführt eine geradlinig fortschreitende Bewegung. 3) Der Kegelschnitt vollführt eine drehende Bewegung. 4) Der Kegelschnitt vollführt eine zusammengesetzte Bewegung, eventuell noch verbunden mit einer Veränderung seiner Gestalt. Die Lösung geschieht nach den Regeln der Differentialrechnung. Mz.

A. Legoux. Note sur un système de courbes orthogonales et homofocales. Nouv. Ann. (2) XX. 406-408.

Es werden die Curven besprochen, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda f-a}+\frac{y^2}{\lambda f-b}=1$$

ist, wo λ ein veränderlicher Parameter, f eine Function von x, y, und a, b Constanten sind. Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei dieser Curven. Die Enveloppe aller Curven ist identisch mit derjenigen der Kegelschnitte

$$\frac{x^2}{\lambda-a}+\frac{y^2}{\lambda-b}=1.$$

Diese Curven sind aber im Allgemeinen nicht orthogonal; damit dies der Fall sei, muss f einer partiellen Differentialgleichung genügen. Diese wird hergeleitet, und dann folgen noch einige Zusätze. Mz.

P. Ruex et J. Neuberg. Sur un lieu géométrique. Math. I. 55-57.

Es handelt sich um den geometrischen Ort der Schnittpunkte der zwei Kegelschnitten gemeinsamen Tangenten, von denen der eine sich in gewisser Weise verändert. Mn. (O.).

W. E. Heal. The bitangential. Anal. VIII. 171-172.

Sich auf Salmon's „Higher plane curves" für die Gleichung der Doppeltangente der Quintik berufend giebt der Verfasser das Resultat der Reduction, jedoch ohne Beweis. Jn. (O.).

Ed. Weyr. Ueber orthogonale Trajectorien eines Systems von Kreisen. Cas. X. 20. (Böhmisch).

Ausgehend von Untersuchungen, welche Catalan in Liouville's J. XII. unter dem Titel „Sur les trajectoires orthogonales des sections circulaires d'un ellipsoïde" veröffentlicht hat, enthält die Arbeit hauptsächlich die Deduction des Satzes, dass für den Fall, wo eine orthogonale Trajectorie eines beliebigen Systems von Kreisen derselben Ebene bekannt ist, die übrigen sich durch blosse Quadraturen ergeben. Std.

F. Schiffner. Ueber die Tangenten der hyperbolischen Spirale. Hoppe Arch. LXVI. 324-326.

Wenn der Punkt P einer hyperbolischen Spirale $\left(r = \frac{a}{u}\right)$ und der Punkt P' der Kreisevolvente, welche von einem beliebigen Punkte der Polaraxe beschrieben wird und die Gleichungen

$$x = b(\cos u + u \sin u), \quad y = b(\sin u - u \cos u)$$

hat, demselben Polarwinkel, beziehungsweise Wälzungswinkel entsprechen, so ist die Tangente von P mit dem Radiusvector von P' parallel. Es wird nämlich analytisch nachgewiesen, dass der Winkel t, welchen die Tangente an die hyperbolische Spirale

in P mit der Polaraxe OX bildet, durch die Gleichung gegeben ist:

$$\operatorname{tang} t = \frac{\operatorname{tang} u - u}{1 + u \operatorname{tang} u}.$$

Andererseits ist auch

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{tang} u - u}{1 + u \operatorname{tang} u},$$

wie aus der Gleichung der Kreisevolvente hervorgeht; also $\theta = t$. Hierzu kommen noch einige Bemerkungen über die Construction der hyperbolischen Spirale. Mz.

Chr. Wiener. Doppelte Entstehungsweise der geschweiften und verschlungenen cyklischen Curven. Schlömilch Z. XXVI. 257-263.

Die gemeine Epi- und Hypocycloide können bekanntlich auf zwei Weisen, nämlich durch das Rollen zweier verschiedener Kreise auf einem und demselben festen Kreise entstehen. Der Herr Verfasser zeigt nun in diesem Aufsatze, dass auch die geschweiften und geschlungenen Arten dieser Curven auf zwei Weisen entstehen können, was noch nicht bemerkt worden zu sein scheint. Erst beim Absenden dieses Aufsatzes erhielt der Herr Verfasser ein Buch von Proctor, London 1878, in welchem Aehnliches behandelt ist. Nach einer genauen Definition der in Rede stehenden Curven geht der Verfasser dazu über, die bekannte doppelte Entstehungsweise der gemeinen Epi- und Hypocycloide so zu verallgemeinern, dass die anderen Curven daraus hervorgehen. Mz.

J. Hammond, G. Heppel. Solutions of a question (5962). Ed. Times XXXIV. 72-73.

Die Curve, für welche das Verhältnis des Krümmungsradius zur Normale gleich m (constant) ist, hat zur Gleichung

$$x = \int dy + \left[\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{m}} - 1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dies ergiebt für $m = 1$ die Kettenlinie, für $m = -1$ den Kreis, für $m = 2$ eine Parabel, deren Directrix die X-Axe ist.

O.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über ebene Curven von höherem als dem zweiten Grade von Townsend, Tanner, J. J. Walker, W. J. C. Sharp, G. Eastwood, R. Tucker, W. E. Wright, A. L. Selby, E. B. Elliott, Matz, F. D. Thomson, W. Gallatly, Nash, J. Hammond, Scheffer, W. R. W. Roberts, Evans, Wolstenholme, Ch. Ladd, J. A. Kealy, J. O'Regan, R. Knowles, N. Goffart, Moret-Blanc finden sich Ed. Times XXXIV. 23, 29-30, 79, 85-86, 91, 104, 115, XXXV. 37-39, 43, 44, 46-47, 51-52, 52-53, 65-67, 69, 71, 92; Nouv. Ann. (2) XX. 429-430, 518-520.

O.

Capitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

F. Joachimsthal. Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. Zweite Auflage, bearbeitet von L. Natani. Leipzig. B. G. Teubner.

Das Werk ist in erster Auflage nach Joachimsthal's Vorlesungen in seinem Auftrage und von ihm gebilligt, von Liersemann bearbeitet, aber erst viel später herausgegeben. Der Titel lässt erkennen, auf wie geringe Bekanntschaft mit der allgemeinen Curven- und Flächentheorie der Autor bei seinem Publikum rechnen durfte, da er die dazu erforderlichen Organe besonders nennen muss. Die Sorgfalt und Ausführlichkeit in den Anfängen,

mit welcher er das Verständnis für diese quasi neue Wissenschaft anbahnt, giebt ein Zeugnis davon, wie er für Verbreitung dieser Kenntnis gewirkt hat. Die Grenzen des Dargebotenen sind, gemäss dem damaligen Standpunkte der Theorie, wenn auch nicht allein aus diesem Grunde, ziemlich enge. Die Theorie der Curven verweilt bei der ersten Krümmung und kommt nur zum Schluss auf Bestimmung der zweiten. Mit der Anwendung der letztern fehlt natürlich ein wesentlicher Teil der Principien. Charakteristisch ist die Bevorzugung der aus Punktreihen deducirenden Methode, welche die Tangente durch zwei, den Krümmungskreis durch drei, die Krümmungskugel durch vier unendlich nahe Punkte bestimmt. Die Flächentheorie beginnt mit Unterscheidung dreier Bestimmungsweisen, je nachdem man eine Coordinate zur Function der beiden andern macht, eine Gleichung zwischen allen aufstellt oder alle als Functionen zweier Variabeln darstellt, doch geht sie bald ausschliesslich zur dritten Form über. Die Gegenstände sind mannichfaltig. Von Linien auf den Flächen werden die Krümmungslinien und kürzesten, von besonderen Flächen die geradlinigen, insbesondere abwickelbaren und die des 2ten Grades eingehend behandelt. Ein besonderer Abschnitt betrifft die partiellen Differentialgleichungen der Flächen. Eine grössere Anzahl verschiedener Theoreme enthält der Anhang.

H.

E. Mahler. Die Fundamentalsätze der allgemeinen Flächentheorie. 1. Heft 1880. 2. Heft 1881. Wien. Seidel u. Sohn.

E. Mahler. Ueber allgemeine Flächentheorie. Hoppe Arch. LXVII. 96-97.

Die zwei genannten Hefte behandeln ausgewählte Themata aus der Flächentheorie. Neu und eigentümlich ist die Einführung der Fundamentalgrössen 2ter Ordnung $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, welche aus den Gauss'schen E, F, G hervorgehen, wenn man für die Coordinaten die Richtungscosinus der Normale substituirt. Durch $F = 0$, $\mathfrak{F} = 0$ werden die Parameterlinien als Krümmungslinien be-

stimmt. Die Theorie der Krümmungen, welche als erste Anwendung davon erscheint, ist unrichtig. Im letztgenannten Artikel hat der Verfasser den Fehler angezeigt, jedoch die dadurch afficirten Sätze weder berichtigt noch kenntlich gemacht. Trotzdem beruft er sich im zweiten Hefte, wo er diejenigen Curven, welche die Krümmungslinien unter constantem Winkel schneiden, für specielle Flächen untersucht, auf jene Theorie, ohne den Fehler zu erwähnen. Der Beweis für die neuen Aufstellungen ist daher noch zu bringen. H.

H. Cox. Homogeneous coordinates in imaginary geometry. Quart. J. XVIII. 178-215.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 1. p. 424.

A. Voss. Ueber ein Princip der Abbildung krummer Oberflächen. Klein Ann. XIX. 1-27.

Man kann sich die Aufgabe stellen, die Coordinaten eines Punktes xyz einer beliebig gegebenen Fläche so als Functionen von u und v zu geben, dass von den drei Fundamentalgrössen erster Ordnung e, f, g, durch welche das Quadrat des Linienelements dargestellt ist, nämlich

$$ds^2 = edu^2 + 2fdudv + gdv^2,$$

e und g beliebig gegebene Functionen sind und f allein sich für jede Fläche besonders bestimmt. Irgend zwei so dargestellte Flächen sind dann in der Weise aufeinander abgebildet, dass die Parametercurven $u =$ const. und $v =$ const. auf beiden Flächen gleiche Länge behalten, so dass hierdurch jede beliebige Fläche durch einen sehr anschaulichen Deformationsprocess aus einer bestimmten Fläche, etwa der Ebene hergeleitet werden kann, wofern die Deformation reell ist, was nicht immer der Fall zu sein braucht. Der Herr Verfasser macht zuerst die sehr einfache Annahme $e = 1$, $g = 1$ und erhält so als Parametercurven „äquidistante" Curven. Das Netz derselben lässt sich stets in die Gestalt eines

ebenen Netzes mit rechteckigen Maschen bringen. Die Aufsuchung solcher äquidistanter Curvensysteme auf einer beliebigen Fläche kommt auf die Auflösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung hinaus, deren allgemeine Integration verwickelt ist und schwerlich gelingen dürfte, dagegen lassen sich für bestimmte Arten von Flächen, z. B. Rotationsflächen (und die darauf abwickelbaren) particuläre Lösungen angeben. Ein Fall, in welchem solche „äquidistanten Curvensysteme" von vornherein bekannt sind, ist der der „Translationsflächen", d. h. solcher Flächen, welche von einer Curve beschrieben werden, welche sich, ohne ihre Gestalt zu ändern, bewegt, ohne sich zu drehen, so dass ihre Gleichungen sind:

$$x = f_1(u) + \varphi_1(v),$$
$$y = f_2(u) + \varphi_2(v),$$
$$z = f_3(u) + \varphi_3(v).$$

Der Herr Verfasser untersucht nun zunächst die allgemeinen Eigenschaften äquidistanter Curvensysteme. Es ist für solche

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2f\,du\,dv = \left(\frac{du+dv}{\sqrt{2}}\right)^2 (1+f) + \left(\frac{du-dv}{\sqrt{2}}\right)^2 (1-f),$$

woraus man erkennt, dass die beiden Schaaren der Diagonalcurven ein Orthogonalsystem bilden. Ist dann noch f Function von $(u+v)$, so sind die Curven $(u-v) = \text{const.}$ geodätische. Dies ist der Fall bei den Rotationsflächen. Die weitere Aufsuchung der Richtungscosinus der Normalen und der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung führt dann u. A. auf den Ausdruck für das Krümmungsmass

$$K = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{f}{1-f^2}\,\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}\right) \frac{1}{1-f^2}.$$

Es ist aber $f = \cos z$, wo z den Winkel bedeutet, welchen die Parametercurven bilden; also wird

$$-K \sin z = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

Hieraus ergiebt sich sofort der Satz: „Die curvatura integra eines von zwei Paaren äquidistanter Curven gebildeten Vierecks ist gleich dem negativen Excess desselben, d. h. gleich 2π minus

[illegible]

[illegible] Ebenso ist, wie leicht ersichtlich, das Rotationsparaboloid eine Translationsfläche. Es wird nachgewiesen, dass es ausser den genannten keine Rotationsflächen giebt, welche zugleich Translationsflächen sind. Die Aufsuchung äquidistanter Curvensysteme auf Flächen constanter Krümmung, noch specieller auf der Ebene, und auf Rotationsflächen führt zu einer Reihe von speciellen Resultaten. Namentlich möge hervorgehoben werden, dass gewisse äquidistante Curven auf einer Rotationsfläche eine einfache Beziehung zu den geodätischen Linien einer gewissen anderen Rotationsfläche haben. Sind nämlich

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = f(\varrho)$$

die Gleichungen einer Rotationsfläche, so sind durch die Substitution $\varphi = c(u - v)$ und $u + v = \int d\varrho \frac{\sqrt{1+f'(\varrho)^2}}{\sqrt{1-\varrho^2c^2}}$ solche Parameter u und v eingeführt, dass die Parametercurven äquidistant sind. Setzt man aber

$$\varrho = \frac{1}{\varrho'}, \quad u = -\frac{u'}{c}, \quad v = -\frac{v'}{c},$$

so erhält man

$$u'+v' = c\int \frac{d\varrho'}{\varrho'} \frac{\sqrt{1+f'\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2}}{\sqrt{\varrho'^2-c^2}},$$

$$v'-u' = \varphi.$$

Nimmt man dann $\psi(\varrho') = -\int \frac{f'(\varrho)}{\varrho^2} d\varrho$, so sind die Parametercurven u', v' auf der Rotationsfläche mit der Meridiancurve $z = \psi(\varrho')$ geodätisch. So entsprechen z. B. den durch die obigen Gleichungen definirten äquidistanten Curven auf der Kugel gewisse kürzeste Linien auf der Rotationsfläche der Kettenlinie.

Es werden nach diesen allgemeineren Untersuchungen in der Arbeit noch einige Beispiele durchgeführt, und in einer Schlussbemerkung wird auf andere Curvensysteme hingewiesen, welche zu ähnlichen Untersuchungen, wie die vorliegende, Anlass geben können. Hierbei wird besonders der Fall hervorgehoben:

$$e = 1, \quad f = u \cos z, \quad g = u^2,$$

wo z eine gegebene Function von uv ist. Der Herr Verfasser nennt diese Curvensysteme „Radialsysteme“ und entwickelt einige ihrer Eigenschaften. Endlich wird auf die analogen räumlichen Probleme hingewiesen. A.

C. Dina. Sopra una curva particolare giacente sopra una superficie in generale. Batt. G. XIX. 298-310.

Der Aufsatz enthält Bemerkungen meist specieller Natur über die Loxodromen im allgemeinen Sinne, nämlich diejenigen Curven auf beliebigen Flächen, welche eine Curvenschaar unter constantem Winkel schneiden. Letztere wird als die eine der zwei Schaaren von Parameterlinien betrachtet. Ist es die der Curven $u = \text{const.}$, so ist die Gleichung der Loxodromen:

$$(\sqrt{EG-F^2} - aF)dv - aE du = 0.$$

Es zeigen sich Analogien mit den Geraden in der Ebene, zuerst die Bedingung der Orthogonalität. Sind ferner die Parameter isometrische (conforme Abbildung der cartesischen Coordinaten von der Ebene), so wird die Gleichung der Loxodromen linear zwischen u und v. Berührt eine Curve $u = u(v)$ die Loxodrome, und ist $\operatorname{tg}\alpha = \frac{du}{dv}$, so heisst $\frac{d\alpha}{ds}$ die loxodromische Krümmung. Für die Loxodrome ist dieselbe Null. Bei conformer Abbildung der Ebene auf einer Fläche entsprechen den Geraden offenbar Loxodromen. Es werden schliesslich die Loxodrome auf der Kugel für Meridiane, auf dem Ellipsoid für Krümmungslinien in primitiver Form gefunden. H.

L. Saltel. Étude de la variation du cercle osculateur en un point d'une section plane d'une surface.
Bord. Mém. (2) IV. 383-395.

Der ebene Schnitt einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ wird dargestellt durch diese Gleichung und die der Ebene; sein Krümmungsmittelpunkt wird als Schnitt consecutiver Normalebenen berechnet. Aus dieser Grundformel fliessen dann der Meusnier'sche, Euler'sche und Dupin'sche Satz. Schliesslich werden die Hauptkrümmungen der Fläche bestimmt mit dem Ergebnis: Das Problem der Aufsuchung der Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen ist genau dasselbe, wie das, die Länge und die Richtungen der Axen des Centralschnittes einer Fläche zweiten Grades zu finden. H.

C. H. Kummell. Some relations deduced from Euler's theorem on the curvature of surfaces. Anal. VIII. 93-95.

Es wird eine Reihe von Formeln und Sätzen entwickelt, die sich auf die Krümmung von Flächen beziehen.

In. (O.).

De Salvert. Mémoire sur la théorie de la courbure des surfaces. Brux. S. Sc. V. B. 291-473.

C. le Paige. Rapport sur ce mémoire. Brux. S. Sc. V. A. 63-65.

Die Anwendung der classischen Formeln für die Krümmung der Flächen bietet im Allgemeinen Schwierigkeiten, weil die Variabele, nach der man die Gleichung der Fläche als aufgelöst voraussetzt, eine exceptionelle Rolle in diesen Formeln spielt. Der Verfasser nimmt daher die Theorie im Ganzen wieder auf und behandelt die drei Variabeln gleichmässig derart, dass er erstens die Formeln erhält, die auf alle Fälle anwendbar sind, selbst dann, wenn die Gleichung in Bezug auf keine der Variabeln lösbar wäre, oder wenn die Berechnung der Derivirten p, q, r, s, t zu grosse Schwierigkeiten böte; und zweitens, dass er von den Vorteilen der stets bewahrten Symmetrie zwischen den Variabeln einen möglichst grossen Nutzen zieht. Die Arbeit enthält im Wesentlichen eine Erweiterung der Hesse'schen Methode (Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes (20[te], 21[te] und 22[te] Vorlesung) auf die ganze Theorie und Anwendungen auf wichtige Fragen, die sonst schwer oder überhaupt nicht angreifbar waren, während Hesse sie nur auf ein oder zwei Fälle beschränkt und keine Anwendungen gegeben hatte. Sie zerfällt in fünf Abschnitte. Im ersten wendet der Verfasser eine specielle Bezeichnung für Differentiation an (von der übrigens in diesem Bericht kein Gebrauch gemacht wird) und ebenso die Lamé'sche Bezeichnung als Differentialparameter, nämlich die Symbole

$$\Delta_1 \varphi = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2},$$

$$\Delta_2 \varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

und stellt dann die Formel für den Ausdruck des Krümmungsradius eines Normalschnittes auf, eine Formel, die schon vor Hesse von Moigno gefunden wurde (Leçons du calcul différentiel et intégral, t. II § 186, p. 310). Dies ist die Grundlage seiner ganzen übrigen Theorie.

Im zweiten Abschnitt entnimmt der Verfasser dieser letzten Formel durch normale Anwendung der Regeln über Maxima und Minima die Bestimmung der Hauptkrümmungsradien und der sonstigen Hauptfragen. Diese und die vorliegende sind allein von Hesse behandelt (a. a. O.). Jedoch gelangt der Verfasser, da er im Moment der Abfassung seiner Abhandlung die Hesse'sche Arbeit nicht kannte, durch die Verschiedenheit der angewandten Methode zu einem einfacheren System von Gleichungen für die Bestimmung der Hauptschnitte, als Hesse, welches aber, wie er im Folgenden zeigt, sonst äquivalent ist. Sind a, b, c die Richtungscosinus der Tangente an einen Hauptschnitt, R der entsprechende Krümmungsradius, λ, μ, ν die Richtungscosinus der Normalen an die gegebene Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$, so dass

$$\lambda = \frac{1}{\Delta_1 \varphi}\frac{d\varphi}{dx}, \quad \mu = \frac{1}{\Delta_1 \varphi}\frac{d\varphi}{dy}, \quad \nu = \frac{1}{\Delta_1 \varphi}\frac{d\varphi}{dz},$$

so genügen die drei gesuchten Cosinus a, b, c den folgenden fünf Gleichungen:

$$a^2+b^2+c^2 = 1, \quad a\frac{d\varphi}{dx}+b\frac{d\varphi}{dy}+c\frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{l} a\dfrac{d\lambda}{dx}+b\dfrac{d\lambda}{dy}+c\dfrac{d\lambda}{dz} = \dfrac{a}{R}, \\[2ex] a\dfrac{d\mu}{dx}+b\dfrac{d\mu}{dy}+c\dfrac{d\mu}{dz} = \dfrac{b}{R}, \\[2ex] a\dfrac{d\nu}{dx}+b\dfrac{d\nu}{dy}+c\dfrac{d\nu}{dz} = \dfrac{c}{R}, \end{array}\right.$$

von denen die drei letzten sich auf eine reduciren, wenn man die beiden ersten berücksichtigt. Aus diesen Gleichungen wird dann die Bedingung dafür abgeleitet, dass die beiden Hauptschnitte senkrecht seien, dann die Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'}\cos^2\theta+\frac{1}{R''}\sin^2\theta,$$

und endlich der Ausdruck für die Coefficienten H und K der Gleichung zweiten Grades

$$\frac{1}{R^2}-H\frac{1}{R}+K = 0,$$

welche die Hauptkrümmungsradien in Grösse und Zeichen liefert.

Im dritten Abschnitt stellt sich die Indicatrix von Charles Dupin ganz natürlich dar als Schnitt einer gewissen Oberfläche zweiter Ordnung, die zum Mittelpunkt den betrachteten Punkt (x, y, z) hat, mit der Tangentialebene an die gegebene Oberfläche $\varphi(x, y, z) = 0$ in demselben Punkte. Diese Indicatrixfläche, deren Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(X-x)^2+\frac{d^2\varphi}{dy^2}(Y-y)^2+\frac{d^2\varphi}{dz^2}(Z-z)^2 \\ +2\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}(Y-y)(Z-z)+2\frac{d^2\varphi}{dz\,dx}(Z-z)(X-x) \\ +2\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}(X-x)(Y-y) = \pm 1\end{aligned}$$

ist, spielt in der Theorie der Krümmung der Oberflächen insofern eine Rolle analog derjenigen des Osculations-Kreises beim Studium der Krümmungen von Curven, als sie in einem genau definirten Punkte eine gewisse Darstellung der Krümmung der vorgelegten Oberfläche in dem betrachteten Punkte darbietet. Zweitens liefert sie, unter anderen interessanten Eigenschaften, eine bemerkenswerte geometrische Interpretation des Lamé'schen Differentialparameters zweiter Ordnung $\Delta_2\varphi$, die darin besteht, dass diese Grösse die Summe der Inversen der drei Axen der Indicatrixfläche ist, wenn diese ein Ellipsoid ist. Man braucht nur wenige Worte in diesem Satze zu ändern, damit er auch noch gilt, wenn die Indicatrixfläche ein Hyperboloid ist.

Der vierte Abschnitt bringt eine interessante Anwendung der vorhergehenden Formeln und Theorien auf das dreifach orthogonale Flächensystem. Nachdem der Verfasser zuerst durch ein kürzeres Verfahren als das von Hesse, den bekannten Satz von Charles Dupin bewiesen, leitet er daraus leicht den Begriff der von Lamé in die Analysis eingeführten krummlinigen Coordinaten und den von ihm mit Hülfe dieses wertvollen analytischen Mittels gegebenen einfachen Ausdruck für die sechs Hauptkrümmungen des orthogonalen Systems her, nämlich die Ausdrücke:

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1} = \Delta_1 \varphi \frac{d.l\Delta_1 \psi}{d\varphi}, & \frac{1}{R'} = \Delta_1 \psi \frac{d.l\Delta_1 \varpi}{d\psi}, & \frac{1}{R''_1} = \Delta_1 \varpi \frac{d.l\Delta_1 \varphi}{d\varpi}, \\ \frac{1}{R_2} = \Delta_1 \varphi \frac{d.l\Delta_1 \varpi}{d\varphi}, & \frac{1}{R'_2} = \Delta_1 \psi \frac{d.l\Delta_1 \varphi}{d\psi}, & \frac{1}{R''_2} = \Delta_1 \varpi \frac{d.l\Delta_1 \psi}{d\varpi}, \end{cases}$$

wo φ, ψ etc. die drei krummlinigen Coordinaten bezeichnen.

Im Weiteren beweist der Verfasser leicht gewisse interessante von Lamé gefundene Sätze über Beziehungen zwischen diesen sechs Krümmungen, die Lamé aber durch sehr verwickelte und ermüdende Rechnungen bewiesen hatte, weshalb sie offenbar bisher noch nicht für Unterrichtszwecke benutzt sind. Da hier nicht alle Sätze angeführt werden können, beschränken wir uns darauf, auf die hinzuweisen, welche endliche Beziehungen zwischen den sechs Krümmungen enthalten, und auf den besonderen Fall, in welchem die drei Oberflächen, welche das Orthogonalsystem bilden, sämmtlich isothermische Flächen sind. Lamé stellt für diesen Fall die einfache und elegante Formel auf:

$$\frac{1}{R_1 R'_1 R''_1} + \frac{1}{R_2 R'_2 R''_2} = 0.$$

Der Verfasser findet für denselben Fall die drei Relationen

$$\frac{1}{R''_1 R_1} + \frac{1}{R''_2 R_2} = \frac{1}{R''_2 R_1}, \quad \frac{1}{R_1 R'_1} + \frac{1}{R_2 R'_2} = \frac{1}{R_2 R'_1},$$
$$\frac{1}{R'_1 R''_1} + \frac{1}{R'_2 R''_2} = \frac{1}{R'_2 R''_1},$$

die sich jedoch auf zwei reduciren, von denen die eine die vorhergehende Lamé'sche und die andere die folgende ganz neue ist:

$$\frac{1}{R'_1 R''_1} + \frac{1}{R''_1 R_1} + \frac{1}{R_1 R'_1} + \frac{1}{R'_2 R''_2} + \frac{1}{R''_2 R_2} + \frac{1}{R_2 R'_2}$$
$$= \frac{1}{R'_2 R''_1} + \frac{1}{R''_2 R_1} + \frac{1}{R_2 R'_1}.$$

Der fünfte und letzte Abschnitt endlich ist der Untersuchung der Nabelpunkte gewidmet. Es ergeben sich Probleme, deren Lösung man dadurch erhält, dass man der Oberflächengleichung die drei Gleichungen

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{\Delta_1 \varphi}{R}$$

hinzufügt, in welchen R der Krümmungsradius aller Normalschnitte im Nabelpunkte ist; a, b, c; a', b', c' bezeichnen, um abzukürzen, resp. folgende Werte:

$$a = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} - 2\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz},$$

$$a' = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2;$$

b, b', c, c' sind analog gebildet.

Der Verfasser wendet alle möglichen Betrachtungsarten bei dieser Untersuchung an und erhält dadurch die drei obigen Gleichungen auf vier verschiedene Weisen: Erstens durch die specielle Betrachtung der Indicatrixfläche; zweitens durch Benutzung der Eigenschaft, dass die Grösse des Krümmungsradius unabhängig von der Richtung des Normalschnittes ist; drittens daraus, dass die Hauptschnitte unbestimmt sind; und endlich viertens daraus, dass die beiden Hauptkrümmungsradien unter einander gleich sind, oder, was dasselbe ist, dass die Discriminante der Gleichung zweiten Grades, welche dieselbe liefert, gleich Null ist. Diese letzte Methode besteht eigentlich im Beweise der Identität

$$a'b'c'\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 \Delta_1^6 (H^2 - 4K) = \left(a'\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 (bc' - cb')^2$$
$$+ \left(b'\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 (ca' - ac')^2 + \left(c'\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 (ab' - ba')^2,$$

deren vollkommene Symmetrie ihre Aufstellung ohne Schwierigkeit ermöglicht, obgleich die Entwickelung des zweiten Gliedes allein über 700 Glieder enthält.

Als Probe der Nützlichkeit seiner Methode und als Beispiel für die Brauchbarkeit seiner Formeln wendet der Verfasser die letzten Resultate auf die Untersuchung der Nabelpunkte der Wellenfläche an. Dies Problem ist schon geometrisch von Mannheim mit Hülfe eleganter geometrischer Constructionen gelöst worden, aber noch nicht analytisch, da die Oberflächengleichung

vom vierten Grade und die Ausdrücke der Derivirten p, q, r, s, t, welche in der Krümmungstheorie auftreten, in Folge des Vorhandenseins von Wurzelgrössen sehr verwickelt werden. Durch seine Methode dagegen findet der Verfasser leicht die Coordinaten der Nabelpunkte dieser Fläche und zeigt, dass sie mit den Mannheim'schen Constructionen übereinstimmen.

Mn. (O.).

Dietrich. Das Verhältnis der Hauptkrümmungsradien an einem Flächenpunkte, gemessen durch den Winkel der zugehörigen Inflexionstangenten. Schlömilch Z. XXVI. 57-59.

Ist $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer Fläche, $f_1, f_2, f_3, f_{11}, f_{12}, \dots$ die partiellen Ableitungen von f, ferner

$$F = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}; \quad F_{kh} = \frac{dF}{df_{kh}},$$

so sind die Richtungscosinus α, β, γ der Inflexionstangenten (Tangenten in der Richtung der Nullkrümmung) bestimmt durch

$$\alpha : \beta : \gamma = (F_{13} \mp f_2 \sqrt{F}) : (F_{23} \pm f_1 \sqrt{F}) : F_{33},$$

der Winkel φ zwischen beiden Inflexionstangenten durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2) F}}{F_{11} + F_{22} + F_{33}},$$

die Hauptkrümmungsradien ϱ_1, ϱ_2 durch

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = -\frac{F}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^2}; \quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{F_{11} + F_{22} + F_{33}}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hieraus wird gefunden:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\sqrt{F} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}; \quad \frac{1}{\varrho_2} = -\frac{\sqrt{F} \cot \frac{1}{2} \varphi}{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2},$$

mithin:

$$-\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \varphi,$$

wie sich auch durch Betrachtung der beiden unendlich nahen, der Berührungsebene parallelen Schnitte oberhalb und unterhalb derselben bestätigt. H.

FAYE. Note sur une propriété de l'indicatrice, relative à la courbure moyenne des surfaces convexes.
C. R. XCII. 1019-1021.

Der Verfasser betrachtet den Kegel zweiten Grades, den eine Gerade aus einem Punkte einer positiv gekrümmten Fläche erzeugt, indem sie an der (Dupin'schen) Indicatrix (d. h. dem Schnitte einer der Berührungsebene unendlich nahen parallelen Ebene) gleitet; er schneidet ihn längs einer Seite auf und wickelt ihn auf der Ebene ab. Dann bildet der entstehende Spalt einen unendlich kleinen Winkel, der zur Krümmung der Fläche in Beziehung steht. Bezeichnen h die Höhe des Kegels (den Pfeil der Indicatrixebene), a, b die Halbaxen der Indicatrix, so ist dieser Winkel

$$= \frac{\pi h^2}{ab}.$$

H.

A. ENNEPER. Bemerkungen über einige Transformationen von Flächen. Gött. Nachr. 1881. 305-318.

Die correspondirenden Punkte P und P_1 zweier Flächen S und S_1 sollen sich in Beziehung auf einen festen Punkt O auf folgende Art entsprechen: Die Ebene durch die Punkte O, P, P_1 enthalte die Normalen zu den Flächen S und S_1 in den respectiven Punkten P und P_1. Es wird das Problem gestellt und gelöst: Wann entsprechen allgemein den Krümmungslinien von S Krümmungslinien auf S_1? Das Ergebnis ist folgende Beziehung zwischen S und S_1: Eine Parallelfläche von S_1 ist die transformirte Fläche mittels reciproker Radienvectoren einer Parallelfläche von S in Beziehung auf den Punkt O. Die Untersuchung bildet die Fortsetzung einer Abhandlung l. c. 1877. p. 369-396 (s. F. d. M. IX. p. 576). H.

G. Darboux. Sur les modes de transformation qui conservent les lignes de courbure. C. R. XCII. 286-289.

Der Verfasser knüpft an ein Resultat seiner umfassenden Arbeit „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques“ 1873. (s. F. d. M. V. 399) an, nämlich den Satz: „Construirt man Berührungskugeln einer Fläche Σ, die eine Kugel S unter constantem Winkel α schneiden, und durch jeden Schnitt Kugeln, die S unter dem constanten Winkel β schneiden, so werden die letzteren Kugeln von einer Fläche umhüllt, die denen von Σ Punkt für Punkt mit Erhaltung der Krümmungslinien entspricht.“ Hiermit verbindet er den Satz: „Eine Fläche Σ umhüllt eine Reihe variabler Kugeln U, welche S unter beliebigen Winkeln φ schneiden. Jedem U entspreche eine Kugel U_1, welche durch den Schnitt von S und U geht und S unter dem Winkel φ_1, bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\sqrt{\frac{1-h}{1+h}},$$

schneidet. Dann umhüllen die U_1 eine Fläche Σ_1, die Punkt für Punkt der Fläche Σ mit Erhaltung der Krümmungslinien entspricht.“ Schneiden die die Σ berührenden U die S unter constantem Winkel, so ist φ constant. Hierin zeigen die so transformirten Flächen eine Aehnlichkeit mit den parallelen Flächen. Der gegenwärtig daraus hergeleitete Satz lautet: „Es giebt für eine wirkliche Kugel S immer einen Radius ϱ derart, dass alle Kugeln vom Radius ϱ zu Transformirten, wo sie auch liegen mögen, Kugeln vom Radius $-\varrho$ haben.“ Man findet nämlich zwischen Kugeln U, U' die Relation nach obiger Definition:

$$\frac{\sin^2\varphi}{R^2+\varrho^2-2R\varrho\cos\varphi} = \frac{\sin^2\varphi'}{R^2+\varrho^2+2R\varrho\cos\varphi'},$$

woraus die obige Relation (φ, φ_1) für

$$h = \frac{2R\varrho}{R^2+\varrho^2},$$

wenn R den Radius von S bezeichnet, hervorgeht. Die zwei Orte Θ, Θ' der Centra von U, U' sind den zwei Umhüllungsflächen Σ, Σ' parallel und in obigem Sinne invers bezüglich auf eine

andere Kugel S'. Hiernach kann man von Σ zu Σ' auf folgendem Wege gelangen: Durch eine Dilatation von Σ zu Θ, durch eine Inversion bezüglich auf S' von Θ zu Θ' und durch neue Dilatation von Θ' zu Σ'. Die gleiche Erscheinung wird in dreifach orthogonalen Flächensystemen gefunden. H.

A. Cayley. On the Gaussian theory of surfaces. Lond. M. S., Proc. XII. 187-192.

Drei Formeln aus der Abhandlung von Bour: „Théorie de la déformation des surfaces“ (J. de l'Éc. Pol. Cah. XXXIX. 1862. p. 1-148) werden mit der Gauss'schen Theorie der Flächen in Verbindung gebracht. Sind v, u orthogonal geodätische Parameter, und zwar $ds^2 = dv^2+g^2du^2$, ferner in der Richtung $u=$ const. die Krümmung des Normalschnitts H_1, die Torsion T, in der Richtung $v=$ const. erstere H, und schreibt man ferner g_1 für $\frac{dg}{dv}$, so lauten sie:

$$\frac{1}{g}\frac{dg_1}{dv} = T^2-HH_1,$$

$$\frac{dT}{du}+\frac{d.Hg}{dv}-H_1g_1 = 0,$$

$$\frac{d.Tg^2}{dv}+g\frac{dH_1}{du} = 0.$$

H.

A. Cayley. On the geodesic curvature of a curve on a surface. Lond. M. S., Proc. XII. 110-117.

Die Fläche wird durch Ausdruck der Coordinaten x, y, z in zwei Parametern p, q, eine Curve auf ihr durch Ausdruck von p, q in der beliebigen Variabeln ϑ dargestellt. Unter relativer Krümmung einer Curve zu einer anderen sie berührenden wird verstanden der Abstand des Nachbarpunktes von ihr dividirt durch das Quadrat des Bogenelements. Ist die zweite Curve die berührende geodätische, so geht die relative Krümmung in die

geodätische über. Die relative Krümmung wird zuerst bei allgemeinster Anordnung durch Entwickelung der Coordinaten des Nachbarpunktes bis auf die zweite Potenz von $d\vartheta$ berechnet, dann insbesondere für $d\vartheta$ das Bogenelement ds gesetzt, daraus die geodätische Krümmung hergeleitet, das Resultat auf die Curven $p =$ const. und $q =$ const. angewandt, die so erhaltenen Werte zur Darstellung der übrigen Grössen gebraucht, schliesslich der Fall orthotomischer p, q eingehender behandelt. Eine nachträgliche Bemerkung interpretirt einen der zuletzt erhaltenen Ausdrücke. H.

O. Böklen. Ueber geodätische Linien. Schlömilch Z. XXVI. 264-269.

Das Gegenwärtige ist eine sehr reiche Ausbeute an Erweiterung von Sätzen über Gerade in der Ebene auf geodätische Linien. Wie die Focaleigenschaften der Kegelschnitte sich auf beliebige Flächen übertragen lassen, hatte der Verfasser schon früher l. c. III. 257 gezeigt. Bezeichnen u, v die geodätischen bipolaren Radienvectoren eines Flächenpunktes, so sind durch $u \pm v =$ const. die Ellipse und Hyperbel definirt, und lässt sich die Reflexion der Strahlen an der Tangente, resp. Normale von Brennpunkt zu Brennpunkt nachweisen, wie auch umgekehrt aus letzterer Eigenschaft erstere folgt. Ausser den confocalen Curvensystemen $u \pm v = c$ (Parameter) kann man aber auch andere, z. B. Kreise, welche die Verbindung der Brennpunkte AB harmonisch teilen, $u = cv$, Gerade auf AB senkrecht $u^2 - v^2 = c$, concentrische Kreise $u^2 + v^2 = c$, confocale Lemniscaten $uv = c$, Niveaulinien oder rechtwinklige Trajectorien der Curven feiner Eisenteilchen zwischen zwei magnetischen Polen $\frac{1}{u} - \frac{1}{v} = c$, in geodätischen Linien darstellen. Die gefundenen Sätze lauten: 1) „Ist die Gleichung einer Curve auf einer Fläche in bipolaren geodätischen Coordinaten gegeben, und legt man von einem Punkte M der Tangentialebene in derselben Tangenten an die geodätischen Radienvectoren, trägt auf ihnen Strecken ab gleich dem Zähler

und Nenner des Differentialquotienten der letzteren, und vervollständigt das Parallelogramm, so ist die durch *M* gehende Diagonale Normale der Curve. 2) Die Brennpunkte sämmtlicher concentrischer geodätischer Ellipsen und Hyperbeln, welche durch zwei feste Punkte *A* und *B* gehen, und deren grosse Axen gleich sind, liegen auf einer geodätischen Ellipse oder Hyperbel, deren Brennpunkte *A* und *B* sind. 3) Die Focallinien aller Kegel zweiter Ordnung, welche einen Rotationskegel in zwei entgegengesetzten Mantellinien berühren und durch zwei zur Kegelaxe symmetrisch liegende Gerade gehen, liegen auf einem Kegel, welcher den Rotationskegel ebenfalls berührt, und dessen Focalen jene Geraden sind. 4) Die durch die Spitze in der Stellung der Kreisschnitte gehenden Ebenen aller Kegel zweiter Ordnung, welche einen Rotationskegel in zwei entgegengesetzten Mantellinien berühren, sowie auch zwei zur Kegelaxe symmetrisch liegende Ebenen berühren einen Kegel, welcher den Rotationskegel gleichfalls berührt, und dessen Kreisschnitte diesen Ebenen parallel sind. 5) Die Durchschnittspunkte von rechtwinklig sich schneidenden Radienvectoren eines Systems confocaler Lemniscaten liegen bei einer Kugel sowol als auch bei einem Ellipsoid auf einem sphärischen Kegelschnitte, wenn die Brennpunkte Kreispunkte sind. 6) Alle concentrischen geodätischen Lemniscaten von gleichem Parameter (c) und gleicher Quadratsumme der Halbaxen haben einen gemeinschaftlichen Durchmesser (AB). 7) Werden von einem Punkte *M* ausserhalb eines sphärischen Kegelschnittes auf einer Kugel oder ausserhalb einer Krümmungslinie auf einem Ellipsoid zwei geodätische Tangenten gezogen, so sind durch *M* und die beiden Berührungspunkte als Brennpunkte eine geodätische Ellipse und Hyperbel bestimmt, welche die durch *M* gehenden confocalen sphärischen Kegelschnitte, bezw. Krümmungslinien berühren. H.

E. Fauquembergue. Solution d'une question de licence.
Nouv. Ann. (2) XX. 55-57.

Es wird die Aufgabe, die Differentialgleichung der geodäti-

schen Linien auf einer Rotationsfläche zu finden, in ebenen Polarcoordinaten behandelt. H.

H. v. Mangoldt. Ueber diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören, kürzeste Linien zu sein. Kronecker J. XCI. 23-54.

In Jacobi's „Vorlesungen über Dynamik“, herausgegeben von Clebsch, findet sich zuerst der Hinweis auf das verschiedene Verhalten der von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien auf verschiedenen Flächen, je nachdem dieselben sich noch einmal schneiden, oder nicht. Nur wenn sie sich nicht wieder schneiden, hören sie für keinen auf ihnen genommenen Endpunkt auf, Kürzeste im wahren Sinne des Wortes zu sein. Später ist von Christoffel u. A. bewiesen, dass auf negativ gekrümmten Flächen zwei unendlich nahe geodätische von einem Punkt ausgehende Linien sich nicht wieder schneiden können. Den Beweis des Herrn Christoffel reproducirt der Herr Verfasser, ebenso den elementareren, welcher sich in dem Lehrbuch der theoretischen Physik von Thomson und Tait (I. 234) angedeutet findet. Derselbe geht davon aus, dass auf einem einfach zusammenhängenden Flächenstück die Winkelsumme eines geodätischen n-Ecks gleich $(2n-4)\ R+C$ ist, wo C die curvatura integra des Polygons nach Gauss bezeichnet. Mithin ist diese Winkelsumme eines geodätischen Zweiecks gleich C. Da dieselbe aber nicht negativ sein kann, so giebt es geodätische Zweiecke nur auf positiv gekrümmten Flächen, oder auf solchen, welche teils positiv, teils negativ gekrümmt sind. Dagegen giebt es keine auf negativ gekrümmten Flächen, sofern sie nicht mehrfach zusammenhängend sind, wie z. B. das einschalige Hyperboloid, und da zwei unendlich nahe geodätische Linien stets auf einem einfach zusammenhängenden Flächenstück verlaufend gedacht werden können, so schneiden sich unendlich nahe von einem Punkte ausgehende geodätische Linien auf negativ gekrümmten Flächen nie. Die Hauptaufgabe,

welche sich der Herr Verfasser gestellt hat, ist nun die Untersuchung des Verhaltens positiver Flächen und zwar einfach zusammenhängender. Es ergeben sich dabei folgende Resultate: „Man kann auf jeder positiv gekrümmten Fläche zwei Arten von Punkten unterscheiden. Punkte erster Art sind so beschaffen, dass zwei von ihnen ausgehende unendlich nahe geodätische Linien sich nie zum zweiten Mal schneiden. Punkte zweiter Art dagegen sind solche, dass mindestens eine, oder gewisse, oder alle von ihnen ausgehende geodätische Linien mit der unendlich nahen einen zweiten Schnittpunkt haben." Schliesst man Singularitäten aus, so zeigt sich, dass eine positiv gekrümmte Fläche nur dann Punkte erster Art enthalten kann, wenn ihre curvatura integra kleiner als $4R$, also kleiner als die Halbkugel ist. Es muss demnach in diesem Falle die Fläche offen sein, wie das elliptische Paraboloid oder die eine Schale des zweischaligen Hyperboloids. Aber auch auf solcher Fläche sind die Punkte erster Art auf endliche Flächenstücke beschränkt; ausserhalb derselben liegen nur Punkte zweiter Art. Es kommt nun wesentlich auf die Aufsuchung der Curve an, welche diese beiden Flächengebiete von einander scheidet. In der Anwendung auf Flächen zweiten Grades gestaltet sich die Sache so: Auf einer Schale des einschaligen Rotationshyperboloids giebt es einen (reellen) Parallelkreis, innerhalb dessen die Calotte liegt, welche Punkte erster Art enthält, während die übrige sich in's Unendliche ausdehnende Zone nur Punkte zweiter Art enthält. Lässt man nun durch Verkleinerung einer der beiden gleichen imaginären Axen das Hyperboloid in ein dreiaxiges übergehen, so schnürt sich der Bereich der Punkte erster Art lemniscatenartig zusammen, doch so, dass die Nabelpunkte immer im Inneren bleiben. Nach einer gewissen Fortsetzung der Deformation erhält die Lemniscate im Scheitel einen Doppelpunkt, um dann in zwei getrennte, die beiden Nabelpunkte umgebende Teile zu zerfallen. Lässt man das Hyperboloid in ein Paraboloid übergehen, so zieht sich der Bereich der Punkte erster Art auf die beiden Nabelpunkte, beim Rotationsparaboloid auf den Scheitel zusammen. Ueber die Durchführung der Betrachtung mögen folgende Andeutungen ge-

nügen: Sind u und v geodätische Polarcoordinaten, so ist das Bogenelement ds bestimmt durch die Gleichung

$$ds^2 = du^2 + m^2 dv^2,$$

wo m eine solche Function von u und v ist, dass für $u = 0$:

$$\lim. \frac{m}{u} = \lim. \frac{\partial m}{\partial u} = 1,$$

und in Bezug auf v m periodisch mit der Periode 2π ist.

Dann ist $u = 0$ der Anfangspunkt A, die Curven $u = u_1$ sind die geodätischen Kreise mit den Radien u_1, die Curven $v = v_1$ sind die durch A gehenden geodätischen Centralen derselben, so dass v das Azimuth einer solchen darstellt. Nach bekannten Sätzen der Flächentheorie ist dann das Krümmungsmass $k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}$; die curvatura integra eines beliebigen Flächenstückes wird $-\iint \frac{\partial^2 m}{\partial u^2}\, du\, dv$, so dass diejenige eines unendlich kleinen geodätischen Sectors wird: $dv\left[1-\frac{\partial m}{\partial u}\right]_{u=u_1}$ und diejenige eines endlichen: $\int_{v_0}^{v_1} dv\left(1-\frac{\partial m}{\partial u}\right)_{u=u_1}$. Ist nun die Fläche durchweg positiv gekrümmt, so muss $\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}$ negativ sein, also $\frac{\partial m}{\partial u}$ beständig abnehmen; d. h. $\frac{\partial m}{\partial u} < 1$. Soll A ein Punkt erster Art sein, so darf m niemals Null werden; dies erfordert aber, wie leicht ersichtlich, dass $\frac{\partial m}{\partial u}$ nicht negativ wird, sondern einem Grenzwert zwischen 0 und 1 oder dem Grenzwert Null zustrebt. Wird dagegen $\frac{\partial m}{\partial u}$ für irgend ein v mit wachsendem u einmal negativ, so muss m schliesslich Null werden, und der Punkt ist sicher von der zweiten Art. Nennt man nun den Wert

$$\int_{v_0}^{v_1}\left(1-\frac{\partial m}{\partial u}\right)_{u=\infty} dv$$

die curvatura integra des Winkels $(v_1 - v_0)$, so folgt, da für einen

Punkt erster Art $\left(1-\frac{\partial m}{\partial u}\right) < 1$ bleibt, dass die curvatura integra eines Winkels stets kleiner ist als der Winkel selbst, also die curvatura integra des Winkels 2π d. h. der ganzen Fläche kleiner als 2π ist. Nur wenn diese Bedingung erfüllt ist, können Punkte erster Art existiren. Der obige Satz bietet dann aber weiter die Handhabe zu dem Beweise, dass jedenfalls auch Punkte zweiter Art existiren müssen, und dass die erster Art nur ein begrenztes Gebiet einnehmen können. Um endlich die Grenze zwischen beiden Teilen der Fläche zu ermitteln, dient die Erwägung, dass für Punkte erster Art bei jedem Azimuth $\frac{\partial m}{\partial u}$ eine feste Grenze zwischen Null und 1 erreicht, und dass diese für irgend ein Azimuth einen absoluten Minimalwert erlangt; dieser Minimalwert ist dann lediglich Function $f(xyz)$ der Coordinaten des Punktes A. Die Gleichung $f(xyz) = 0$ definirt also auf der Fläche die gesuchte Curve.

Die specielle Untersuchung der Flächen zweiten Grades geht von der Rotationsfläche aus, für welche die Untersuchung bereits in einer Arbeit des Herrn von Braunmühl durchgeführt ist (Clebsch Ann. XIV. 557-567. Ref. F. d. M. XI. 1879. 539), wobei man auf elliptische Functionen geführt wird. Für dreiaxige Hyperboloide kommt man zwar im Allgemeinen auf hyperelliptische Integrale, wenn man aber von einem der Nabelpunkte ausgeht, gehen dieselben in elliptische über. Der Herr Verfasser nimmt an verschiedenen Stellen Bezug auf die citirte Arbeit des Herrn von Braunmühl, und macht beiläufig auf den scheinbaren Unterschied aufmerksam, der dadurch entsteht, dass in jener Arbeit die geodätischen Linien als durch's Unendliche hindurch auf die andere Schale des Hyperboloids übergehend aufgefasst werden, worauf es in der vorliegenden Untersuchung nicht ankam; ausserdem weist er die Irrtümlichkeit einer Behauptung jener Arbeit nach, wie bereits in dem Referat über dieselbe erwähnt ist.

A.

NEBELUNG. Trigonometrie der Flächen mit constantem Krümmungsmass. Pr. Dortmund.

Die Entwickelung geschieht in der bekannten Weise ausgehend von geodätischen Polarcoordinaten, wie sie z. B. bei Hoppe in der Flächentheorie dargestellt ist. Für die pseudosphärischen Flächen werden die sogenannten hyperbolischen Functionen statt der gewöhnlichen trigonometrischen eingeführt. A.

H. v. MANGOLDT. Ueber eine charakteristische Eigenschaft der developpablen Flächen. Klein Ann. XVIII. 604-608.

Ist AB ein Bogen einer geodätischen Linie einer beliebigen Fläche, C ein beliebiger Punkt der Fläche, so verbinde man C mit D geodätisch, halbire den Bogen BC in M, verbinde A und M geodätisch, verlängere den Bogen AM über M geodätisch um sich selbst bis D und verbinde C und D geodätisch. Dann nennt der Herr Verfasser die Bogen CD parallel und gleich AB, weil sie es sein würden, wenn die Fläche eine Ebene wäre. Die Beziehung zwischen AB und CD ist reciprok; d. h.: Ist AB parallel und gleich CD, so ist auch CD parallel und gleich AB. Dagegen bleibt der Satz: „Sind zwei Strecken einer dritten parallel und gleich, so sind sie es unter einander." nicht allgemein gültig.

Der Herr Verfasser beweist nun, dass dieser Satz nur auf abwickelbaren Flächen gilt. Der Beweis stützt sich darauf, dass die Gültigkeit des fraglichen Satzes diejenige einer Reihe anderer Sätze der Planimetrie für die betrachtete Fläche zur Folge habe, namentlich aber den Satz, dass für die auf diesen Flächen mögliche Wahl eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Gleichung jeder geodätischen Linie linear sein muss, und umgekehrt, und dies ist, wie aus den Principien der Flächentheorie leicht erkannt werden kann, nur auf abwickelbaren Flächen möglich.

A.

A. Picart. Surfaces applicables sur des surfaces de révolution. Nouv. Ann. (2) XX. 113-120.

Der Verfasser knüpft die Untersuchung einer Reihe von Fragen an den Satz von Haton de la Goupillière, nach welchem die auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen die einzigen sind, auf welchen ein isothermes Netz existirt, das zugleich aus geodätischen Linien und deren orthogonalen Trajectorien besteht. Zuerst zeigt er, wie dieser Satz aus einer Betrachtung des Ausdrucks der geodätischen Krümmung hervorgeht. Dann bestimmt er die Rotationsfläche, auf der die geodätische Krümmung der Parallelkreise eine gegebene Function $\varphi(s)$ des Meridanbogens ist. Die Gleichung des Meridians ist

$$x = Ce^{-\int_0 \varphi(s)ds}.$$

Hieraus geht der Satz von Bour hervor, dass die Helicoide auf Rotationsflächen abwickelbar sind. Es wird die Beziehung zwischen dem erzeugenden Profil des Helicoids und dem Meridian der Rotationsfläche gesucht, dann die Rotationsfläche bestimmt, auf welcher die Schraubenfläche mit quadratischem Netze abwickelbar ist. Die Gleichung des Meridians ist von der Form der Kettenlinie. Das ist der Anlass, umgekehrt das Helicoid zu suchen, wenn der Meridian Kettenlinie ist. Die axiale Coordinate stellt sich in der radialen als elliptisches Integral dar, das in drei Fällen logarithmisch wird. H.

E. B. Elliott. Extension to curved surfaces of a former theorem on plane areas. Mess. (2) X. 156-158.

Der Verfasser giebt die Erweiterung eines Satzes auf krumme Flächen, den er im Messenger (2) VII. 150 für ebene Flächen bewiesen hatte (siehe F. d. M. X. 1878. p. 451).

Glr. (O.).

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der allgemeinen Flächentheorie von C. J. Monro, G. East-

WOOD, TOWNSEND, J. L. MCKENZIE, CH. LADD, J. W. SHARPE, G. J. GRIFFITHS, J. O'REGAN, J. LARMOR, SCHEFFER finden sich Ed. Times XXXIV. 52-53, 54, 62, XXXV. 33-34.

O.

L. SALTEL. Théorèmes généraux sur la décomposition des enveloppes. Théorème sur les surfaces développables. Bord., Mém. (3) IV. 443-451.

Bei der gewöhnlichen Methode der Bestimmung der Enveloppe einer Curven- oder Flächenschaar kommt es nicht selten vor, dass die vermeintliche Gleichung der Enveloppe einen dem Problem fremden Bestandteil enthält. Der Herr Verfasser hat diesen Umstand genauer untersucht und teilt in der vorliegenden Arbeit Methoden mit, durch welche man diese fremden Bestandteile auszuscheiden oder von vornherein zu vermeiden vermag. Wir wollen dies an einem einfachen Beispiel erläutern. Sind $p_n, p_{n-1}, \dots p_0$ gegebene Functionen der Coordinaten xy, so stellt die Gleichung

$$\text{(I.)} \qquad f(\lambda) = p_n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} \dots + p_1\lambda + p_0 = 0$$

mit dem Parameter λ eine Curvenschaar dar. Soll ein Punkt zugleich auf der unendlich nahen Curve liegen, so muss auch

$$\text{(II.)} \qquad f'(\lambda) = np_n\lambda^{n-1} + (n-1)p_{n-1}\lambda^{n-2} \dots + p_1 = 0$$

sein. Eliminirt man also λ aus (I.) und (II.), so erhält man eine notwendige Bedingung, denen die Punkte der Enveloppe genügen, aber dieselbe ist nicht hinreichend, denn die Gleichungen I. und II. werden auch erfüllt, wenn man

$$\frac{1}{\lambda} = 0, \qquad p_n = 0$$

setzt. Also enthält die Eliminationsresultante der Gleichungen (I.) und (II.) den Factor $p_n = 0$, welcher im Allgemeinen keinen Bestandteil der Enveloppe liefert. Häufig erscheint dieser Factor nur deshalb nicht in der Eliminationsresultante, weil man unberechtigter Weise durch denselben gehoben hat, obwol man dazu doch

nur berechtigt ist, wenn man schon weiss, dass er nicht Null sein darf. Um den Fehler zu vermeiden, kann man den Parameter homogen machen, also die Gleichung in der Form

$$\text{(I.')} \quad f(\lambda,\mu) = p_n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1}\mu + p_{n-2}\lambda^{n-2}\mu^2 + \cdots p_1\lambda\mu^{n-1} + p_0\mu^n = 0$$

betrachten. Soll xy der Durchschnitt einer Curve der Schaar mit der benachbarten sein, so muss er die Gleichungen

$$\text{(II'.)} \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{und} \quad \text{(III'.)} \quad \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0$$

erfüllen. Nun ist

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} = nf.$$

Sind also die Gleichungen (II'.) und (III'.) erfüllt, so ist auch (I'.) erfüllt. Ist aber (I'.) und (III'.) erfüllt, d. h. ist $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$, so folgt entweder $\frac{\partial f}{\partial \mu} = 0$ oder $\mu = 0$; d. h.: $p_n\lambda^n = 0$, und da λ und μ nicht gleichzeitig Null sein dürfen, $p_n = 0$.

Da aber im Allgemeinen für $\mu = 0$ die Gleichung (III'.) nicht erfüllt wird, welche notwendig ist, so ist eine dem Problem fremde Lösung hinein gekommen. Die Enveloppe wird also durch Elimination von $\frac{\lambda}{\mu}$ aus (II') und (III') erhalten, und es lässt sich zeigen, dass diese Bedingung im Allgemeinen hinreichend ist. Wie man sieht, handelt es sich um nichts Anderes als um die richtige Bildung der Discriminante der Gleichung (I.). In der vorliegenden Arbeit ist nun das Problem von vornherein insofern verallgemeinert, als zunächst eine Curvenschaar durch k Gleichungen zwischen x und y mit k Parametern definirt wird. Die Ausscheidung der fremden Bestandteile kann dann in analoger Weise erreicht werden, indem die Gleichungen in Bezug auf die Parameter homogen gemacht werden. Ein gleiches Verfahren wird zur Bestimmung der Enveloppen einer zweifach unendlichen Schaar von Flächen angewendet.

Wenn der Referent die Bemerkung nicht unterdrücken kann, dass es erwünscht wäre und wol möglich ist, den eigentlichen Kern der Sache deutlicher hervortreten zu lassen, als es in der Abhandlung geschehen ist, so soll dies doch keineswegs die

Bedeutung der von dem Herrn Verfasser gefundenen interessanten Resultate herabsetzen.

An diese Untersuchung schliesst sich ein kurzes Theorem für abwickelbare Flächen, durch welches die Aufsuchung der gewöhnlichen Singularitäten einer abwickelbaren Fläche auf die Aufsuchung derjenigen einer einfach damit zusammenhängenden ebenen Curve reducirt wird. A.

G. E. A. Brunel. Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à n dimensions. Klein Ann. XIX. 37-56.

Es werden in der vorliegenden Arbeit unter Benutzung der von den Herren C. Jordan und d'Ovidio entwickelten Grundlagen einige allgemeine Eigenschaften der Curven in einer mehrfach ausgedehnten Mannichfaltigkeit untersucht, so dass der Zweck der Untersuchung derselbe ist, welchen Herr R. Hoppe in seiner Arbeit über dreifach gekrümmte Curven und deren Parallelen (Grunert Arch. LXIV, 373-385, s. F. d. M. XII. 1880. 586) verfolgt. Dass hierbei von einer n-fachen Mannichfaltigkeit, einer linearen n-Dehnung nach Hoppe'scher Bezeichnung, ausgegangen ist, während Herr Hoppe eine Vierdehnung zu Grunde legt, macht keinen wesentlichen Unterschied, da Herr Hoppe in seiner Arbeit selbst zeigt, wie sich der Uebergang von einer Dimension zur nächst höheren in einer leicht übersehbaren Reihe darstellt.

Von besonderem Interesse ist eine specielle Anwendung am Schluss, nämlich diejenigen Curven einer linearen n-Dehnung zu suchen, welche in allen ihren Punkten dieselben Radien der 1ten, 2ten, $3^{\text{ten}}, \dots n^{\text{ten}}$ Krümmung haben; also die Reihe derjenigen Curven, welche in der Zweidehnung (Ebene) als Kreis, in der Dreidehnung (Raum) als Schraubenlinie bezeichnet werden.

Die Darstellung ist klar und übersichtlich.

A.

H. Paulli. Relationer mellem Krummings- og Torsions-Radier til en vindskjäv Kurve og dens sfäriske Indikatricer. Zeuthen T. (4) V. 86-87.

Wenn ϱ und P, r_1 und R_1, r_2 und R_2 die Radien der Krümmung und der Torsion bezw. für eine Raumcurve und die Indicatrix, ebenso dv, dw und du Contingenzwinkel, Torsionswinkel und die Winkel zweier consecutiver Hauptnormalen, und $d\varrho$, $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ Bogenelemente bezeichnen, so gelten die folgenden Relationen

$$\frac{1}{r_1^2} = 1+\left(\frac{\varrho}{P}\right)^2, \quad \frac{1}{r_2^2} = 1+\left(\frac{P}{\varrho}\right)^2,$$

$$\frac{1}{R_1} = \varrho\,\frac{d\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{\varrho}{P}\right)}{ds}; \quad \frac{1}{R_2} = P\,\frac{d\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{\varrho}{P}\right)}{ds}$$

und

$$\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}.$$

Gm.

A. Enneper. Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung. Gött. Nachr. 1881. 291-301.

Die rectificirende Fläche einer Raumcurve ist bekanntlich nach Lancret diejenige abwickelbare Fläche, welche von der rectificirenden Ebene der Curven eingehüllt wird, also von derjenigen Ebene, die durch den veränderlichen Curvenpunkt lotrecht zur Hauptnormale gelegt ist. Ist die Raumcurve kürzeste Linie einer Fläche, so ist die rectificirende Ebene die Tangentialebene der Fläche. Ist die Raumcurve kürzeste Linie einer abwickelbaren Fläche, so ist die rectificirende Fläche die abwickelbare Fläche selbst. Hieraus folgt, dass sich durch jede Raumcurve nur eine abwickelbare Fläche legen lässt, für welche die Raumcurve Kürzeste ist, nämlich die rectificirende Fläche. Wird die rectificirende Fläche in die Ebene abgewickelt, so geht die Raumcurve in eine Gerade über.

Von diesen Betrachtungen ausgehend, sucht der Herr Ver-

fasser für die Kürzesten bestimmter Klassen von abwickelbaren Flächen die Beziehungen zwischen Krümmungsradius ϱ, Torsionsradius r und Bogen s auf. Für geodätische Linien conischer Flächen ist $\frac{\varrho}{r} = gs + h$, wo g und h Constante bedeuten, wie dies der Herr Verfasser schon früher bewiesen hat. Für cylindrische Flächen wird $g = 0$, also $\frac{\varrho}{r} = h$, was Herr Bertrand zuerst gefunden hat. Hat die Wendungscurve der abwickelbaren Fläche constante Krümmung, so gilt für ihre geodätischen Linien die Gleichung

$$a^2\left[1+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2\right]=\left[b\left(\frac{\varrho}{r}\right)-s+c\right]^2,$$

wo a, b, c Constante sind. Nennt man ε und u den Krümmungs- und den Torsionswinkel, so dass $d\varepsilon = \frac{ds}{\varrho}$; $du = \frac{ds}{r}$ ist, und setzt man $\frac{\varrho}{r} = \operatorname{tg} u$; $\frac{du}{ds} = u'$, so kann man diejenigen abwickelbaren Flächen betrachten, deren Wendungscurve die Bedingung erfüllt

$$\frac{\cos p}{\varrho_1} + \frac{\sin p}{r_1} = \frac{1}{a},$$

wo p und a Constante sind, während ϱ_1 und r_1 Krümmungsradius und Torsionsradius der Wendungscurve bedeuten. Diese Gleichung drückt nach Herrn de Saint-Venant die Bedingung aus, dass die Hauptnormalen der Wendungscurve zugleich Hauptnormalen einer zweiten Curve sind. Dann wird die Bedingung für die Kürzesten der abwickelbaren Flächen

$$\frac{\cos p}{\cos u} + \operatorname{tg} u(\varepsilon \sin p - b) - (u \sin p - c) = \frac{s}{a}.$$

Hierin sind die betrachteten Fälle als Specialfälle enthalten. Andere Specialfälle sind folgende: Hat die Wendungscurve constante Torsion, so ist

$$\frac{\varrho}{r}(\varepsilon - b) - (w - c) + \frac{s}{a} = 0.$$

Ist die Wendungscurve eine beliebige Helix, d. h. kürzeste Linie auf beliebiger Cylinderfläche, so wird

$$(\varepsilon \sin p - b)^2 + (w \sin p - c)^2 = \cos^2 p,$$

woraus noch specieller die Bedingung hergeleitet werden kann für den Fall, dass die Wendungscurve eine gewöhnliche Schraubenlinie wird. Es möge darauf hingewiesen werden, dass diese Untersuchungen in nahem Zusammenhange mit gewissen Untersuchungen in Hoppe's Curventheorie stehen. A.

A. Enneper. Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung. Klein Ann. XIX. 72-84.

Der erste Teil dieses Aufsatzes enthält die Resultate der unter gleichem Titel in den Gött. Nachr. p. 291-301 veröffentlichten Arbeit. (Vergl. das vorige Referat).

Der zweite Teil behandelt die Frage: „Welche Curve kann gleichzeitig die Helix einer cylindrischen und einer conischen Fläche sein?" (Unter der Helix ist eine Curve verstanden, welche die erzeugenden Geraden unter constantem Winkel schneidet), welche der Herr Verfasser schon früher (Gött. Nachr. 1866) behandelt hatte. Es ergeben sich hierbei folgende Resultate: „Ist C eine Curve des länglichen Rotationsellipsoids, eines zweischaligen Rotationshyperboloids oder eines Rotationsparaboloids, deren Tangenten mit Parallelen zur Rotationsaxe einen constanten Winkel bilden, so schneidet C auch die Erzeugenden einer conischen Fläche durch C unter einem constanten Winkel, deren Spitze einer der Brennpunkte des Meridiankegelschnitts ist. Die Projection der Curve C auf eine Ebene senkrecht zur Axe ist beim Ellipsoid eine Epicycloide, beim Paraboloid eine Kreisevolvente. Einen Grenzfall bildet der gerade Kreiskegel; die Projection der Helix auf eine zur Axe senkrechte Ebene wird in diesem Falle eine logarithmische Spirale. A.

E. Hunyady. Sur la détermination du cercle osculateur d'une courbe à double courbure. Nouv. Ann. (2) XX. 53-55.

Das Gleichungssystem, welches den Krümmungskreis bestimmt, wird durch eine Determinantenrechnung aufgelöst.

H.

F. Schiffner. Ueber eine Raumcurve mit einem asymptotischen Punkte und deren Tangentenfläche. Hoppe Arch. LXVI. 207-215.

Die untersuchte Curve entsteht, wenn ein Punkt sich um eine feste Gerade A dreht, und die Entfernung desselben von der Drehungsaxe sowohl, als auch von einer zu ihr senkrechten Ebene mit dem Drehungswinkel w umgekehrt proportional ist. Nimmt man A als Axe der z, so sind die Gleichungen der Curve, mit w als unabhängiger Variabele:

$$x=\frac{a}{w}\cos w,\quad y=\frac{a}{w}\sin w,\quad z=\frac{b}{w}\cdot$$

Der Anfangspunkt ist ihr asymptotischer Punkt, wie aus den Projectionen auf die drei Coordinatenebenen hervorgeht. (Vergl. die Arbeit des Verfassers über asymptotische Punkte p. 203 desselben Bandes und das Referat Abschn. IX. Cap. 2. A. p. 526.).

Rg.

R. Hoppe. Das Aoust'sche Problem in der Curventheorie. Hoppe Arch. LXVI. 386-396.

Das Problem, gestellt und behandelt von Aoust in Bull. S. M. F. VII. 143 (s. F. d. M. XI. 1879. p. 550), ist: Eine Curve derart zu finden, dass, wenn man von der Einhüllenden der Krümmungsaxe wieder die Einhüllende der Krümmungsaxe nimmt, letztere der Urcurve congruent wird. Die Richtungen der Tangente, Haupt- und Binormale sind in den entsprechenden Punkten beider Curven bedingungslos dieselben; daher reducirt sich das Problem darauf, ihre Bogenelemente gleich zu machen. Auf dem Wege der Herleitung der Bedingungsgleichung ergiebt sich die Relation der laufenden Coordinaten beider Curven, aus der die Bedingung, unter der sie zu-

sammenfallen, als Gleichung dritter Ordnung hervorgeht. Diese wird ausschliesslich von allen Curven constanter Krümmung erfüllt, welche sonach eine singuläre oder specielle Lösung des Problems bilden. Die allgemeine Bedingung ergiebt sich in der Form:

$$\frac{\partial^4 s'}{\partial \vartheta^4} + \left(1 + \frac{\partial \tau^2}{\partial \vartheta^2}\right)\frac{\partial^2 s'}{\partial \vartheta^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}\,\frac{\partial^2 \tau}{\partial \vartheta^2}\left(\frac{\partial^3 s'}{\partial \vartheta^3} + \frac{\partial s'}{\partial \vartheta}\right) = 0,$$

wo τ und ϑ den Krümmungs- und Torsionswinkel, $s' = \partial s : \partial \tau$ den Krümmungsradius bezeichnen. In diesem Resultate treffen beide Arbeiten auf verschiedenen Wegen zusammen. Ihre allgemeine Lösung ist

$$(9) \qquad \frac{\partial s'}{\partial \vartheta} = al + bm + cn,$$

wo l, m, n die Richtungscosinus der Binormale einer beliebigen Curve, zu der τ und ϑ gehören, a, b, c Integrationsconstante bezeichnen. Sie ist vollkommen explicit; nämlich l, m, n sind willkürlich; daraus lassen sich τ und ϑ, sowie die Richtungscosinus der Tangente f, g, h direct berechnen; ∂s folgt aus (9), und x, y, z gemäss $x = \int f . \partial s$, etc. Obgleich nun Aoust die Gleichung (9) entdeckt hat, betrachtet er dieselbe nur als Transformation des Problems, wodurch dasselbe auf die im Allgemeinen nicht integrabele Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt würde, welche l, m, n als Functionen von ϑ bestimmt. Dabei hat er stillschweigend τ als gegebene Function von ϑ vorausgesetzt, was sie den Worten des Problems zufolge nicht ist. Im Gegenwärtigen folgen drei Beispiele, welche die Werte von l, m, n aus verschiedenen speciellen Curven entnehmen.

H.

H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. Résal J. (3) VII. 375-422.

H. Poincaré. Sur les courbes définies par les équations différentielles. C. R. XCIII. 951-952.

Sind x, y die Coordinaten eines Punktes in der Ebene, so wird die Relation zwischen ihnen

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

wo X und Y Polynome in x, y bezeichnen, durch eine Schaar ebener Curven dargestellt. Diese Curven werden hier, zur Vermeidung unendlich ferner Punkte, central auf eine Kugel projicirt. Sie heissen Charakteristiken, und von einem Punkte an nach beiden Seiten gerechnet, Halbcharakteristiken. Wenn eine von beiden die algebraischen Cykel (d. i. geschlossene sphärische Curven) nur in endlicher Zahl von Punkten schneidet, so ist die Charakteristik, wofern sie keine Doppel- und Rückkehrpunkte hat, ein Cykel. Nach mehreren Definitionen und Anordnungen werden die Charakteristiken discutirt, und folgende Sätze aufgestellt: „Jedes System von Charakteristiken lässt singuläre Punkte zu.“ „Ein unendlich kleiner Cykel, der in seinem Innern keinen singulären Punkt enthält, hat 0 zum Index, ein solcher, der einen enthält, ± 1.“ „Index ist die halbe Differenz der Anzahlen der Sprünge von $\frac{X}{Y}$ aus $-\infty$ nach $+\infty$ und aus $+\infty$ nach $-\infty$ bei Durchlaufung eines Cykels in positivem Sinne.“ „Die Anzahl der Berührungen eines algebraischen Cykels, der keine Eckpunkte noch Berührungen höherer Ordnung mit einer Charakteristik hat, und der durch keinen singulären Punkt geht, ist immer endlich und grade.“ „Kann man zwischen zwei Punkten der Kugel einen Bogen ohne Berührung ziehen, so kann man auch zwischen ihnen einen algebraischen Bogen ohne Berührung ziehen.“ „Ist AB ein algebraischer Bogen ohne Berührung, und sind AA_1 und BB_1 Bogen von Charakteristiken, so kann man zwischen A_1 und B_1 einen Bogen ohne Berührung ziehen.“ „Sind AB und A_1B_1 zwei Charakteristiken, und AA_1 und BB_1 zwei algebraische Bogen, die erstere nur in A, B, A_1 oder B_1 schneiden, so sind die Anzahlen der Berührungen von AA_1 und BB_1 von gleicher Parität.“ „Wird ein Charakteristikenbogen, der durch keinen singulären Punkt geht, von einem Curvenbogen subtendirt, ist die Anzahl der Berührungen dieses Bogens ungrade.“

In der zweiten Arbeit deutet der Verfasser eine ähnliche Behandlung der allgemeinen Gleichung $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ an, indem er $x, y, \frac{dy}{dx}$ zu Functionen der drei Coordinaten eines Punktes macht. Er lässt dann obige Gleichung die Charakteristiken auf einer ausserdem angenommenen Fläche bestimmen.

H.

H. Résal. Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite. Résal J. (3) VII. 109.

In Bezug auf die gleichlautende Arbeit des Herrn Verfassers (Liouville J. (3). VI. 115-129, siehe F. d. M. XII. 1880. 589) hatte Herr Catalan die Priorität für einzelne Resultate beansprucht, welche der Verfasser anerkennt, indem er zugleich darauf hinweist, dass die Idee bereits von Herrn Sturm herrühre, und dass ferner ein anderes Resultat seiner Arbeit bereits von Bonnet ausgesprochen sei.

A.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

E. Picard. Sur les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres. C. R. XCII. 1495-1498.

Das Geschlecht einer Fläche n^{ter} Ordnung ist nach Clebsch die Anzahl der Coefficienten, welche in einer durch die Doppelcurve gehenden Fläche $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung willkürlich bleiben. Es wird gegenwärtig angenommen, dass eine Fläche n^{ter} Ordnung keine andern Singularitäten hat, als Doppelcurven, dass ferner in jedem Punkte der Doppelcurve die beiden Berührungsebenen distinct sind, und dass die Coordinaten eines beliebigen Punktes

auf ihr durch Abel'sche Functionen zweier Parameter ausgedrückt werden können, und bewiesen, dass alsdann das Geschlecht nicht grösser als 1 sein kann. H.

Pepin. Sur les surfaces osculatrices. Résal J. (3) VII. 71-108.

Soll eine beliebige Fläche in jedem Punkte von einer Fläche m^{ten} Grades in n^{ter} Ordnung osculirt werden, so nämlich, dass alle disponibeln Coefficienten durch die Forderung selbst, nicht durch anderweite Bedingungen bestimmt werden, so muss

$$m^3+6m^2+11m = 3(n+1)(n+2)$$

sein. Um zu untersuchen, welche Lösungen ausser den bekannten, $m = 1$ und 5, möglich sind, unterscheidet der Verfasser zuerst, ob m den Factor 3 hat oder nicht. Ist m prim zu 3, so wird bewiesen, dass

$$m = 1, \quad n = 1;$$
$$m = 5, \quad n = 9;$$
$$m = 20, \quad n = 58$$

die einzigen Lösungen sind. Im andern Falle führt eine sehr langwierige Discussion durch successive Ausschliessung möglicher Formen zu dem Ergebnis: Für $m < 675$ und $n < 13000$ existirt keine Lösung. H.

G. Darboux. Détermination des lignes de courbure de toutes les surfaces de quatrième classe, corrélatives des cyclides, qui ont le cercle de l'infini pour ligne double. C. R. XCII. 29-31.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien wird durch eine Substitution befriedigt, welche die Differentiale auf zwei Parameter reducirt. Nach Elimination des einen und der Differentialquotienten erhält man die Gleichung der Krümmungslinien. Das Resultat, welches der Verfasser mit einer Abhandlung von Laguerre in Verbindung bringt, wird folgendermassen ausgesprochen. Die Fläche 4ter Klasse, correlativ zur Fläche mit

Doppelkegelschnitt, welche den unendlich fernen Kreis zur Doppellinie hat, lässt sich auf vier verschiedene Arten als antikaustisch für Refraction bezüglich auf parallele auf eine Fläche 2ten Grades fallende Strahlen betrachten. Die vier entsprechenden Flächen 2ten Grades sind homofocal; sie gehen durch die vier Doppelkegelschnitte der Fläche 4ter Klasse und sind bei jeder Art der Erzeugung der Lichtstrahlen normal zur Ebene des entsprechenden Doppelkegelschnitts. Man kann den Satz auch in folgender Form aussprechen. Die obige Fläche 4ter Klasse lässt sich auf vier verschiedene Arten als Enveloppe der Kugeln betrachten, deren Mittelpunkte auf einer Fläche 2ten Grades liegen, und die eine feste Ebene unter constantem Winkel schneiden.

H.

C. F. Geiser. Ueber die dreifachen Secanten einer algebraischen Raumcurve. Chelini, Coll. Math. 294-307.

Die Formel für die Zahl der dreifachen Secanten einer algebraischen Raumcurve wird hier durch eine Ueberlegung gewonnen, die wesentlich auf dem von Herrn Schubert zuerst als Princip der Erhaltung der Anzahl formulirten Grundsatze beruht. Der Verfasser ermittelt zuerst die Zahl der dreifachen Secanten des vollständigen Schnittes einer F_n mit einer F_1, F_2 und F_3 und leitet daraus den Fall F_n, F_m her. Eine einfache Betrachtung zeigt dann, wie das erhaltene Resultat auf unvollständige Schnittcurven ausgedehnt werden kann, sowie die Modificationen, welche eintreten, wenn wirkliche vielfache Punkte auf der Curve vorhanden sind.

V.

C. Stéphanos. Sur certaines directions de transversales des courbes algébriques qui correspondent aux directions des axes des coniques. S. M. F. Bull. IX. 49-56.

Als Axenrichtungen einer ebenen algebraischen Curve n^{ter} Ordnung hat man bekanntlich nach Steiner diejenigen anzusehen, für welche das Product der Segmente auf einer durch einen

Punkt gehenden Secante, ein Maximum, Minimum wird. Für $n = 2$ stehen dieselben auf einander senkrecht. Der Verfasser untersucht nun, unter welchen Umständen überhaupt metrische Beziehungen für die Axenrichtungen stattfinden. Aus den Sätzen: „Eine binäre Form a_x^{2m+1} ist nur auf eine Art Functionaldeterminante einer quadratischen und einer Form $(2m+1)^{\text{ten}}$ Grades.“ und „Eine binäre Form a_x^{2m} ist nur dann Functionaldeterminante einer quadratischen Form α_x^2 und einer Form $2m^{\text{ten}}$ Grades G, wenn $(\alpha a)^{2m} = 0$ ist, gehört dann aber zu allen Formen der Schaar $G+\lambda(\alpha_x^2)^m$.“ ergiebt sich nun, dass nur für ein grades n eine solche metrische Beziehung statt hat, welche für $n = 2$ in die oben erwähnte übergeht. V.

GENTY. Étude sur les courbes gauches unicursales. S. M. F. Bull. IX. 115-162.

Unter Zugrundelegung homogener Coordinaten werden die einläufigen (rationalen) Raumcurven m^{ten} Grades durch die Gleichungen

$$x:y:z:w = f_1:f_2:f_3:f_4$$

definirt, wo die f ganze rationale Functionen m^{ten} Grades sind. Es werden in bekannter Weise die allgemeinen Eigenschaften dieser Curven besprochen, namentlich die, dass die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ ist. Dann wird die Zahl der Bedingungen festgestellt, durch welche eine solche Curve bestimmt ist. Eine Curve m^{ten} Grades ist bekanntlich durch $2m$ beliebige Punkte bestimmt, doch so, dass dieselbe in gewissen Fällen unbestimmt oder unmöglich werden kann. Weiter werden die Bedingungen für die Existenz eines Doppelpunktes, eines dreifachen und eines Rückkehrpunktes aufgestellt, ebenso die Bedingung für das Schneiden mit einer Geraden, für das Berühren derselben u. s. w. Durch Betrachtung der Tangenten wird die Klasse gleich $2(m-1)$, durch Betrachtung der Osculationsebene die Zahl der scheinbaren Wendepunkte gleich $3(m-2)$ bestimmt. [illegible]n reiht sich die Aufsuchung der eigentlichen Wendepunkte, für

welche drei consecutive Punkte in einer Geraden liegen. Eine durch die Wendetangente und den unendlich nahen Curvenpunkt gelegte Ebene ist eine stationäre Osculationsebene und zwar eine solche, welche in der Zahl der stationären Ebenen überhaupt, d. h. der Ebenen, welche vier consecutive Punkte der Curve enthalten, doppelt zählt. Des Weiteren werden die Bedingungen für mehrpunktige osculirende Ebenen aufgestellt und dann die osculirende abwickelbare Fläche behandelt. Daran schliesst sich die Bestimmung der Maximalzahl der wirklichen Doppelpunkte. Es ergiebt sich dafür entweder $\frac{(m-2)^2}{4}$ oder $\frac{(m-1)\,(m-3)}{4}$, je nachdem m grade oder ungrade ist. Zuletzt werden homographische Teilungen auf den betrachteten Curven und ihre Erzeugnisse besprochen. Den einzelnen Abschnitten sind allerlei specielle Beispiele zugefügt; die Darstellung ist einfach und übersichtlich, so dass die Arbeit zur Einführung in den Gegenstand wohl geeignet ist. A.

C. STÉPHANOS. Sur une configuration remarquable de cercles dans l'espace. C. R. XCIII. 578-580, 633-636.

Der Verfasser geht aus von den zwei Sätzen: I. „Die Ordnung des Systems von Gleichungen, welche die zehn Determinanten

$$p_{ij} = \lambda'_i\lambda''_j - \lambda'_j\lambda''_i, \qquad \begin{pmatrix} i=1,\dots 5 \\ j=1,\dots 5 \end{pmatrix}$$

unter einander verbinden, ist gleich 5." II. „Wenn die fünf Relationen

$$p_{lm}p_{kn} + p_{mk}p_{ln} + p_{kl}p_{mn} = 0$$

zwischen den zehn Grössen $p_{ij} = -p_{ji}$ durch vier Systeme von Werten p'_{ij}, p''_{ij}, p'''_{ij}, p''''_{ij} erfüllt sind, so erfüllt sie auch ein fünftes System, das durch lineare Zusammensetzung

$$p^V = \mu'p' + \mu''p'' + \mu'''p''' + \mu''''p''''$$

aus den vier vorigen hervorgeht." Dies wendet der Verfasser auf Kugeln im Raume an. Aus II. folgt: „Mit jedem System von vier Kreisen im Raume ist ein fünftes verbunden, dessen Coordi-

naten aus den entsprechenden Coordinaten jener vier linear zusammengesetzt sind." und von den so gebildeten Pentacykeln gilt: „So oft vier Kreise einem linearen Complex angehören, gehört der mit ihnen das Pentacykel bildende Kreis zu demselben Complex. Sechs lineare Kreiscomplexe haben fünf Kreise eines Pentacykels gemein. Sind vier Kreise gegeben, so findet man den fünften als den gemeinsamen Schnitt dreier Kugeln." Eine Configuration, wie sie hier betrachtet wird, besteht aus fünfzehn Kreisen, die zu je drei auf fünfzehn Kugeln liegen, indem immer zwei Kreise auf derselben Kugel liegen, so oft ihre Symbole keinen gemeinsamen Index haben. Die fünfzehn Kreise lassen sich in sechs Pentacykel gruppiren; in jedem haben die Symbole einen gemeinsamen Index. Es wird dann eine grössere Anzahl Eigenschaften dieser Configurationen mitgeteilt. H.

F. Folie et C. le Paige. Note sur les courbes du troisième ordre. Belg. Bull. (3) I. 611-613.

Bericht über eine grössere Arbeit, die demnächst veröffentlicht werden wird. Mn. (O.).

W. Spottiswoode. On the forty-eight coordinates of a cubic curve in space. Lond. Phil. Trans. CLXXII.

Der Verfasser hat in den Proc. L. M. S. X. 185-196 (siehe F. d. M. XI. 1879. p. 553) die Formen der 18 oder 21 Coordinaten eines Kegelschnitts im Raume aufgestellt, entsprechend den sechs Coordinaten einer Geraden im Raume, und hat dabei die identischen Gleichungen zwischen diesen Coordinaten angegeben. In der vorliegenden Arbeit giebt der Verfasser dieselben Untersuchungen für eine Curve dritten Grades. Eine solche Curve kann als der Schnitt zweier Flächen zweiten Grades mit einer gemeinsamen Erzeugenden angesehen werden, und das Resultat der Elimination einer der Variabeln aus zwei quadratischen Gleichungen, die dieser Bedingung genügen, ist vom dritten Grade. Die Zahl der Coefficienten, die so entstehen, ist $4 \times 10 = 40$.

Es ergiebt sich aber, dass diese 40 Grössen passend durch 48 andere ersetzt werden können, welche dann als die Coordinaten der Curve dritten Grades betrachtet werden können. In der Tat ist klar, dass die eben erwähnten Gleichungen, welche aus der Elimination der Variabeln hervorgehen, rational transformirt werden können in Gleichungen, wie $UP' - U'P = 0$, wo U, U' quadratisch, P, P' lineare Functionen der Variabeln sind, die nach der Elimination bleiben. Die 48 Coordinaten bestehen dann aus den 24 Coefficienten der U-Function (den U-Coordinaten) und den 24 Coefficienten der vier Functionen U' (den U'-Coordinaten). Diese umfassen die Coefficienten der Formen P, P'; die ganze Zahl der Coordinaten ist daher $24 + 24 = 48$. Die Zahl der in der Arbeit aufgestellten identischen Gleichungen ist 34. Aber die U-Coordinaten stellen sich selbst durch Verhältnisse allein, ebenso wie die U'-Coordinaten dar, so dass die Zahl der unabhängigen Coordinaten $48 - 34 - 2 = 12$ ist, wie es bekanntlich sein muss.

Cly. (O.).

E. Bertini. Sulle curve razionali di 5⁰ ordine.
Chelini, Coll. Math. 313-327.

Eine rationale Raumcurve fünfter Ordnung C_5 ohne Doppelpunkte kann durch eine quadratische Transformation in eine rationale Curve vierter Ordnung übergeführt werden. Ist diese Curve nicht eben, so hat die C_5 eine und nur eine sie in vier Punkten schneidende Secante. Ist dagegen jene Curve vierter Ordnung eben, so hat die C_5 unendlich viele sie in vier Punkten schneidende Secanten, welche alle Erzeugende eines Hyperboloids sind. Hiernach teilt der Herr Verfasser diese Curven R_5 in solche erster Art $C_5{}^I$ und solche zweiter Art $C_5{}^{II}$. Er beschäftigt sich genauer mit den Curven der ersten Art, und zwar erstreckt sich die Untersuchung hauptsächlich auf zwei Fragen. Erstens wird die Fläche S untersucht, welche der Ort der dreifach schneidenden Secanten (Trisecanten) einer $C_5{}^I$ ist. Diese Fläche S ist vom Geschlecht Null und hat die vierfach schneidende Secante als vierfache Gerade und die $C_5{}^I$ als dreifache Curve in sich.

Zweitens werden die Kegelschnitte behandelt, welche die $C_5{}^f$ in fünf Punkten schneiden. Es zeigt sich zunächst, dass durch jeden Punkt des Raumes ein solcher Kegelschnitt geht, welcher zu einer Trisecante gehört, und dass die Ebenen aller solcher Kegelschnitte, welche zu einer Trisecante gehören, durch denselben Punkt der Quadrisecante gehen. Aehnliche Eigenschaften werden noch in grösserer Zahl aufgedeckt. A.

A. Brill. Ueber algebraische Raumcurven, welche die Gestalt einer Schlinge haben. Klein Ann. XVIII. 95-98.

Der Herr Verfasser führt die Gleichungen von rationalen Raumcurven 5ter, 6ter und 10ter Ordnung an, welche in sich selbst mehrfach verschlungen sind, und giebt damit, wie es scheint, die ersten analytischen Beispiele für diesen Fall, der neuerdings mehrfach durch der Analysis situs angehörige Untersuchungen erörtert worden ist. V.

Björling. Modelle von Raumcurven- und Developpablen-Singularitäten. Lund. Gleerup.

Ein Punkt O eines algebraischen Raumcurvenzweiges wird charakterisirt durch drei ganze Zahlen l, m, n, von welchen die erste (zweite, dritte) angiebt, wieviel Punkte der Zweig mit einer willkürlichen, einer Berührungs-, der Schmiegungs-Ebene in O gemein hat. Je nachdem einer dieser Indices ungrade (u) oder grade (g) ist, durchdringt der Zweig die betreffenden Ebenen oder nicht. Hiernach sind acht Fälle zu unterscheiden:

1) $(u\ g\ u)$, 2) $(u\ g\ g)$, 3) $(u\ u\ g)$, 4) $(u\ u\ u)$,
5) $(g\ u\ g)$, 6) $(g\ u\ u)$, 7) $(g\ g\ u)$, 8) $(g\ g\ g)$.

Diese acht Formen sind in den Modellen repräsentirt, jede von ihrem einfachsten Typus. Die Curven sind durch ihre Tangenten in Form von Fäden dargestellt. Die Modelle der Developpablen sind nach den Bezeichnungen von Cayley uud Salmon charakterisirt. A.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

G. von Escherich. Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes. Leipzig. B. G. Teubner.

Der Name „Analytische Geometrie“ wird in heutiger Zeit in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht. Eigentlich sollte man darunter nur die allgemeine analytische Grundlage für die Untersuchung geometrischer Probleme verstehen, so dass der wesentliche Inhalt derselben wäre: Die Lehre von den Coordinaten, die allgemeine Curven- und Flächentheorie und gewisse damit zusammenhängende allgemeine Untersuchungen. Statt dessen wird sehr häufig dieser Name für eine viel speciellere Disciplin angewendet, welche, sich auf algebraische Gebilde beschränkend, den Zusammenhang der einfacheren Gebilde dieser Art mit complicirteren untersucht und so das Gebiet der neueren synthetischen Geometrie mit den Hülfsmitteln der Rechnung, speciell der Algebra betrachtet. Und doch ist diese Disciplin eine wesentlich synthetische, da sie nicht, wie es im Character der analytischen Forschung liegt, einen allgemeinen Begriff analysirend vom Allgemeinen auf das Specielle übergeht, sondern von einem speciellen Gebilde aufsteigend andere Gebilde weniger einfacher Art betrachtet. Dass die rechnende Behandlungsweise keinen wesentlichen Unterschied ausmache, hat u. A. Steiner in der Vorrede zu seiner „Systematische Entwickelungen“ ausgesprochen. Nach Ansicht des Referenten müsste eine solche Disciplin etwa als „Rechnende synthetische Geometrie“ bezeichnet werden. Denn man kann wohl nicht leugnen, dass durch eine nicht ganz correcte Bezeichnung der Sache bei denjenigen, welche in die Wissenschaft eingeführt werden, leicht bedenkliche Missverständnisse entstehen, namentlich wenn sie die Mathematik als Hülfsstudium zu practischen Zwecken treiben.

Auch das vorliegende Buch gehört zu denen, welche nach Ansicht des Referenten den Namen „Analytische Geometrie“ nicht mit Recht führen. Freilich liegt es dem Referenten fern, aus diesem Umstand, der eine ganz allgemeine Erscheinung unserer

Zeit ist, dem Herrn Verfasser speciell einen Vorwurf machen zu wollen. Doch glaubt er, auch diese Gelegenheit benutzen zu müssen, um für eine correctere Bezeichnung der mathematischen Disciplin ein gutes Wort einzulegen.

Abgesehen von diesem Einwande gegen die Bezeichnung des Werkes kann dasselbe aber als eine wohl gelungene Einführung in das Gebiet der algebraischen Geometrie bezeichnet werden, und es muss namentlich als ein Vorzug hervorgehoben werden, dass der Herr Verfasser die rechnenden Betrachtungen mit den rein geometrischen fortwährend in lebendiger Verbindung erhält.

Das Werk besteht aus zwei Abschnitten, von denen der erste die einfachen Coordinatensysteme, die Elementargebilde und die sich durch ihre Betrachtung ergebenden weiteren metrischen Coordinatensysteme behandelt. Dieser Abschnitt zerfällt in fünf Capitel. Das erste derselben behandelt das Parallelcoordinatensystem und die rechtwinkligen Coordinaten, sowie die räumlichen Polarcoordinaten und die einfachsten Anwendungen dieser Systeme. Im zweiten Capitel wird die Ebene und die lineare Gleichung untersucht. Hier kann nur die Art, wie die unendlich entfernte Ebene in die Betrachtung gezogen wird, in begrifflicher Hinsicht nicht befriedigen (Seite 24). Es wird nämlich die unendlich entfernte Ebene durch die widersprechende Gleichung

$$0.x+0.y+0.z+D=0$$

definirt, und diese an sich vollständig gegenstandslose Definition wird dann durch einige Erläuterungen plausibel gemacht. Eine solche Darstellung muss auf den Anfänger vollkommen verwirrend wirken und ihn wohl gar auf den Gedanken bringen, als sei es hier mit dem streng logischen System des mathematischen Gedankens zu Ende, und als werde hier ein mystischer Sprung in das Transcendentale gemacht, worin ja heut zu Tage Mancher den Anfang der sogenannten „höheren" Mathematik sucht. Derartige Verirrungen und Verwirrungen bei Anfängern zu verhüten, sollte aber jeder mathematische Schriftsteller vor Allem beflissen sein. Handelt es sich doch in der Tat bei dem Namen „unendlich entfernte Punkte, Gerade und unendlich entfernte Ebene" nur um abgekürzte Bezeichnungen; und wenn man sich nicht vielfach

ängstlich scheute, mit dem Grundgedanken der Analysis, dem Functionsbegriff, in der „analytischen“ Geometrie zu operiren, so würde man zu gar keiner Schwierigkeit kommen. Denn es lässt sich ohne jede Schwierigkeit beweisen, dass die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + D = 0$$

in's Unendliche rückt, wenn α, β, γ nach irgend einem Gesetze gleichzeitig unendlich klein werden, während D endlich bleibt, ebenso dass im gleichen Falle das Ebenenbüschel

$$(ax + by + cz + d) + \lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z + D) = 0$$

in das Büschel von Ebenen parallel der Ebene

$$(ax + by + cz + d) = 0$$

übergeht u. s. w. Durch derartige Grenzbetrachtungen würde sich die Grundlage für die perspectivische Auffassung unendlich ferner Gebilde ohne jeden Zwang, rein aus der Natur der Sache heraus entwickeln lassen.

Das dritte Capitel des ersten Abschnittes führt in die Betrachtung der Ebenencoordinaten durch die Gleichung eines Punktes ein und deckt das Gesetz der Reciprocität in seinen fundamentalen Beziehungen auf. Das vierte behandelt die Gerade zunächst in elementarer Weise, worauf das fünfte Capitel in die Plücker'schen Liniencoordinaten einführt, die Complexe ersten Grades und die speciellen Complexe, sowie die Congruenzen der Complexe behandelt. Man wird aus dieser kurzen Inhaltsangabe den leitenden Gedanken des Herrn Verfassers erkennen. Einfacher, übersichtlicher und ästhetisch befriedigender möchten wohl in keinem Werke die Elementargebilde der Geometrie entwickelt sein, als in dem vorliegenden. Auch dies möchte Referent als einen Vorzug hervorheben, dass in dem ersten einführenden Abschnitte durchweg metrische Coordinaten festgehalten sind. Es galt eben, zunächst den begrifflichen Kern genau zu fixiren, und mit der Anschauung innig zu verbinden, während die formalen Hülfsmittel zu einfacherer und eleganterer Durchführung der weiter gehenden Untersuchungen für die spätere Stufe aufbewahrt blieben.

Der zweite Abschnitt ist speciell als projectivische Geometrie bezeichnet. Hier werden nun zunächst homogene Punkt-,

Ebenen- und Linien-Coordinaten eingeführt, wobei das Princip der Dualität volle Berücksichtigung findet (Cap. VI.). Darauf werden (Cap. VII.) die einförmigen Grundgebilde: Punktreihe, ebenes Strahlenbüschel und Ebenenbüschel untersucht, wobei die Doppelverhältnisse, die Verwandtschaftsgleichungen und die ausgezeichneten Elemente eingehend behandelt werden. Das folgende Capitel (VIII.) beschäftigt sich mit den projectivischen Erzeugnissen zweier einförmiger Grundgebilde. Nach eingehender Untersuchung der allgemeinen Regelfläche und dem Nachweise, dass dieselbe im Allgemeinen zwei Regelschaaren enthält, bietet die Betrachtung der Kegelfläche Anlass zur Einführung des Begriffs des Ebenenbüschels zweiter Ordnung. Eine Unterscheidung des Hyperboloids vom hyperbolischen Paraboloid wird an dieser Stelle nicht vorgenommen, wie dies auch vom Standpunkte rein projectivischer Betrachtung nicht geboten ist, dagegen werden Involutionen u. dgl. betrachtet. Das IX. und X. Capitel behandeln in analoger Weise die projectivische Verwandtschaft zwischen den Grundgebilden zweiter Stufe und ihre projectivischen Erzeugnisse. Das XI. und XII. Capitel behandeln Collineation und Reciprocität räumlicher Systeme und ihre projectivischen Erzeugnisse, und das XIII. Capitel, die linearen Substitutionen und Coordinatentransformation behandelnd, führt dann schliesslich wieder auf metrische Betrachtungen zurück. Auch in diesem zweiten Teile kommt der einfache Gedankengang des systematischen Aufbaus zu sehr übersichtlicher Darstellung. Durch zahlreiche den einzelnen Capiteln beigefügte Uebungsaufgaben wird dem Studirenden anregende Gelegenheit gegeben, den gebotenen Stoff selbständig weiter zu verarbeiten. A.

F. Hocevar. Geometrischer Satz. Schlömilch Z. XXVI. 207-208.

Aus Wien. Ber. 1880., s. F. d. M. XII. 1880. p. 597-598.

W. St.

G. Schaertlin. Aufgabe. Schlömilch Z. XXVI. 70-71.

Man soll einen Punkt so bestimmen, dass die Summe seiner [Ab]stände von n gegebenen Punkten im Raume ein Minimum wird. [D]ie Bedingung wird darauf zurückgeführt, dass gleiche Kräfte, [di]e auf den gesuchten Punkt nach allen gegebenen Punkten hin [w]irken, im Gleichgewicht sind. Für die Ecken eines ebenen [V]ierecks ist es der Schnittpunkt der Diagonalen. H.

[H]. LAURENT. Réduction de deux polynômes homogènes du second degré à des sommes de carrés. Nouv. Ann. (2) XX. 38-48.

Uebersichtliche Darstellung der gewöhnlichen Methoden. [F]ortsetzung der F. d. M. XII. 1880. p. 598 besprochenen Arbeit. My.

G. A. F. SILLDORF. Analytische Entwickelung von Sätzen, welche die Oberflächen zweiter Ordnung betreffen und aus synthetischen Betrachtungen hervorgehen. Pr. Magdeburg.

Die Arbeit beschäftigt sich mit den bekannten allgemeinen Discussionen der Flächen zweiter Ordnung, namentlich in Hinsicht auf die involutorischen Beziehungen, und ausführlich mit der Untersuchung confocaler Flächenschaaren. Die Darstellung ist übersichtlich. A.

R. HEGER. Die Construction einer Fläche zweiter Ordnung aus neun gegebenen Punkten, und verwandte Constructionen. Pr. Breslau.

Die Arbeit enthält eine ausführliche Zusammenstellung mehrerer [b]ekannter Constructionsmethoden einer Fläche zweiter Ordnung [a]us neun gegebenen Punkten, der Durchschnittscurve zweier [s]olcher Flächen aus acht, und des achten Schnittpunktes dreier [s]olcher Flächen aus sieben gegebenen Punkten, wie dieselben [v]on Hesse, Seydewitz, Schröter, Sturm, Chasles u. A. ausgeführt

sind. Auch gewisse Eigenschaften der Raumcurven dritter und vierter Ordnung (erster Klasse) und damit zusammenhängende Probleme der neueren Geometrie sind eingehend berücksichtigt. Zur Orientirung über die betreffende Literatur kann die Abhandlung sehr behülflich sein. A.

GENTY. Note sur les conditions qui expriment qu'une surface du second ordre est de révolution. Nouv. Ann. (2) XX. 414-416.

Ist

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1$$

die Gleichung einer Fläche zweiten Grades S, so ist

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}=1$$

die Gleichung ihrer Polare S' in Bezug auf die Kugel

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Sucht man nun einen Punkt $x\,y\,z$, dessen Polarebenen in Bezug auf jene drei Flächen einer Geraden parallel sind, so findet man die Bedingung

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha x & \beta y & \gamma z \\ \frac{x}{\alpha} & \frac{y}{\beta} & \frac{z}{\gamma} \end{vmatrix}=0,$$

d. h.

$$(1)\qquad \frac{x\,y\,z}{\alpha\,\beta\,\gamma}(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)=0.$$

Der Ort der gesuchten Punkte besteht also aus den drei Hauptebenen. Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Covariante, da sie eine von der Wahl der Axe unabhängige geometrische Eigenschaft ausdrückt.

Sind also

$$f(xyz)=0 \quad\text{und}\quad F(xyz)=0$$

die Gleichungen der Flächen S und S' bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfang im gemeinsamen

Mittelpunkte liegt, so stellt die Gleichung

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ F'_x & F'_y & F'_z \end{vmatrix} = 0$$

die drei Hauptebenen der Fläche dar.

Ist aber die Fläche eine Umdrehungsfläche, so wird die linke Seite von (1) identisch Null; folglich ist die Bedingung dafür, dass $f(xyz) = 0$ eine Umdrehungsfläche sei, die, dass die Gleichung (2) identisch erfüllt sei. Man findet, wenn

$$f(xyz) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy - 1 = 0$$

die Gleichung der Fläche S ist, als Gleichung der Fläche S'

$$F(xyz) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy - \Delta = 0,$$

wo

$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2,$$
$$A = bc - f^2; \quad B = gh - af \text{ etc. ist.}$$

Also wird (2)

$$\begin{vmatrix} x\;, & y\;, & z \\ Ax+Hy+Gz, & Hx+By+Fz, & Gx+Fy+Cz \\ ax+hy+gz, & hx+by+fz, & gx+fy+cz \end{vmatrix} = 0.$$

Soll die linke Seite identisch Null sein, so muss

$$\frac{b-c}{B-C} = \frac{c-a}{C-A} = \frac{a-b}{A-B} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} = \frac{h}{H}.$$

Diese Bedingungen reduciren sich auf die beiden

$$\frac{f}{F} = \frac{g}{G} = \frac{h}{H},$$

aus denen man leicht findet

$$a - \frac{gh}{f} = b - \frac{hf}{g} = c - \frac{fg}{h}.$$

Dies ist die gewöhnliche Form für die Bedingung, dass F eine Rotationsfläche sei. A.

A. Droz. Note de géométrie. Nouv. Ann. (2) XX. 305-307.

Chasles citirt im „Aperçu historique" den Satz: „Die Tangentialebene und die Normale in einem Punkte P einer Fläche

zweiten Grades schneiden eine der Hauptebenen in einer Geraden und einem Punkt, welche zu einander polar in Bezug auf den in derselben Ebene befindlichen Focalkegelschnitt sind." Nach einem einfachen analytischen Beweise dieses Satzes wird mit Hülfe desselben die geradlinige Fläche untersucht, welche der Ort derjenigen Normalen einer Fläche zweiten Grades ist, deren Fusspunkte in einem ebenen Schnitte liegen. Auf derselben liegen, wie ebenfalls schon Chasles gezeigt hat, unendlich viele Kegelschnitte; nämlich in jeder Ebene, in welcher zwei jener Normalen liegen, liegt ausserdem ein Kegelschnitt. A.

K. Frosch. Die Krümmungsradien der Normalschnitte und schiefen ebenen Schnitte der Oberflächen zweiter Ordnung. Pr. Kattowitz.

1. Wählt man die Tangente und die Normale in einem Punkte eines Kegelschnitts bezüglich zur t- und z-Axe, so wird die Gleichung desselben nach Division durch einen constanten Factor

$$Lt^2-2Mtz+Nz^2-2z = 0,$$

und der Coefficient $L = \frac{1}{\varrho}$ bedeutet die Krümmung in dem betreffenden Punkte, wie aus der Betrachtung der Berührungskreise leicht hervorgeht. (Die Berührungskreise schneiden den Kegelschnitt im Allgemeinen noch zweimal. Die Verbindungslinie der Schnittpunkte ist die Gerade $2M\xi+(N-L)\eta-2(1-Lr) = 0$, wo r den Radius des Berührungskreises bedeutet. Dieselbe ändert ihre Richtung nicht, wenn r sich ändert).

2. Wählt man die Tangentialebene in einem Punkte einer Fläche zweiter Ordnung zur xy-Ebene, die Normale zur z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so wird die Gleichung der Fläche

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2-2z = 0,$$

und die Krümmung des Normalschnittes

$$x = t.\cos u, \quad y = t.\sin u$$

wird

$$\frac{1}{r} = A\cos^2 u + 2B\cos u\sin u + C\sin^2 u.$$

Hieraus folgt leicht: „Wenn man einen Halbmesser k der Fläche parallel der Tangente des Normalschnittes legt, so ist $r = \frac{k^2}{c}$, wo c den Abstand der Tangentialebene vom Mittelpunkte bedeutet.“ Man gelangt so zu dem Satz, dass die Summe der Krümmungen zweier sich rechtwinklig schneidender Normalschnitte constant ist, und findet die Hauptkrümmungen. Um den Meusnier'schen Satz zu erhalten, bedarf es dann der Betrachtung schiefer Schnitte, die in ähnlicher Weise ausgeführt wird. Zum Schluss wird gezeigt, wie man von Curven und Flächen zweiten Grades zu beliebigen Curven und Flächen übergehen kann, so dass die Abhandlung zugleich eine von recht elementaren Gesichtspunkten ausgehende Theorie der Krümmung liefert. A.

W. Spottiswoode. On the polar planes of a point with respect to four quadric surfaces. Brit. Ass. Rep. 1881.

Csy.

J. J. Walker. Quaternion proof of Mr. S. Roberts' theorem of four cointersecting spheres. Lond. M. S., Proc. XII. 147-148.

Das Theorem ist das folgende: „Nimmt man auf jeder der sechs Kanten eines beliebigen Tetraeders einen Punkt an, so kann man durch jeden Eckpunkt und die drei Punkte auf den Kanten, welche in diesem Eckpunkt zusammenstossen, eine Kugel legen. Diese vier Kugeln haben einen Punkt gemeinsam.“ Dieser Satz wird mit Hülfe von Quaternionen bewiesen. A.

V. Hioux. Note relative à la question 1210. Nouv. Ann. (2) XX. 276-279.

Die Aufgabe ist zuerst von Ch. Brunot (Nouv. Ann. (2) XVI. 523, s. F. d. M. IX. 1877. 557) behandelt und wird jetzt noch einmal aufgenommen, um die Lösung vollständiger zu geben.

H.

E. Lucas. Notes de géométrie analytique. Math. I. 65-66.

Die Arbeit enthält sehr einfache Beweise für folgende Sätze: „Wenn drei Punkte einer Geraden auf den Seiten eines Trieders bleiben, beschreibt ein vierter Punkt ein Ellipsoid." „Wenn vier Punkte einer Geraden auf den Seiten eines Tetraeders bleiben, beschreibt ein fünfter Punkt eine Ellipse, und die Gerade bleibt einem Rotationskegel parallel."

Mn. (O.).

O. Böklen. Die Brennpunkte der Krümmungslinien des Ellipsoids. Schlömilch Z. XXVI. 383-387.

Für jeden Punkt eines länglichen Rotations-Ellipsoids, resp. eines zweischaligen Hyperboloids ist die Summe, resp. die Differenz der Brennstrahlen constant, dagegen für jeden Punkt des abgeplatteten Rotationsellipsoids, resp. des einschaligen Hyperboloids ist die Summe, resp. Differenz seiner Entfernungen von den Endpunkten desjenigen Durchmessers des von den Brennpunkten beschriebenen Kreises constant, welcher mit dem Punkte in derselben Meridianebene liegt.

Diese Eigenschaften sind characteristisch für die bezeichneten Rotationsflächen und die auf ihr gezeichneten Curven. Der Herr Verfasser weist nun nach, dass jede Krümmungslinie eines dreiaxigen Ellipsoids (ebenso auch eines Hyperboloids) auf drei Rotationsflächen liegt, deren jede eine Hauptaxe der gegebenen Fläche zur Rotationsaxe hat. Die Discussion dieser drei Flächen in Verbindung mit den oben erwähnten Focaleigenschaften bildet den Gegenstand der weiteren Betrachtungen. Es ergeben sich hierbei u. a. folgende Sätze: „Die von einem Punkte der Krümmungslinie eines Ellipsoids nach ihren Brennpunkten gezogenen Radienvectoren bilden mit der Normalebene dieses Punktes gleiche

Winkel." und „Die Brennstrahlen einer Krümmungslinie sind gleich der Halbaxe des verlängerten Drehungsellipsoids (oder zweischaligen Drehungshyperboloids), auf dem sie liegt, vermehrt (oder vermindert) um die Halbaxe in der Richtung der x-Axe von der zweiten confocalen Fläche, welche durch den betreffenden Punkt der Krümmungslinie hindurchgeht." A.

A. Picart. Nouvelle méthode d'intégration de l'équation différentielle des lignes de courbure de l'ellipsoïde. Nouv. Ann. (2) XX. 145-150.

Ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a^2>b^2>c^2)$$

die Gleichung des Ellipsoids in rechtwinkligen Coordinaten, so ist die Differentialgleichung der Projection der Krümmungslinien auf die xy-Ebene bekanntlich

$$Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-Ay^2-B)\left(\frac{dy}{dx}\right)-xy=0,$$

wo

$$A=\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}, \quad B=\frac{a^2(a^2-b^2)}{(a^2-c^2)}.$$

Das Integral hat die Form $y^2=Cx^2+C'$, wo zwischen den Constanten C und C' eine Relation besteht, welche durch Einsetzen des Wertes für y in die (mit y multiplicirte) Differentialgleichung leicht gewonnen wird. Dies Resultat, welches leicht durch Versuche gefunden wird, ist von Monge durch nochmaliges Differentiiren gewonnen worden. Der Herr Verfasser der vorliegenden Note will dieses Differentiiren als einen Umweg meiden und glaubt dies durch seine „neue" Methode zu erreichen. Er löst die Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$ auf, substituirt $x^2=u$, $y^2=v$, und vermutet aus der Form der Gleichung, welche kein Maximum oder Minimum für u als Function von v oder umgekehrt zulässt, dass v eine lineare Function von u sei. Man sieht, es tritt statt des Nachweises, dass das Integral die oben genannte Form haben

muss, nur eine Vermutung ein, welche dann durch die weitere Rechnung ihre Bestätigung findet. Dies möchte schwerlich eine methodische Verbesserung sein. Im weiteren Gang der Rechnung wird durch eine ganz zweckmässige geometrische Betrachtung die Einführung einer neuen Variablen vermittelt. A.

A. Schiappa Monteiro. Note sur la ligne de striction de l'hyperboloïde. Teixeira J. III. 131-156.

Untersuchung der Strictionslinie des Hyperboloids unter alleiniger Benutzung der gewöhnlichen Algebra.

Tx. (O.).

H. Schröter. Ueber das Parallelhexagon auf dem geradlinigen Hyperboloid. Klein Ann. XVIII. 428-443.

Die Arbeit beschäftigt sich damit, für gewisse namentlich von Herrn Vogt (Borch. J. LXXXVI. 297ff., s. F. d. M. XI. 1879. 434) untersuchte Eigenschaften des „gleichseitigen" Hyperboloids die analogen Eigenschaften des allgemeinen Hyperboloids aufzusuchen, aus denen jene durch Specialisirung gewonnen werden können. Hierbei wird auch eine Anzahl teils neuer, teils wenig bekannter Sätze der elementaren Stereometrie gewonnen, von denen einige sich, wie der Herr Verfasser bemerkt, in R. Balzer's Elementen der Mathematik finden. Uebrigens hat, wie der Herr Verfasser ebenfalls angiebt, Herr Bauer (Münch. Ber. 1880., siehe F. d. M. XII. 506) bereits nachgewiesen, dass sich eine der von Herrn Vogt beim gleichseitigen Hyperboloid gefundenen Eigenschaften direct auf das allgemeine Hyperboloid übertragen lässt. Die wichtigsten Resultate der Arbeit lassen sich in folgenden Sätzen aussprechen:

1. Irgend drei parallele Paare von Erzeugenden eines Hyperboloids lassen sich zu einem Parallelhexagon zusammenreihen. Die Berührungsebenen in den sechs Ecken bilden ein Parallelepiped, von dem drei räumliche Diagonalen die Verbindungslinien der Gegenecken des Hexagons sind, während die

vierte die beiden nicht auf dem Hyperboloid liegenden Ecken verbindet. Die Summe der Quadrate der drei ersten Diagonalen, vermindert um das Quadrat der vierten, ist von unveränderlichem Werte, wie auch die drei parallelen Paare von Erzeugenden gewählt werden, und zwar gleich

$$8(P_a+P_b+P_c),$$

wo P_a, P_b, P_c die Potenzen der Punktinvolutionen auf den drei Hauptaxen bedeuten. (Ist also die Gleichung des Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

so ist

$$P_a=a^2,\quad P_b=b^2,\quad P_c=-c^2).$$

2. Von den sechs Diagonalparallelogrammen desselben Parallelepipeds haben drei je ein Paar paralleler Erzeugender zu Gegenseiten, die drei übrigen nicht. Die Summe der Quadrate der drei ersten Diagonalenparallelogramme, vermindert um die Summe der Quadrate der drei letzten, ist ebenfalls von unveränderlichem Werte und zwar gleich

$$16(P_aP_b+P_bP_c+P_cP_a).$$

3. Das Volumen ist gleich

$$-16(P_aP_bP_c),$$

wie bereits Herr Bauer nachgewiesen hat.

Dieselben Sätze lassen sich teilweise auch als Sätze des Hexagons und des Octaeders aussprechen, welches die sechs Ecken des Hexagons zu Ecken hat, wenn man gewisse einfach zu erweisende Sätze anwendet. Für das Hexagon ergiebt sich aus dem ersten Satze, dass die Summe der Quadrate der drei Hauptdiagonalen vermindert um die Summe der Quadrate der sechs Seiten constant ist, und zwar gleich

$$4(P_a+P_b+P_c).$$

Für das Octaeder folgt: „Die Summe der Quadrate der drei (windschiefen) Axen des Octaeders plus der Summe der Quadrate derjenigen sechs Kanten, welche Erzeugende des Octaeders sind, minus der Summe der Quadrate der sechs übrigen Kanten, ist constant gleich

$$8(P_a+P_b+P_c).“$$

Aus dem zweiten und dritten Satze ergeben sich Folgerungen, welche wir nur für das Octaeder aussprechen, nämlich: „Die Summe der Quadrate der beiden Seitenflächen des Octaeders, welche nicht Tangentialebenen des Hyperboloids sind, vermindert um die Summe der Quadrate der sechs übrigen ist constant gleich

$$4(P_a P_b + P_b P_c + P_c P_a).“$$

Der Inhalt des Octaeders ist constant gleich

$$-\frac{64}{9} P_a . P_b . P_c .$$

Die zahlreichen beiläufig sich ergebenden Sätze der elementaren Stereometrie müssen hier übergangen werden. A.

A. Schumann. Das gleichseitige Hyperboloid. Schlömilch Z. XXVI. 136-143.

Die Arbeit knüpft an einen Aufsatz des Herrn H. Vogt „Ueber ein besonderes Hyperboloid“ (Borchardt J. LXXXVII. 297, s. F. d. M. XI. 1879. 434) an, indem sie einerseits die dort auf synthetischem Wege gewonnenen Resultate durch eine einfache Rechnung beweist, andererseits die Untersuchung durch die Verwandtschaft der Affinität so verallgemeinert, dass die analogen Eigenschaften eines beliebigen Hyperboloids daraus hervorgehen. Das Hauptresultat dieser Verallgemeinerung ist der Satz: „Ist ein Parallelepipedon einem Ellipsoid eingeschrieben und einem Hyperboloid in dem Sinne umbeschrieben, dass drei Paare Gegenkanten Erzeugende des Hyperboloids sind, so giebt es eine ganze Schaar solcher Parallelepipeda, welche der ersten Fläche eingeschrieben, der andern umbeschrieben sind, und alle diese Parallelepipeda haben gleiches Volumen.“ Ein solches Parallelepipedon ist durch drei windschiefe Gerade bestimmt, ebenso das Hyperboloid. Das Ellipsoid ist nur durch sieben Punkte (und den 8ten notwendigen) unvollständig bestimmt, kann also jedes Glied einer zweifach unendlichen Schaar sein. Man vergleiche übrigens das Referat über die Arbeit des Herrn Schröter „Ueber das Parallelhexagon“ auf p. 612. A.

E. Lucas. Sur la déformation du cache-pot. Nouv. Ann. (2) XX. 9-11.

Ein „cache-pot" oder eine „Topf-Hülle" besteht aus zwei Systemen geradliniger Stäbchen oder Drähte, welche an ihren Kreuzungsstellen verbunden sind. Sie hat die Gestalt einer durch zwei Ebenen parallel zum elliptischen Hauptschnitt abgeschnittenen Zone eines einschaligen Hyperboloids, und die beiden Systeme von Stäbchen sind Repräsentanten der beiden Schaaren von Geraden. Wird die Topfhülle deformirt, so repräsentirt sie ein zweites Hyperboloid, welches, wenn man Mittelpunkt und Axenrichtungen ebenso wählt, wie bei der ersten Fläche, mit jenem confocal ist. Dieser Zusammenhang, der bereits von Herrn Cayley aufgedeckt ist, wie der Verfasser angiebt, wird in der Note noch einmal in einfacher Weise nachgewiesen. A.

W. Jung. Beitrag zur Theorie der Flächen zweiten Grades. Cas. X. 24. (Böhmisch).

Enthält Untersuchungen über die Degeneration dieser Flächen, ausgeführt mit Hülfe des Cartesischen Coordinatensystems und unter Verwendung von Determinanten. Std.

Bernhard. Ueber die analytische Behandlung des Kegels zweiter Ordnung. Pr. Schwäb.-Hall.

Die Arbeit ist in pädagogischer Absicht geschrieben, geht nicht über die Betrachtung der ebenen Schnitte und der Tangentialebenen hinaus und bietet weder in Hinsicht auf die Resultate, noch auf die Methode Anlass zu besonderer Besprechung. A.

J. Dickl. Ueber den Schnitt zweier Kegel zweiter Ordnung nach Curven zweiter Ordnung. Hoppe Arch. LXVII. 219-222.

Die Bedingung dafür, dass zwei Kegel zweiter Ordnung sich in Kegelschnitten durchschneiden, kann darauf zurückgeführt werden, dass die Verbindungslinie ihrer Scheitel eine beliebige Ebene in einem Punkte schneidet, von welchem aus sich zwei gemeinsame Tangenten an die Kegel legen lassen. Dieselben können jedoch reell oder imaginär sein. Durch die bekannten synthetischen Methoden können aber beide Fälle nach denselben geometrischen Gesichtspunkten behandelt werden. Dies ist in der vorliegenden Arbeit geschehen. A.

O. Böklen. Ueber confocale Flächen. Schlömilch Z. XXVI. 294-295.

Die Resultate der Arbeit lassen sich in folgenden beiden Sätzen zusammenfassen:

1. „Die Focallinien des Systems von Kegeln, welche aus einem beliebigen Punkte S den Flächen eines confocalen Systems umschrieben werden können, sind die Erzeugenden der drei durch S gehenden confocalen Flächen; die reellen Focallinien gehören dem einmantligen Hyperboloid an, die imaginären dem Ellipsoid und dem zweimantligen Hyperboloid." (Soweit der Satz die reellen Focallinien betrifft, ist er bereits von Chasles und Jacobi ausgesprochen, wie der Herr Verfasser bemerkt).

2. „Wenn ein System confocaler Flächen gegeben ist, und man legt durch einen Punkt S einen Tangentenkegel, welcher eine dieser Flächen, z. B. ein Ellipsoid in einer Ellipse E beberührt, so ist durch E als Focalellipse ein zweites System confocaler Flächen bestimmt. Die drei durch S gehenden Confocalen dieses Systems haben mit je einer Confocalen des ersten in S eine Berührung zweiter Ordnung insofern, als nicht blos die Tangenten der Krümmungslinien, sondern auch die reellen oder imaginären Erzeugenden von je zwei sich berührenden Flächen zusammenfallen."

Referent möchte bemerken, dass der Ausdruck Berührung zweiter Ordnung für diese Beziehung bedenklich ist, da die Haupt-

Krümmungsradien beider Flächen nicht gleich, sondern nur proportional sein müssen.

An obige Sätze schliessen sich noch einige Specialisirungen und eine analoge Betrachtung für confocale Kegelschnitte in der Ebene an. A.

E. Caporali. Sull' esaedro completo, nebst Bericht von E. Fergola, N. Trudi, A. de Gasparis. Nap. Rend. XX. 59-73; 34-35.

Es handelt sich nach dem Bericht um das Polarhexaeder bei einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung nach der Definition von Cremona. Von dessen Untersuchungen ausgehend betrachtet der Verfasser zuerst den Fall, in dem die Fläche einen Doppelpunkt hat. Er zeigt, dass das Hexader alle seine verschiedenen Ecken erhält, wenn nur die sechs Geraden der Oberfläche, welche sich in dem Doppelpunkt schneiden, passend unter den funfzehn gewählt sind, die zur Construction des Polarhexaeders der Fläche dienen. Unter dieser Voraussetzung reduciren sich die 36 Hexaeder der allgemeinen Fläche auf elf, von denen eins (das Haupthexaeder) die Steiner'schen Punkte zu Ecken hat, während bei den übrigen nur ein Paar entgegengesetzter Ecken von Steiner'schen Punkten gebildet wird. Nach diesen erläuternden Betrachtungen stellt der Verfasser dann den Hauptsatz seiner Arbeit auf, der in einer Correspondenz zwischen den cubischen Flächen, die ein gegebenes Polarhexaeder haben, und den Tangentialebenen der Developpabeln, welche die Ebenen des Hexaeders bestimmt, besteht. O.

P. Frost. On the twenty-seven lines, the forty-five triple tangent planes and the thirty-six double sixers of a cubic surface, with a hint for the construction of models which give the position of the lines, when they are all real. Quart. J. XVIII. 89-96.

Die Arbeit enthält eine einfache Bestimmung der 27 Geraden

einer Fläche dritter Ordnung, wenn neun derselben, welche den Durchschnitt dieser Fläche mit einer anderen Fläche dritter Ordnung bilden, und irgend ein weiterer Punkt der Fläche gegeben sind, und zwar auf analytischem Wege. Sie bildet insofern das Gegenstück zu der synthetischen Bestimmung, wie sie Referent im ersten Teile seiner Inaugural-Dissertation (Disquisitiones de superficiebus tertii ordinis, Berol. 1862) gegeben hat. Der Gedankengang ist folgender. Die Gleichung der Fläche kann in die Form

$$uvw + u'v'w' = 0$$

gebracht werden, wo u, v, w, u', v', w' lineare Functionen sind. Nun lassen sich zwischen den sechs linearen Functionen stets identische Gleichungen von folgender Form aufstellen:

$$au + bv + cw + \alpha u' + \beta v' + \gamma w' = 0,$$
$$\alpha u + \beta v + \gamma w + \alpha' u' + \beta' v' + \gamma' w' = 0,$$

also auch

$$(a\varrho - \alpha)u + (b\varrho - \beta)v + \cdots + = 0,$$

wofür man schreiben kann:

$$\lambda u + \mu v + \nu w + \lambda' u' + \mu' v' + \nu' w' = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Durchschnittsgerade der Ebenen

$$\lambda u + \lambda' u' = 0,$$
$$\mu v + \mu' v' = 0$$

auch in der Ebene $\nu w + \nu' w' = 0$ liegt. Soll aber diese Linie der Fläche dritten Grades angehören, so muss $\lambda\mu\nu = \lambda'\mu'\nu'$ sein, d. h.

$$(a\varrho - \alpha)(b\varrho - \beta)(c\varrho - \gamma) = (a'\varrho - \alpha')(b'\varrho - \beta')(c'\varrho - \gamma').$$

Durch diese Gleichung, welche in Bezug auf ϱ vom dritten Grade ist, werden drei weitere Gerade der Fläche bestimmt. Drei andere Gerade erhält man, wenn man verlangt, dass die Gerade

$$\lambda u + \lambda' u' = 0,$$
$$\mu v + \nu' w' = 0,$$
$$\nu w + \mu' v' = 0$$

der Fläche angehöre, u. s. f. Es lassen sich so sechs cubische Gleichungen bilden, durch welche 6 mal 3 Gerade der Fläche

bestimmt werden. Zu diesen treten die neun Geraden

$$u\,v\,w = 0,$$
$$u'v'w' = 0,$$

so dass sämmtliche 27 Geraden der Fläche bestimmt sind.

Die weiteren Bestimmungen haben dann keine Schwierigkeit. Den Schluss der Arbeit bilden Angaben zur Construction eines Modelles mit 27 reellen Geraden. A.

C. Rodenberg. Gipsmodelle von Flächen dritter Ordnung. Darmstadt. L. Brill.

Eine Sammlung von 26 Modellen, durch welche man im Stande ist, sich ein vollständiges und abgeschlossenes Bild aller möglichen Formen von Flächen dritter Ordnung zu verschaffen, indem man jeden beliebigen Typus aus einem der gegebenen, ebenso wie irgend zwei der gegebenen aus einander durch continuirliche Deformation ableiten kann. Dieselbe Aufgabe ist zugleich für diejenigen Hesse'schen Flächen gelöst, welche einem eigentlichen Pentaeder angehören. Bei der wirklichen plastischen Darstellung erwies es sich am förderlichsten für die Anschauung, solche Typen zu bevorzugen, die ausser einer gegebenen höheren Singularität möglichst viele conische Knoten zeigen, da man aus ihnen durch „Verbinden“ und „Trennen“ die allgemeineren Formen nach den Vorschriften des Herrn F. Klein leicht ableiten kann. Diese Modelle bilden die VII. Serie der Brill'schen Sammlung. (Man vergleiche das Referat p. 623.). A.

E. Caporali. Teoremi sulle superficie del 3° ordine. Nap. Rend. XX. 122-130.

Die Arbeit enthält Sätze über Flächen dritter Ordnung, welche gewissen Sätzen über Vierecke bei einer ebenen Curve dritter Ordnung analog sind, und sich speciell auf Gruppen von Punkten beziehen, wie sie von Reye in seiner Arbeit: „Trägheits- und höhere Momente eines Massensystems in Bezug auf Ebenen“

(Borchardt J. LXXII. 293-326, siehe F. d. M. II. 1870. p. 671) definirt sind. O.

L. Klug. Ueber einen geometrischen Ort. Hoppe Arch. LXVII. 330-332.

„Den geometrischen Ort der Punkte zu suchen, in welchen sich zwei von den festen Punkten A und B ausgehende, gegen eine feste Ebene gleich geneigte Strahlen schneiden."

Wählt man die Mitte von AB zum Coordinatenanfang, das Lot auf die gegebene Ebene zur z-Axe, und sind d, 0, c die Coordinaten des Punktes A, so ist die Gleichung des Ortes:

$$y^2zc-(zd-xc)(xz-cd) = 0.$$

Es werden einige Eigenschaften dieser Fläche besprochen.

A.

J. Griess. Solution d'une question. Nouv. Ann. (2) XX. 20-27.

Gegeben ist ein Hyperboloid. Durch einen Punkt P der Ebene der Kehlellipse geht eine Parallele zu einer beliebigen Generatrix. Man betrachte nun den Umdrehungs-Cylinder, der diese Parallele zur Axe hat und durch die Generatrix geht. Derselbe schneidet das Hyperboloid in einer Curve, die sich auf die Horizontalebene als Curve dritten Grades mit einem Doppelpunkt projicirt. Der Ort dieses Doppelpunktes ist, wie gezeigt wird, eine Curve vierten Grades mit einem Doppelpunkt im Anfangspunkt. O.

W. R. W. Roberts. Note on the coordinates of a tangent line to the curve of intersection of two quadrics. Lond. M. S., Proc. XII. 143-146.

Sind a, b, c, f, g, h die homogenen Linien-Coordinaten einer Geraden, und sind die Gleichungen zweier Flächen

$$U \equiv \alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta u^2 = 0,$$
$$V \equiv \alpha' x^2+\beta' y^2+\gamma' z^2+\delta' u^2 = 0,$$

so ist die Bedingung, dass jene Gerade die Durchschnittscurve beider berührt,

$$\begin{aligned} a &= [AP(\alpha+\lambda\alpha')(\delta+\lambda\delta')]^{\frac{1}{2}}, \\ b &= [BG(\beta+\lambda\beta')(\delta+\lambda\delta')]^{\frac{1}{2}}, \\ c &= [CF(\gamma+\lambda\gamma')(\delta+\lambda\delta')]^{\frac{1}{2}}, \\ f &= [AF(\beta+\lambda\beta')(\gamma+\lambda\gamma')]^{\frac{1}{2}}, \\ g &= [BG(\gamma+\lambda\gamma')(\alpha+\lambda\alpha')]^{\frac{1}{2}}, \\ h &= [CF(\alpha+\lambda\alpha')(\beta+\lambda\beta')]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wo $A = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)$, $F = (\alpha\delta' - \alpha'\delta)$ etc. und λ einen Parameter bedeuten.

Nach Herleitung dieser Formeln wird die abwickelbare Tangentenfläche der Durchschnittscurve UV betrachtet, deren Gleichung die Form erhält:

$$x[AF(\alpha V - \alpha' U)]^{\frac{1}{2}} + y[BG(\beta V - \beta' U)]^{\frac{1}{2}} + z[CF(\gamma V - \gamma' U)]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Die Coordinaten eines Punktes der Durchschnittscurve drücken sich folgendermassen aus:

$$\begin{aligned} \theta x &= [(\alpha+\lambda\alpha')AGH]^{\frac{1}{2}}, \\ \theta y &= [(\beta+\lambda\beta')BFH]^{\frac{1}{2}}, \\ \theta z &= [(\gamma+\lambda\gamma')CFG]^{\frac{1}{2}}, \\ \theta w &= [(\delta+\lambda\delta')ABC]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wo θ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Führt man statt des Parameters λ den Parameter v durch die Gleichung

$$v = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{(\alpha+\lambda\alpha')(\beta+\lambda\beta')(\gamma+\lambda\gamma')(\delta+\lambda\delta')}}$$

ein, so ist die Bedingung, dass vier Punkte v_1, v_2, v_3, v_4 in einer Ebene liegen:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = c,$$

wo c eine Constante bedeutet; durch die Gleichung $4v = c$ werden die 16 stationären Tangentialebenen der Curve bestimmt.

In Folge des Dualitätsprincips kann in analoger Weise die gemeinsame abwickelbare Tangentenfläche der Flächen UV in Betracht gezogen werden, mit der sich der letzte Teil der Noten beschäftigt. A.

W. Spottiswoode. On the 48 coordinates of a cubic curve in space. Lond. R. S., Proc. XXXI. 301-302.

Auszug aus einer Arbeit, die demnächst in den Transactions erscheinen wird, weshalb das Referat bis dahin verschoben wird. Cly. (O.).

E. d'Ovidio. Nota sopra alcuni iperboloidi annessi alla cubica gobba. Chelini, Coll. Math. 74-91.

Die Arbeit schliesst sich an die grössere Abhandlung des Herrn Verfassers an (Studio sulle cubiche gobbe ..., presentato all' Accademia di Torino 1879), von welcher ein Auszug in Batt. G. XVII. 310 (Ref. F. d. M. XI. 1879. 88) veröffentlicht ist. Sie benutzt die dort aufgestellten Formeln zur Untersuchung gewisser Hyperboloide, welche mit der cubischen Raumcurve zusammenhängen, namentlich derjenigen, welche durch drei Secanten der Raumcurve gelegt sind. Zu dieser gehören speciell auch diejenigen Hyperboloide, welche durch drei Tangenten einer cubischen Raumcurve gelegt sind, und mit deren Studium sich Herr Beltrami beschäftigt hat. A.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades in analytischer Behandlung von G. Turriff, Evans, A. Anderson, C. Bickerdike, J. E. A. Steggall, J. W. Russell, Townsend, T. W. Openshaw, J. O. Jelly, W. J. C. Sharp, Ch. Ladd, C. Michaux, J. Gries, P. Barbarin, A. Leinekugel, E. Fauquembergue, N. Goffart, Geneyx finden sich Ed. Times XXXIV. 61, 63, 63-64, 82-83, 118; XXXV. 84-85, 93; Nouv. Ann. (2) XX. 17-20, 27-35, 57-65, 120-127, 229-231, 307-310, 348-350, 372, 524-526.

O.

D. Andere specielle Raumgebilde.

Mathematische Modelle, angefertigt im mathematischen Institut der königl. technischen Hochschule in München unter Leitung von Prof. Dr. Brill. (VIII. Serie).

L. Brill. Catalog mathematischer Modelle. Darmstadt.

XX. Fläche von constantem negativen Krümmungsmass nach L. Bianchi von Th. Kuen.

Die dargestellte Fläche ist charakterisirt durch die Gleichungen

$$x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi,$$

$$z = g \log \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} + \frac{2g \cos\psi}{1 + w^2 \sin^2\psi},$$

wo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin w - w \cos w}{\cos w + w \sin w}$$

und

$$\varrho = \frac{2g \sin\psi}{1 + w^2 \sin^2\psi} \sqrt{1 + w^2}$$

ist. Dieselbe wurde von Herrn Mack modellirt, und es zeigte sich eine so grosse Uebereinstimmung mit denjenigen, welche Herr E. Lenz in seiner Inaugural-Dissertation „Ueber die Enneper'schen Flächen mit constanter negativer Krümmung“ (Göttingen, 1879) von einer der letzteren entwarf, dass die Vermutung entstand, die Bianchi'sche Fläche besitze ebene Krümmungslinien, und sei demnach als specieller Fall in den Enneper'schen enthalten. Diese Vermutung findet nun ihre Bestätigung. Der Herr Verfasser weist diesen Zusammenhang nach und zeigt zugleich, wodurch es wohl erklärlich ist, dass grade dieser Fall sowohl Herrn Enneper als Herrn Lie bei der Aufsuchung der pseudosphärischen Flächen mit ebenen Krümmungslinien entgangen ist. Eine Discussion der Fläche und ihrer wichtigsten Singularitäten schliesst die Mitteilung.

XXI. Minimalfläche neunter Ordnung. Catenoid und Schraubenfläche.

Herr Weierstrass hat für die rechtwinkligen Coordinaten einer Minimalfläche die Gleichungen aufgestellt:

$$x = \int (1-s^2) f(s) ds + \int (1-s_1^2) f(s_1) ds_1,$$
$$y = i \int (1-s^2) f(s) ds - \int (1-s_1^2) f(s_1) ds_1,$$
$$z = 2 \int s f(s) ds + \int s_1 f(s_1) ds_1.$$

s und s_1 sind conjugirte complexe Variable, $f(s)$ eine beliebige Function von s, $f(s_1)$ die conjugirte Function von s_1. Die Gleichungen für die Krümmungs- und für die asymptotischen Linien sind beziehungsweise

$$f(s)\, ds^2 - f(s_1) ds_1^2 = 0,$$
$$f(s)\, ds^2 + f(s_1) ds_1^2 = 0.$$

Setzt man nun

$$(1) \qquad f(s) = f(s_1) = \frac{1}{2},$$

so erhält man die Enneper'sche Minimalfläche neunter Ordnung. Diese Fläche ist modellirt. Aus ihrer Discussion sei hervorgehoben, dass die Krümmungslinien ebene Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte sind. Die Fläche ist aber noch durch eine andere Eigenschaft ausgezeichnet. Ersetzt man nämlich in den Weierstrass'schen Gleichungen $f(s)$ durch $i\ f(s)$, u. s. w., so bekommt man eine zweite Minimalfläche, welche auf die Urfläche abwickelbar ist (die sogenannte Bonnet'sche Biegungsfläche). Bei dieser Biegung gehen Krümmungslinien in Asymptotenlinien über, und umgekehrt. Für die betrachtete Minimalfläche neunter Ordnung wird nun diese Biegungsfläche mit der Urfläche identisch, aber so, dass beim Aufwickeln sich nicht congruent entsprechende Punkte decken. Die Minimalfläche neunter Ordnung kann also auf sich selbst so aufgebogen werden, dass jeder ihrer Punkte im Allgemeinen eine andere Lage erhält, und dass die Krümmungslinien in asymptotische Linien übergehen, und umgekehrt. Die Biegung kann dadurch ausgeführt werden, dass man die Krümmungslinien in den „Hauptschnitten" $s+s' = 0$, $s-s' = 0$ in Gerade ausstreckt. Die gebogene Fläche ist noch um die z-Axe um 45 Grad zu drehen, um sie wieder mit der umgebogenen zur Deckung zu bringen.

2) Setzt man $f(s) = \frac{a}{4s^2}$ u. s. w., so erhält man als Minimalfläche die Rotationsfläche der Kettenlinie (Catenoid genannt), und die zugeordnete Biegungsfläche wird die gewöhnliche Schraubenfläche. Beim Aufbiegen des Catenoids auf die Schraubenfläche geht der Kehlkreis in die Axe, die Parallelkreise in Schraubenlinien, die Meridiane in die Geraden der Schraubenfläche über.

XXII. Fläche zwölfter Ordnung. Brennfläche der von einer leuchtenden Linie ausgehenden Strahlen nach ihrer Reflexion an einem Cylinder, dessen Axe die Linie trifft. Von S. Finsterwalder. Die Grundlage der Berechnung der bezeichneten Brennfläche ist unrichtig. Es wird nämlich behauptet, dass nur die Strahlen, welche von einem Punkte der leuchtenden Linie ausgehen und in einer Ebene senkrecht zur Cylinderaxe liegen, zur Bildung der Brennfläche beitragen, dass dagegen die zur Cylinderaxe schrägen Strahlen zu keiner weiteren Einhüllenden Anlass geben. Wäre dies richtig, so würde freilich die gesuchte Brennfläche durch jede Ebene senkrecht zur Axe in der Katakaustik des Schnittpunktes der leuchtenden Linie in Bezug auf den Durchschnittskreis des spiegelnden Cylinders geschnitten werden, wie dies in der Abhandlung angenommen ist, und zwar noch etwas specieller, indem die leuchtende Linie die Cylinderaxe unter 45 Grad schneidet. In Wirklichkeit besteht die Brennfläche eines leuchtenden Punktes in Bezug auf die Cylinderfläche aus einer cylindrischen Fläche, deren Seiten den Seiten des spiegelnden Cylinders parallel sind, und deren Schnitt mit der durch den Punkt gelegten Normalebene zur Cylinderaxe die Katakaustik in Bezug auf den Kreisschnitt ist, und aus derjenigen Linie, welche der Ort der Endpunkte der vom leuchtenden Punkte auf die Tangentialebenen des Cylinders gefällten und über den Fusspunkt um sich selbst verlängerten Lote ist. Diese zweite in eine Curve degenerirte Brennlinie ist aber nur virtuell. Die Brennfläche für die leuchtende Linie ist die Enveloppe jener cylindrischen Katakaustiken für die Schaar der leuchtenden Punkte, welche selbst cylindrisch ist, und wozu als wesentlich virtueller Bestandteil die Fläche tritt, welche der Ort aller jener in Linien dege-

nerirten Flächen für die Schaar der leuchtenden Punkte ist. Die modellirte Fläche ist also nicht Brennfläche, und ihre Untersuchung hat nicht die supponirte Bedeutung für die Optik. Die Notiz enthält nach Aufstellung der Gleichung der Fläche

$$[(4z^2-r^2)(x^2+y^2-r^2z)(2x+z)]^3-27r^4z^2y^2(x^2+y^2-z^2)^2=0$$

noch eine Discussion, auf welche hier nicht weiter eingegangen werden kann.

XXIII. Reliefperspectivische Darstellung eines Würfels, einer Kugel, eines Kegels und eines Hohlcylinders, auf einem Untersatz vereinigt. Von H. Thoma.

XXIV. Röhrenschraubenfläche nebst Krümmungslinien. Von Th. Kuen.

Die Röhrenschraubenfläche ist die Enveloppe der Kugeln von constantem Radius, deren Mittelpunkte auf einer Schraubenlinie liegen, mithin eine Canalfläche.

Das eine System der Krümmungslinien besteht aus Kreisen, das andere aus den Schraubenlinien, welche parallel und congruent der Mittelpunktscurve sind.

XXV. a) Windschiefe Schraubenfläche nebst Krümmungslinie und Asymptotencurven. b) Catenoid aus biegsamem Messingblech. c) Dasselbe in Gyps. Von G. Herling. Vgl. No. XXI.

XXVI. a) Auf das Rotationsellipsoid abwickelbare Schraubenfläche. b) Rotationsellipsoid aus biegsamem Messingblech. c) Letzeres in Gyps (nach E. Bour. J. d. l'Éc. polyt. Bd. XXII.). Man vergleiche auch F. d. M. XII. 1880. p. 611 über die Arbeit des Herrn Kuen. A.

E. Fauquembergue. Question de licence. Nouv. Ann. (2) XX. 471-473.

Es werden die asymptotischen Linien einer Fläche bestimmt, welche von einem Kreise beschrieben wird, dessen Ebene beständig normal zur z-Axe steht, dessen Mittelpunkt in der xz-Ebene eine gegebene Curve beschreibt und der beständig durch die

z-Axe hindurchgeht. Als specieller Fall wird später vorausgesetzt, dass der Ort des Mittelpunktes eine Parabel sei. A.

P. G. Tait. On some space loci. Edinb. Proc. X. 197-198.

Probleme der Art, wie sie in dieser Arbeit vorliegen, sind früher von Glaisher, Mannheim und Anderen behandelt worden. Der Verfasser knüpft an eine seiner früheren Untersuchungen (welche in Verbindung mit dem Minding'schen Theorem stand), über den Ort der Fusspunkte der Lote an, welche von einem festen Punkt auf die Strahlen eines Complexes gefällt sind. Dieser erfüllt den Raum zwischen den beiden Schaaren der Reciproken in der Fresnel'schen Wellenfläche. Der Verfasser giebt in der vorliegenden Arbeit eine Erläuterung der allgemeinen Theorie mit Hülfe von Quaternionen. Cly. (O.).

A. Mannheim. Sur la surface de l'onde et théorèmes relatifs aux lignes de courbure des surfaces du second ordre. Lond. R. S., Proc. XXXII. 447-450.

Die Arbeit ist in zwei Teile geteilt. In dem ersten Teil betrachtet der Verfasser eine Wellenfläche und ein System von confocalen Ellipsoiden. Die Erzeugung der Wellenfläche ist dieselbe, die der Verfasser der Pariser Akademie im April 1880 mitgeteilt hat. Umschreibt man nämlich einem gegebenen Ellipsoid einen Kegel, der als einen der Hauptschnitte zwei einander rechtwinklig schneidende Linien hat, so liegen die Spitzen dieser Kegel auf einer Wellenfläche $[c]$. Neben anderen Sätzen beweist der Verfasser noch folgenden: „Die Wellenfläche $[c]$ wird von einem Ellipsoid $[E]$, das dem oben erwähnten Ellipsoid confocal ist, in einer Krümmungscurve des Ellipsoids $[E]$ geschnitten."

Im zweiten Teile der Arbeit betrachtet der Verfasser ein festes Ellipsoid und ein System von Flächen $[c']$, analog der Wellenfläche. Jede der Flächen $[c']$ nämlich ist der Ort der

Spitzen der Kegel, die dem Ellipsoid umschrieben sind und gleichzeitig zu einem Hauptschnitt zwei unter einem gegebenen Winkel zu einander geneigte Linien haben. Diese Flächen schneiden das Ellipsoid in ihren Krümmungscurven. Es ergiebt sich daraus eine neue Erzeugungsart der Krümmungscurven einer Fläche zweiten Grades. Cly. (O.)

S. Roberts. On some forms of the equation of the wave surface. Quart. J. XVII. 318-327.

Herr Mannheim hat in den C. R. XC. 971-974. (siehe F. d. M. XII. 1880. 650) die Wellenfläche in gewissem Sinne als Grenzfläche eines Raumes betrachtet. Es ergab sich ihm daselbst unter Anderem aus kinematischen Betrachtungen, dass die Fusspunkte der Perpendikel vom Mittelpunkt eines Ellipsoids auf die Sehnen, welche einen rechten Winkel für das Centrum des Ellipsoides überspannen, einen gewissen Teil des Raumes einnehmen, welcher durch eine Wellenfläche begrenzt ist. Die Ergebnisse dieser Mannheim'schen Arbeit finden hier in analytischen Formen ihren Ausdruck. Schn.

A. Mannheim. Construction plane des éléments de courbure de la surface de l'onde. Chelini, Coll. Math. 91-104.

Der Gegenstand, den Herr Mannheim in dem vorliegenden Aufsatz behandelt, ist seinem wesentlichen Gedankeninhalt nach bereits in den C. R. LXXXVIII. 1128-1131, 1179-1183, 1248-1252 von ihm veröffentlicht worden, und es findet sich demgemäss im Bd. XI. 625-627 dieser Zeitschrift darüber der Bericht. Hier werden die Grundgedanken noch einmal eingehender entwickelt und in ihren Einzelnheiten für die Zwecke der ebenen Construction der Krümmungselemente der Wellenfläche verfolgt.

Schn.

G. Darboux. Sur la surface à seize points singuliers et les fontions Θ à deux variables. C. R. XCII. 685-688.

F. Brioschi. Sur la surface de Kummer à seize points singuliers. C. R. XCII. 944-946.

G. Darboux. Sur la surface à seize points singuliers. C. R. XCII. 1493-1495.

In der ersten Note entwickelt Herr Darboux den Zusammenhang der Kummer'schen Fläche mit den ϑ-Functionen mit zwei Variabeln, ausgehend von den Plücker-Klein'schen Liniencoordinaten. Der leitende Gedanke ist also wesentlich derselbe, welchen Herr K. Rohn zuerst in seiner Inauguraldissertation „Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche etc." München (s. F. d. M. X. 1878. 531) und dann in der Abhandlung „Transformation der hyperelliptischen Functionen $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche" (Clebsch Ann. XV. 315, s. F. d. M. XI. 1879. 312) angewendet hat. Diese Arbeiten sind Herrn Darboux, wie er in der letzten Note erklärt, erst später bekannt geworden. Die Resultate stimmen deshalb vielfach überein. Bemerkt sei, dass Herr Darboux auch den Specialfall berücksichtigt, in welchem die Kummer'sche Fläche in die Wellenfläche übergeht, wie dies von anderen Gesichtspunkten ausgehend bereits Herr H. Weber (Ueber die Kummer'sche Fläche etc. Borchardt J. LXXXIV. 332-355, s. F. d. M. X. 1880. 533) getan hat.

Herr Brioschi teilt in der zweiten Note die Darstellung der Coordinaten der Punkte der Kummer'schen Fläche durch irrationale Functionen zweier Parameter mit. Er geht aus von den funfzehn algebraischen Functionen, welche sich durch die Beziehung zweier ϑ-Functionen ausdrücken lassen, und den Eigenschaften dieser algebraischen Functionen, welche Herr Weierstrass in der Abhandlung zur Theorie der Abel'schen Functionen festgestellt hat. In der letzten Note giebt Herr Darboux nach der oben erwähnten Anerkennung der Priorität des Herrn K. Rohn die Methode an, welche er in seinen letzten Vorlesungen benutzt hat, um den Zusammenhang zwischen der Kummer'schen Fläche und den ϑ-Functionen aufzudecken. Dieselbe war im Wesentlichen

folgende: Projicirt man die Punkte einer beliebigen Fläche vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt von diesem letzteren als Projectionscentrum aus auf irgend eine Bildebene ($t=0$), so werden im Allgemeinen die Bilder zweier Punkte zusammenfallen, oder die Fläche ist auf die doppelt gedachte Ebene abgebildet. Die Uebergangscurve, durch welche die beiden Blätter der Ebene zusammenhängen, ist eine Curve sechster Ordnung, welche sich für die Kummer'sche Fläche in sechs Gerade auflöst, die sämmtlich einen Kegelschnitt (K) berühren. Bei passender Wahl des Coordinatentetraeders wird die Gleichung von (K) sein:

$$y^2-xz=0.$$

Eine Tangente desselben hat die Gleichung

$$xm^2+2ym+z=0$$

und ist durch den Parameterwert m bestimmt. Durch $m=\varrho$ und $m=\varrho_1$ werden zwei Tangenten, also auch ihr Schnittpunkt in der Ebene definirt, so dass ϱ und ϱ_1 als Coordinaten der Ebene betrachtet werden. Sind dann a, b, c, d, e, f die Parameter der sechs Tangenten von (K), welche die Uebergangscurve bilden, so sind die homogenen Coordinaten des Punktes der Kummer'schen Fläche, welche in der Abbildung dem Punkte (ϱ, ϱ_1) entsprechen:

$$x:y:z:t=(a-\varrho)(a-\varrho_1):(b-\varrho)b-\varrho_1):(c-\varrho)(c-\varrho_1):R,$$

wo

$$R=\left[\frac{\sqrt{(a-\varrho)(b-\varrho)(c-\varrho)(d-\varrho_1)(e-\varrho_1)(f-\varrho_1)}\pm\sqrt{(a-\varrho_1)(b-\varrho_1)(c-\varrho_1)(d-\varrho)(e-\varrho)(f-\varrho)}}{\varrho-\varrho_1}\right]$$

Der Zusammenhang dieser Formeln mit denen des Herrn Cayley (On the double thetafunctions etc. und On the 16-nodal quartic surface, Borchardt J. LXXXIII. 210 u. LXXXIV. 238, s. F. d. M. IX. 1877. 365 und 567) ist sofort zu erkennen. Die Parameter ϱ und ϱ_1 erhalten, wie man sieht, eine sehr anschauliche geometrische Bedeutung. A.

K. Rohn. Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche. Klein Ann. XVIII. 96-160.

Die Untersuchung erstreckt sich auf die verschiedenen Ge-

stalten der allgemeinen Kummer'schen Fläche und im Anschlusse daran der Linienfläche vierter Ordnung mit zwei Doppelgeraden in Hinsicht auf die Realitätsverhältnisse. Das Resultat im Allgemeinen ist, dass es acht verschiedene Kummer'sche Flächen und sieben verschiedene Linienflächen giebt. Den Methoden nach, welche bei der Untersuchung benutzt sind, zerfällt die ganze Arbeit in drei Abschnitte. Im ersten Abschnitte sind homogene Liniencoordinaten zu Grunde gelegt, deren Bedeutung für die Behandlung der Kummer'schen Fläche von Plücker, Clebsch und Herrn Klein erkannt und von Letzterem in besonders helles Licht gesetzt ist. Diese Betrachtungen hat der Herr Verfasser bereits früher in seiner Dissertation (Betrachtungen über die Kummer'sche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperelliptischen Functionen $p=2$. München. Siehe F. d. M. X. 1878. 531) mit grossem Erfolg für die Untersuchung der Kummer'schen Fläche benutzt. Der zweite Abschnitt ist der topologischen Behandlung gewidmet, welche, von Cayley in die Geometrie der Ebene eingeführt, hier auf den Raum ausgedehnt wird. Der letzte Abschnitt giebt die Gleichungen der acht verschiedenen Flächengattungen in Punktcoordinaten. Alle Gleichungsformen werden aus einer einzigen durch imaginäre lineare Transformationen abgeleitet. Als Ausgangspunkt für die liniengeometrische Behandlung dienen die Typen der Liniencoordinatensysteme, welche Herr F. Klein aufgestellt hat. Es existirt bekanntlich zwischen den sechs homogenen Coordinaten einer Geraden eine Relation zweiten Grades, welche durch reelle lineare Transformation in die Form

$$z_1^2-z_2^2+z_3^2-z_4^2+z_5^2-z_6^2=0$$

übergeht. Um diesen Ausdruck in eine Summe von sechs Quadraten zu verwandeln, ist eine imaginäre Substitution erforderlich. Solcher Substitutionen lassen sich vier unterscheiden, welche Herr Klein als die vier Typen der Liniencoordinatensysteme bezeichnet. Bedeutet nämlich α, β eine der drei Gruppen 1, 2; 3, 4 oder 5, 6, so kann man setzen:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_\alpha = z_\alpha \\ x_\beta = iz_\beta \end{array} \right\}$$

oder

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2}\,x_\alpha = z_\alpha + i z_\beta \\ \sqrt{2}\,x_\beta = z_\alpha - i z_\beta\end{array}\right\},$$

und je nachdem man die erste Substitution für alle drei Gruppen anwendet, oder die erste zweimal, die zweite einmal, oder die erste einmal, die zweite zweimal, oder endlich die zweite dreimal, entstehen jene vier Typen. Die identische Relation wird in jedem Falle

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Soll die Gerade reell sein, so müssen beim ersten Typus die Coordinaten 1, 3, 5 reell, 2, 4, 6 rein imaginär sein, beim zweiten 1 und 3 reell, 2 und 4 rein imaginär, 5 und 6 conjugirt, beim dritten 1 reell, 2 rein imaginär, 3 und 4 conjugirt, 5 und 6 conjugirt, beim dritten alle drei Paare conjugirt. Vermöge des gewählten Coordinatensystems hängt jede Gerade mit 31 anderen zusammen, welche sich nur durch die Vorzeichen der Coordinaten unterscheiden. Von diesen sind 16 „conjungirt", d. h. durch eine grade Anzahl von Zeichenwechseln verschieden, die anderen 16 adjungirt. Beim ersten Typus ist, wenn eine Gerade reell ist, das ganze zugehörige System der 32 Geraden reell, beim zweiten sind nur 16, beim dritten und vierten nur 8 reell. Die Hälfte der reellen Geraden ist einer derselben conjungirt, die andere Hälfte ist ihr adjungirt. Hiermit hängt noch die Realität der Directricen, Linienflächen und Congruenzen zusammen, wie in der Arbeit weiter ausgeführt wird. Um nun zur Kummer'schen Fläche zu gelangen, betrachtet der Herr Verfasser, wie in seiner Dissertation, nach dem Vorgange des Herrn Klein, die Schaar von Complexen zweiten Grades mit dem Parameter λ, welche characterisirt ist durch die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{\varkappa_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{\varkappa_2-\lambda} + \frac{x_3^2}{\varkappa_3-\lambda} + \frac{x_4^2}{\varkappa_4-\lambda} + \frac{x_5^2}{\varkappa_5-\lambda} + \frac{x_6^2}{\varkappa_6-\lambda} = 0$$

und ein „confocales System" genannt wird. Die Singularitätenfläche dieses Complexes ist die Kummer'sche Fläche. Durch Anwendung auf die vier Typen von Coordinatensystemen werden nun die verschiedenen Gattungen der Kummer'schen

Fläche bestimmt. Die Kummer'sche Fläche wird nämlich immer dann und nur dann reell, wenn die imaginären Complexe des confocalen Systems paarweise conjugirt sind. Es ergiebt sich nun, dass beim ersten Typus die sechs Constanten reell sind, beim zweiten vier, beim dritten zwei, beim vierten keine, und die nicht reellen sind paarweise conjugirt. Die einzelnen Typen ergeben wieder Unterabteilungen, die sich kurz so characterisiren:

Ia. Sechzehn Knotenpunkte und sechzehn reelle Doppelebenen. Die Fläche besteht aus acht Teilen, deren jeder eine tetraedrische Form hat.

Ib. Keine reelle Knotenpunkte, keine reelle Doppelebenen. Die Fläche besteht aus zwei getrennten Teilen, deren jeder mit einem einschaligen Hyperboloid Aehnlichkeit hat; sie ist durchweg negativ gekrümmt.

Ic. Die Fläche ist ganz imaginär.

IIa. Acht reelle Knotenpunkte und acht reelle Doppelebenen. Die Fläche besteht aus vier gleichartigen Teilen von tetraedrischer Gestalt, die in den Knotenpunkten zusammenhängen.

IIb. Keine reelle Knotenpunkte und keine reelle Doppelebenen. Die Fläche besteht aus einem Flächenteile, der einem einschaligen Hyperboloide ähnlich ist.

III. Vier reelle Knotenpunkte, vier reelle Doppelebenen. Die Fläche besteht aus zwei Teilen von tetraedrischer Form.

IVa. Vier reelle Knotenpunkte, vier reelle Doppelebenen. Die Fläche besteht aus zwei Teilen, deren jeder Aehnlichkeit mit einem Ellipsoid oder zweischaligen Hyperboloid hat. Eine derselben umgiebt die andere, doch so, dass sich die beiden Teile in vier Punkten berühren. Hierzu gehört u. a. die Fresnel'sche Wellenfläche.

IVb. Die Fläche ist imaginär.

Der zweite Abschnitt ist der topologischen Untersuchung der Flächen gewidmet. Variirt man continuirlich die Constanten einer Fläche, so verändert die Fläche ihre Gestalt. Zerfällt die Gleichung in ein Product, so ist die Fläche in Flächen niederer Ordnung aufgelöst. Tritt einer der Factoren quadratisch auf, so ist der betreffende Bestandteil der Fläche doppelt zu denken.

Diese singulären Grenzfälle können nun dazu dienen, die Gestaltverhältnisse zu studiren, indem man erstens die nötigen Grenzfälle aufsucht, und dann zeigt, durch welche Deformationen aus ihnen die einzelnen Gestalten abgeleitet werden, ohne dass bei dieser Deformation ein anderer Grenzfall überschritten zu werden braucht. Bei der Kummer'schen Fläche existirt nun der Grenzfall, dass die Fläche in eine doppelt gedachte reelle Fläche zweiten Grades ausgeartet ist. Auf dieser doppelt gedachten Fläche zweiten Grades liegen acht Erzeugende, vier aus jeder Schaar, deren sechzehn Schnittpunkte die Knotenpunkte, und deren sechzehn Ebenen die Doppelebenen vertreten, während sie selbst die Berührungskegelschnitte in den Doppelebenen vertreten. Die acht Erzeugenden teilen (so viele von ihnen reell sind) die Fläche in verschiedene Felder; zwei Felder, welche in einer Erzeugenden zusammenstossen, sind von ungleichartiger Beschaffenheit; ist das eine aus reellen Punkten, so ist das andere aus imaginären Punkten entstanden. Man hat sich daher die Fläche schachbrettartig einzuteilen, dann die reellen Felder doppelt bedeckt zu denken, dagegen die imaginären Felder wegzulassen und nun die Deformation zu beginnen, wodurch die doppelt bedeckten reellen Felder sich aufblasen. Dieser Process wird nun an den verschiedenen Typen verfolgt, namentlich in Hinsicht auf die Realität jener acht Erzeugenden, und es wird so ein sehr anschaulicher Einblick in die Gestaltsverhältnisse gewonnen. Als specielle Fälle ergeben sich hierbei noch die Linienflächen (geradlinige Flächen mit zwei Doppelgeraden) und zwar liefert der Typus I. fünf Arten derselben. Typus II. liefert zwei weitere, III. liefert keine neuen und IV. überhaupt keine.

In Bezug auf den dritten Abschnitt möge das bereits oben Gesagte genügen, da eine eingehendere Besprechung seines Inhaltes ohne ausführlichen Rechnungsapparat nicht angänglich ist. Man kann wol sagen, dass durch die vorliegende Arbeit die Frage nach den Gestaltsverhältnissen der allgemeinen Kummer'-Fläche vollständig erschöpfend behandelt ist. A.

F. Klein. Bemerkungen über Flächen vierter Ordnung. Klein Ann. XVIII. 160.

Im Anschluss an die oben besprochene Arbeit des Herrn Rohn teilt der Herr Verfasser in einer kurzen Note mit, dass man eine Fläche vierter Ordnung construiren kann, welche aus neun getrennten Teilen besteht, von denen einer einen ringartigen Zusammenhang aufweist. A.

F. Béla. Ueber die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt. Klein Ann. XIX. 291-322.

Sind $\varphi = 0$, $\psi = 0$ die Gleichungen beliebiger Flächen zweiten Grades, $p = 0$ die Gleichung einer Ebene, so hat jede Fläche vierter Ordnung, welche den Kegelschnitt $p = 0$, $\varphi = 0$ zum Doppelkegelschnitt hat, eine Gleichung von der Form

$$\varphi^2 - 4p^2\psi = 0.$$

Die vier Durchschnittspunkte des Doppelkegelschnittes mit ψ sind im Allgemeinen Cuspidalpunkte. Liegt aber der Kegelschnitt ψ, p ganz auf der Fläche ψ, hat also ψ die Form $\varphi + \mu pr$, so wird er zum Cuspidalkegelschnitt. Mithin wird die Gleichung der zu betrachtenden Fläche

$$F \equiv \varphi^2 - 4p^2\varphi - 4\mu p^3 r = 0,$$

oder, wenn man setzt:

$$(\varphi - 2p^2) = U, \quad -4(\mu r + p) = q,$$
$$F \equiv U^2 + p^3 q = 0$$

oder auch

$$(U + \lambda p^2)^2 = p^2(\lambda^2 p^2 + 2\lambda U - pq).$$

Von dieser Grundlage aus werden in der Abhandlung noch einige andere Gleichungsformen und Erzeugungsweisen der Fläche F entwickelt und im Anschluss daran einige Eigenschaften hergeleitet, u. A. die, dass die Tangentialebenen längs des Cuspidalkegelschnittes Up durch einen festen Punkt P gehen und einen Kegel zweiten Grades bilden. In einem zweiten Abschnitte werden die ebenen Schnitte der Fläche F, in einem dritten die umschriebenen Kegelflächen untersucht. Im vierten Abschnitte werden ebene Curven von niederer als der vierten Ordnung aufgesucht,

welche auf der Fläche liegen. Es giebt auf derselben acht Gerade, sechs einfach unendliche Schaaren von Kegelschnitten und acht einfach unendliche Schaaren von Ebenenbüscheln. Der fünfte Abschnitt behandelt gewisse involutorische Eigenschaften, der sechste beschäftigt sich mit der Kernfläche (Hesse'sche Fläche) von F, welche in die Fläche zweiten Grades U und eine gewisse Fläche zweiter Ordnung H zerfällt. Im siebenten Abschnitt endlich werden gewisse Raumcurven aufgesucht, welche der Fläche F angehören. Jeder der acht Geraden der Fläche ist eine zweifach unendliche Schaar von Raumcurven dritter Ordnung zugeordnet, die man als Durchschnitt der Fläche mit einer Fläche zweiten Grades erhält, welche ausserdem durch den Cuspidalkegelschnitt und durch jene Gerade geht. Ferner giebt es auf der Fläche eine dreifach unendliche Schaar von Raumcurven vierter Ordnung und erster Art, nämlich Durchschnitte der Fläche mit solchen Flächen zweiten Grades, welche ausserdem durch den Cuspidalkegelschnitt gehen. Andererseits aber liegen auf der Fläche noch zwölf einfach unendliche Schaaren von Raumcurven vierter Ordnung und zweiter Art. Die Gestalts- und Realitätsverhältnisse gedenkt der Herr Verfasser in einer besonderen Arbeit zu untersuchen. A.

C. Crone. Om Fladerne af fjerde Orden med Tilbagegangskeglesnit og deres Konturer, med särligt Hensyn til Realitetsegenskaberne. Diss. Kjöbenhavn.

Eine Fläche der vierten Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt kann durch einen beweglichen Kegelschnitt, welcher zwei feste Ebenen X und Y in zwei festen Punkten berührt, erzeugt werden. Sie kann deshalb durch eine homographische Transformation in eine Umdrehungsfläche übergeführt werden. In der vorliegenden Abhandlung wird eine geometrische Untersuchung solcher Flächen mit besonderer Rücksicht auf ihre Conturen und Realitätseigenschaften gegeben. Durch Betrachtung der verschiedenen Stellungen des erzeugenden Kegelschnittes geht erstens eine Einteilung der Flächen in drei Arten hervor. Diese sind die folgen-

den. 1) Flächen, für welche der Cuspidalkegelschnitt $K^{(2)}$ reell ist und in zwei reellen Punkten eine gewisse Ebene D berührt; 2) $K^{(2)}$ ist zwar reell, aber seine Schnittpunkte mit D sind imaginär; 3) $K^{(2)}$ ist imaginär. Die Ebene D ist eine solche, dass sie die Fläche $F^{(4)}$ längs eines erzeugenden Kegelschnittes berührt. Die Untersuchung der beiden letzten Gattungen kann aber auf die erste zurückgeführt werden mit Hülfe einer speciellen Transformation, die zwar nicht reell ist, bei der jedoch reelle Kegelschnitte einander entsprechen. Eine Untersuchung der Flächen erster Art ergiebt aber, dass sie immer aus nur einem Netze bestehen, während die beiden anderen zwei getrennte Netze haben können; die dritte Gattung endlich kann auch lauter imaginäre Punkte besitzen. Um diese Verhältnisse besser zu beleuchten, ist eine Reihe von Zeichnungen der Curven vierter Ordnung mit zwei Spitzen, welche durch Schneidung mit einer Ebene vorkommen können, gegeben. Nachdem der Verfasser in dem nächsten Abschnitt die Haupttangentenflächen untersucht und namentlich gezeigt hat, dass durch jeden Punkt vier Haupttangentenflächen gehen, von welchen zwei reell sind, und dass es ferner vier solche giebt, welche eine gegebene Ebene berühren, geht er zur Betrachtung solcher Haupttangentenflächen über, welche zu Kegeln reducirt sind. Insbesondere wird die Frage nach der Realität derselben erschöpfend behandelt. Demnächst folgen Untersuchungen über die Contur der Fläche, aus einem willkürlichen Punkte gesehen. Diese wird eine Curve $k^{(6)}$ der sechsten Ordnung und der sechsten Klasse mit acht Spitzen und acht Wendetangenten, aber ohne Doppelpunkte und Doppeltangenten. Sie ist mit sich selbst collinear. Das charakteristische Doppelverhältnis der Collineation ist -1. Es wird analytisch bewiesen, dass für jede solche Curve die vier Geraden durch das Collineationscentrum, die je zwei Spitzen enthalten, äquianharmonisch liegen. Dadurch ergiebt sich, dass alle Formen von $k^{(6)}$ als Contur der Fläche vorkommen können, wenn das Projectionscentrum in der Ebene des Cuspidalkegelschnittes gewählt wird. Die Contur hat null bis drei Zweige, höchstens vier Spitzen, und vier Wendetangenten sind reell. Die verschiedenen Formen werden durch

Figuren illustrirt. In dem letzten Abschnitt betrachtet der Verfasser u. A. die Kegelschnitte, in welchen eine Tangentenebene eines der Kummer'schen Kegel die Flächen schneidet. Diese Kegelschnitte haben Berührung der zweiten Ordnung in denjenigen Punkte, wo die Tangentenebene $k^{(2)}$ berührt. Die Realität dieser Kegelschnitte wird untersucht, ebenso werden Systeme von Flächen der zweiten Ordnung durch $k^{(2)}$ angegeben, für welche $F^{(4)}$ Enveloppe ist. Gm.

L. Cremona. Sopra una certa superficie di quart' ordine. Chelini, Coll. Math. 413-424.

Zwei projectivische Büschel von Flächen zweiten Grades

$$s_1 + \lambda s_2 = 0, \quad s_3 + \lambda s_4 = 0$$

erzeugen die Fläche vierten Grades

$$s_1 s_4 - s_2 s_3 = 0,$$

welche auch erzeugt werden kann durch die Büschel

$$s_1 + \mu s_3 = 0; \quad s_2 + \mu s_4 = 0.$$

Es liegen mithin auf der Fläche zwei Schaaren von Raumcurven 4ter Ordnung und erster Art. Wenn nun alle vier Flächen s durch denselben Punkt O gehen, so erhält man eine Fläche 4ter Ordnung, welche in O einen uniplanaren Doppelpunkt hat, welche sich also in O selbst berührt. Die durch O gelegten ebenen Schnitte haben in O zwei in einen zusammengefallene Doppelpunkte, und die singuläre Tangentialebene in O schneidet die Fläche in vier durch O gehenden Geraden. Sind x, y, z, w homogene Coordinaten, und sind u und v homogene Functionen von x, y, z, bezüglich 2ten und 4ten Grades, so kann die Gleichung dieser speciellen Fläche stets in die Form gebracht werden:

$$F = hw^2x^2 + uwx + v = 0,$$

wo h eine Constante bedeutet, und zwar ist der Punkt $x = y = z = 0$ der uniplanare Knotenpunkt O und die Ebene $x = 0$ die singuläre Tangentialebene. Mit der Untersuchung dieser Fläche beschäftigt sich nun die vorliegende Arbeit. Da die Raumcurven 4ter Ordnung, welche die Durchschnitte entsprechender Glieder

der oben erwähnten projectivischen Büschel sind, in diesem Falle in O einen Doppelpunkt haben, so sind sie rational. Daraus folgt, nach einem Theorem von Noether, dass F sich eindeutig auf die Ebene abbilden lässt. Jene Raumcurven lösen sich in gewissen Fällen in je zwei Kegelschnitte auf, welche durch Null gehen. Dieser Umstand bietet die Handhabe, durch eine räumliche Verwandtschaft, welche der Herr Verfasser gleichzeitig mit den Herrn Cayley und Noether zuerst untersucht hat (Vgl. u. a. Gött. Nachr. 1871. 129-148, Clebsch Ann. IV. 213-230, Rend. d. Ist. Lomb. 1871. 269-279, 315-324, F. d. M. III. 425-430), die Fläche auf einfache Weise in eine Fläche dritter Ordnung F' zu transformiren und dadurch die allgemeinen Eigenschaften der Fläche F zu untersuchen. So folgt z. B. aus dem Umstande, dass die Flächen dritten Grades 27 Gerade enthalten, dass ferner durch den dem Punkte O entsprechenden Punkt O' der Fläche F' 27 Kegelschnitte derselben gehen, und dass dem ebenen Schnitt der Tangentialebene von F' in O' in F ein in zwei Kegelschnitte aufgelöster Schnitt entspricht, dass die Fläche F im Allgemeinen 56 Kegelschnitte enthält, welche alle durch O gehen und paarweise in je 28 Ebenen liegen; sowie auch, dass die Fläche F im Allgemeinen keinen weiteren Kegelschnitt enthalten kann. Eine grosse Reihe weiterer Eigenschaften, welche sich durch diese Betrachtung gewinnen lassen, muss hier übergangen werden. Ebenso bietet die Abbildung in die Ebene ein Mittel zur weiteren Untersuchung. A.

V. Jamet. Sur une classe de surfaces du quatrième ordre. Nouv. Ann. (2) XX. 344-348, 385-391, 434-444.

Mit dem Namen Gyrocycliden hat Herr Amigues diejenigen Flächen bezeichnet, welche Enveloppen einer einfachen Schaar von Kugeln sind, die durch zwei feste Punkte gehen. Es werden diese Flächen, wenn man als Transformationspol einen der beiden festen Punkte wählt, durch reciproke Radien in Kegel transformirt, und diese Transformation bietet die Handhabe, um eine grosse Anzahl von Eigenschaften der betrachteten Flächen her-

zuleiten. Wird insbesondere der Ort der Centra ein Kegelschnitt, so erhält man diejenigen Gyrocycliden, welche sich in Kegel zweiten Grades transformiren. Dieselben sind vom vierten Grade. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Eigenschaften dieser Flächen, so weit sie sich aus der Transformation durch reciproke Radien gewinnen lassen, bei der bekanntlich die Winkel und die Krümmungslinien sich erhalten, Kugeln im Allgemeinen wieder in Kugeln übergehen, dagegen Kugeln durch den Transformationspol in Ebenen; und umgekehrt. Es werden namentlich die Krümmungslinien, sowie die den Focaleigenschaften der Kegel entsprechenden Eigenschaften der Fläche untersucht. Diejenigen der betrachteten Flächen, welche aus Rotationskegeln transformirt sind, werden vom Verfasser nach Herrn Amigues Digyrocycliden genannt. Es sind dies die Darboux'schen einfachen Cycliden. Sie haben die charakteristische Eigenschaft, dass auch die beiden Kegel, welche über der Mittelpunktscurve als Basis errichtet sind und je einen der beiden Knotenpunkte zu Scheiteln haben, Rotationskegel sind. A.

H. M. Jeffery. On spherical quartics with a quadruple cyclic arc and a triple focus. Lond., M. S. Proc. XII. 168-177.

Diese Arbeit enthält eine Fortsetzung der Untersuchungen des Herrn Verfassers, über welche in den früheren Bänden der F. d. M. (siehe zuletzt XII. 1880. p. 566 und 610) berichtet worden ist. Nach den in den früheren Referaten besprochenen Gesichtspunkten werden die sphärischen Curven vierter Ordnung mit einem vierfachen cyklischen Bogen und einem dreifachen Brennpunkt classificirt, und ihrer Gestalt nach genauer discutirt. A.

V. Liguine. Sur les aires des courbes anallagmatiques. Darb. Bull. (2) V. 250-264.

Eine anallagmatische Curve c kann definirt werden als die Enveloppe einer Schaar von Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer

Curve a (der Deferente) liegen, und welche einen festen Kreis p rechtwinklig schneiden, dessen Mittelpunkt P sei. Die Coincidenzpunkte eines der Schaar angehörenden Kreises mit dem Mittelpunkte a (d. h. die Durchschnittspunkte desselben mit dem unendlich nahen Kreise) c_1 und c_2 liegen auf der Senkrechten von P auf die Tangente der Deferente in a, entsprechen einander also gegenseitig bei der Transformation durch reciproke Radien in Bezug auf P als Pol und den Radius α des Kreises p als Radius. Die Curve c entspricht also bei dieser Transformation sich selbst. Nennt man noch b den Fusspunkt der oben bezeichneten Senkrechten, deren Ort also die Fusspunktencurve der Deferente in Bezug auf P als Pol ist, ist ferner $\varrho = \Omega$ die Polargleichung derselben, also $Pb = \varrho$, und Ω eine gewisse Function des Richtungswinkels ω von Pb, so ist, wie Herr Mannheim gezeigt hat, die Polargleichung der anallagmatischen Curve c

$$r^2 - 2\Omega r + \alpha^2 = 0.$$

Diese Beziehung gestattet nun, Relationen aufzustellen zwischen den entsprechenden Sectoren der beiden Aeste der anallagmatischen Curve c (sie seien A_1 und A_2) und der Fusspunktencurve b der Deferente, alle zwischen $\omega = \omega'$ und $\omega = \omega''$ genommen. Es ist nämlich

$$\frac{A_1 + A_2}{2} = 2B - C,$$

wo B den entsprechenden Sector von b, C den entsprechenden Sector des festen Kreises p bedeuten. Andererseits ist

$$\frac{A_1 - A_2}{2} = \int_{\omega'}^{\omega''} \Omega\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}\, d\omega.$$

Man kann dem ersten dieser Resultate eine andere Form geben und gelangt dann zu dem Satze: „Die Differenz der Flächenstücke, welche zwischen je einem Ast der anallagmatischen Curve, der Fusspunktencurve und zwei beliebigen von P ausgehenden Strahlen liegen, ist gleich dem Doppelten des Flächenstückes zwischen der Fusspunktencurve, dem festen Kreise und denselben Vectoren." Ferner findet man durch Anwendung einer von Herrn Ribaucour (Sur les courbes enveloppes de cercles etc. Nouv. Corr. math.

V. 339, siehe F. d. M. XI. 1879. 421) aufgestellten Relation den folgenden Satz: „Die Differenz der Flächenstücke, welche zwischen je einem Aste der anallagmatischen Curve, den äussersten Normalen und der Deferente liegen, ist gleich dem Doppelten des Flächenstückes zwischen der Deferente, dem festen Kreise und den beiden Vectoren nach den Fusspunkten der äussersten Normalen." Diese beiden Relationen werden nun auf verschiedene specielle anallagmatische Curven angewendet und führen zu interessanten Resultaten. Es werden zunächst die Cartesischen Ovale betrachtet, deren Deferenten Kreise sind, dann solche anallagmatische Curven, die zur Deferente eine Ellipse haben, welche concentrisch mit dem festen Kreise ist; endlich solche, deren Deferente die logarithmische Spirale mit der Gleichung $\varrho' = ab^{\omega}$ ist. Zum Schluss werden die aufgestellten Relationen in umgekehrter Weise angewendet, so dass die Differenz der betrachteten Flächenstücke gegeben ist und daraus die Gestalt der Deferente bestimmt wird. Auch hiervon wird eine einfache Anwendung gemacht.

A.

S. Roberts. Note on a space-locus. Quart. J. XVII. 280-284.

Wenn eine Sehne von constanter Länge sich mit ihren Endpunkten in einem Ellipsoide bewegt, so ist der Ort der Mittelpunkte ein Teil des Raumes, welcher durch die Teile einer Fläche sechster Ordnung eingeschlossen ist. Diese Grenzfläche hat Herr Glaisher (Quart. J. XVI. 283-294, siehe F. d. M. XI. 1879. 581) discutirt. Später hat Herr Mannheim durch kinematische Betrachtungen dargetan, dass diese Fläche den Raum abgrenzt, in den die Sehnen von constanter Länge nicht eintreten können, und bewiesen, dass die Normalen an der Ellipse in den Endpunkten einer solchen Grenzsehne sich schneiden. Hieraus folgerte er eine Construction der Normale an dem betreffenden Ort, welche mit dem entsprechenden Problem in der Ebene eine gewisse Analogie darbietet. In der vorliegenden Arbeit verallgemeinert Herr Roberts die von Herrn Glaisher discutirte Frage, indem er statt des Mittelpunkts der constanten Sehnen einen Punkt wählt,

der die Sehnen nach einem gegebenen Verhältnis teilt. Die Construction der Normale an der entsprechenden Fläche bietet eine weitere Analogie mit dem Fall in der Ebene.

Schn.

VERSTRAETEN et MISTER. Courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un hélicoïde à plan directeur. Math. I. 49-51, 137-139.

Mn.

S. LIE. Zur Theorie der geodätischen Curven der Minimalflächen. Lie Arch. VI. 490-501.

Liouville hat bekanntlich gezeigt, dass die geodätischen Curven einer jeden Fläche bestimmt werden können, deren Bogenelement die Form

$$(1) \qquad ds^2 = [\varphi(x+y) + \Phi(x-y)]\,dx\,dy$$

besitzt. Sucht man daher specielle Minimalflächen, deren geodätische Curven bestimmbar sind, so liegt es nahe, zuerst alle Minimalflächen aufzusuchen, deren Bogenelement die Form (1) besitzt. Dieses Problem drückt sich durch eine Functionalgleichung aus, deren Behandlung einige Rechnungen verlangt, sonst aber keine Schwierigkeit darbietet. Man findet nur die von Bour entdeckten Minimalflächen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind. Verlangt man alle Minimalflächen, deren geodätische Curven eine infinitesimale Transformation gestatten, so erhält man ausser den soeben besprochenen Flächen nun die zuerst vom Verfasser untersuchten Minimalflächen, die unendlich oft mit sich selbst ähnlich sind. Diese letzten Flächen lassen sich übrigens auch dadurch charakterisiren, dass eine jede ihrer Minimalcurven (courbes isotropes) eine infinitesimale lineare Transformation in sich gestattet.

L.

S. Lie. Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichung $s^2-rt=\frac{(1+p^2+q^2)^2}{a^2}$. Lie Arch. VI. 153-167.

Führt man bei der partiellen Differentialgleichung der Flächen constanter Krümmung

$$(1) \qquad s^2-rt=\frac{(1+p^2+q^2)^2}{a^2}$$

eine beliebige Berührungstransformation

$$z=Z(x'\,y'\,z'\,p'\,q'), \quad x=X(\ldots), \quad y=Y(\ldots)$$

aus, so erhält man eine neue partielle Differentialgleichung 2ter Ordnung, deren Form im Allgemeinen von (1) verschieden ist. Man kann sich insbesóndere die Aufgabe stellen, alle Berührungstransformationen zu bestimmen, welche die Gleichung (1) in sich transformiren. Die gesuchten Transformationen gehören einer Gruppe an, die gewisse infinitesimale Transformationen enthält. Es ist vorteilhaft, die gestellte Aufgabe in der Weise anzugreifen, dass man alle infinitesimalen Transformationen aufsucht, welche die Gleichung (1) in sich transformiren. Dieses reducirte Problem drückt sich aus durch vier simultane lineare partielle Differentialgleichungen 2ter Ordnung mit einer abhängigen und fünf unabhängigen Variabeln. Ihre allgemeinsten gemeinsamen Lösungen werden bestimmt. Es ergiebt sich, dass jede infinitesimale Berührungstransformation, welche alle Flächen constanter Krümmung in ebensolche umwandelt, den analytischen Ausdruck einer infinitesimalen Bewegung darstellt.

Wenn eine Berührungstransformation geodätische Curven in ebensolche umwandelt, so ist sie eine orthogonale Transformation des Raumes. L.

N. Salvatore-Dino. Sopra una superficie di area minima, nebst Bericht von E. Fergola, A. de Gasparis, N. Trudi. Nap. Rend. XIX. 148-157.

Der Verfasser behandelt eine specielle Minimalfläche 12ter Ordnung und 12ter Klasse nach der Methode von Weierstrass,

die Lie in Clebsch Ann. XIV. p. 331 (siehe F. d. M. XI. 1879. p. 587) auseinandergesetzt hat. Zum Schluss giebt er eine Erzeugung der Fläche durch die Curve, die durch den Schnitt eines Cylinders und eines Rotationshyperboloides entsteht. O.

Capitel 4.

Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

E. D'OVIDIO. Nota sulle proprietà fondamentali dei complessi lineari. Torino, Atti XVI. 327-337.

Kurze synthetische Herleitung der wichtigsten Eigenschaften des linearen Complexes. V.

E. D'OVIDIO. Teoremi sui complessi lineari nella metrica proiettiva. Lomb. Rend. (2) XIV. 405-415.

Als Axen eines linearen Complexes hat man bei projectiver Massbestimmung die beiden Complexe anzusehen, welche in Bezug auf den Complex und die absolute Quadrifläche dieselbe Polare besitzen. Dieselben sind speciell, ihre Directricen sind gegenüber liegende Kanten des von den vier dem Complexe und der Fläche gemeinsamen Strahlbüscheln gebildeten Tetraeders. Die metrischen Beziehungen derselben werden nun mit Hülfe der von Herrn d'Ovidio in früheren Schriften eingeführten Begriffe des Momentes, des Comomentes, der Distanz zweier Geraden, des Moduls eines Complexes etc. aufgestellt, zwischen deren analytischen auf Grund der in Liniencoordinaten gegebenen Gleichung des Absoluten entwickelten Ausdrücken eine Reihe interessanter Beziehungen nachgewiesen wird, welche der Verfasser in seinen Untersuchungen über projective Geometrie von n Dimensionen weiter auszuführen beabsichtigt. V.

K. Bobek. Ueber metrische Beziehungen, die in einer Congruenz linearer Complexe stattfinden. Wien. Ber. LXXXIII. 885-902.

Die von Plücker in seiner „Neuen Geometrie des Raumes" analytisch ausgeführten Untersuchungen über die lineare Congruenz, insbesondere über die von den Axen eines Büschels linearer Complexe gebildete Fläche und die auf denselben liegende charakteristische Curve werden hier synthetisch entwickelt. Die Congruenz wird dabei als Inbegriff der Strahlen definirt, welche die entsprechenden Punkte zweier ebener collinearer Systeme verbinden, deren Ebenen eine entsprechende Gerade gemein haben. Auf diesem Wege ergeben sich dann in einfacher Weise die Formeln, welche zuerst von Kummer über die Lage der Hauptebenen und Brennpunkte eines algebraischen Strahlensystems aufgestellt sind, welche sich freilich auch schon aus den von Plücker gegebenen Relationen hatten entnehmen lassen. V.

T. A. Hirst. On the complexes generated by two correlative pencils. Chelini, Coll. Math. 50-73.

Diese Arbeit, welche, abgesehen von einigen Erweiterungen, auch in den Lond. M. S. Proc. X. 131-143 (siehe F. d. M. XI. 1879. p. 589) erschienen ist, behandelt synthetisch den Complex zweiten Grades, welcher entsteht, wenn man jeden Punkt A einer Ebene E mit den Punkten der ihm reciprok zugeordneten Geraden a in einer Ebene E' verbindet. Es ist der von Herrn Weiler (Clebsch Ann. VII. 145-207. siehe F. d. M. V. 1873. p. 416) unter No. 13 beschriebene. Seine singulären Punkte erfüllen die Ebenen E, E' und eine Fläche zweiten Grades S_2, welche von den Ebenen A, a umhüllt wird; seine singulären Ebenen sind die Tangentenebenen der letzteren und zwei Ebenenbüschel, deren Centra e, e' auf der Schnittlinie von E, E' liegen; seine singulären Linien werden aus den beiden Geradenfeldern E und E', den beiden Bündeln e und e' und aus einer Congruenz (2, 2) ge-

bildet, deren Strahlen die S_2 berühren; der Complex hat endlich fünf Doppellinien, zwei Doppelpunkte und zwei Doppelebenen.

Auf eine elegante Weise gelangt der Verfasser zu der Construction aller Reciprocitäten, denen Complexe mit derselben Singularitätenfläche S_2, E, E' angehören. Solche Complexe bilden ein Involutionssystem, dessen eigentliche singuläre Linien den Tangentencomplex der S_2 bilden; in ihm befinden sich drei aus je zwei speciellen linearen bestehende Complexe. Gleichzeitig ergiebt sich für die jeweilige ergänzende Brennfläche der singulären Linien eine Fläche zweiten Grades. Endlich werden drei specielle Fälle besprochen. Im ersten gehen alle Doppellinien durch einen Punkt, im zweiten fallen sie in eine einzige zusammen, der letzte ist eine Specialisirung des vorhergehenden; sie ergeben die besonderen Complexe, welche Weiler in seiner Arbeit unter No. 40, B; 20; 45, A besprochen hat. V.

J. N. Franke. Ueber geometrische Eigenschaften von Kraft- und Rotationssystemen in Verbindung mit Liniencomplexen. Wien. Ber. LXXXIV. 570-595.

Jedem Kraftsysteme ist ein Nullsystem zugeordnet, gebildet von den Geraden, deren Moment in Bezug auf die gegebenen Kräfte gleich Null ist. Je zwei dem System äquivalente Kräfte haben zu Trägern reciproke Polaren desselben, und die Gesammtheit dieser Kräfte bildet einen linearen Kräftecomplex. Der Verfasser leitet zuerst diese bekannten Sätze her und beschäftigt sich dann insbesondere mit dem letzeren. Die Endpunkte der Strecken, welche die an einem Punkte angreifenden Kräfte des Complexes darstellen, liegen in einer zu der Nullebene des Punktes parallelen Ebene. Jedem Punkte ist daher eine kleinste Kraft zugeordnet, und die Wirkungslinien der in einem Punkte angreifenden Kräfte gleicher Intensität bilden einen Rotationskegel, dessen Axe die Richtung der kleinsten Kraft hat. Analoge Eigenschaften gelten für Rotationssysteme. Schliesslich wird noch ein Ausdruck für die Krümmung im Centralpunkte einer Erzeugenden der bei einer beliebigen Bewegung von irgend einer

Geraden beschriebenen Regelfläche ermittelt und gezeigt, dass die Geraden gleicher „Centralkrümmung" auf zwei Complexen zweiten Grades verteilt sind. V.

G. Peano. Costruzione dei connessi (1, 2) e (2, 2). Torino, Atti XVI. 497-507.

Der Connex [1, 2] ist vollkommen bestimmt, sobald man zu vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 die entsprechenden Curven zweiter Klasse K_1, K_2, K_3, K_4 kennt, welche einem Netze angehören. Die hier gegebene Construction des Connexes besteht nun darin, dass zu jedem Punkte P die entsprechende Curve K bestimmt wird. Die Lösung wird auf die wiederholt anzuwendende Construction desjenigen Kegelschnittes zurückgeführt, welcher in einer Kegelschnittschaar (schiera) sich in vereinigter Lage (posizione unita) mit einem gegebenen befindet.

Auf ähnliche Art kann auch die weit complicirtere Construction des Connexes [2, 2] ausgeführt werden; sie verlangt die Lösung der Aufgabe, zu fünf gegebenen Kegelschnitten den mit diesen vereinigt liegenden zu construiren, die zuerst von Herrn D'Ovidio näher ausgeführt wurde. V.

G. Battaglini. Sui connessi di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione semplice. Batt. G. XIX. 316-328.

Der Verfasser betrachtet den besonderen Fall, in welchem die Gleichung des Connexes [2, 2] sich auf die Form

$$f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 = 0$$

reducirt, in welcher f und φ Formen zweiten Grades, resp. zweiter Klasse bedeuten. Da man jene Relation auch in die Gestalt

$$\lambda f_1 + \mu f_2 = 0, \quad \lambda\varphi_2 - \mu\varphi_1 = 0$$

bringen kann, so läuft die Untersuchung wesentlich auf eine Interpretation der Beziehungen einer einem Büschel projectiv zugeordneten Schaar von Kegelschnitten hinaus, aus welcher, wie

es scheint, die weiteren in der Arbeit angeführten Resultate unmittelbar hergeleitet werden könnten. V.

Bonsdorff. Ueber einen neuen Connex im Raume. Pét. Bull. XXVII.

Der Connex, den der Verfasser einführen will, hat zu Elementen einen Punkt und eine Gerade im Raume. Es wird in dieser Note der allgemeine Strahlen-Connex m^{ter} Ordnung und n^{ten} Ranges definirt und der lineare Strahlen-Connex betrachtet. Ty.

G. Battaglini. Nota sui connessi ternarii di 1° ordine e di 1ª classe. Nap. Rend. XIX. 110-112. 1880.

Wenn die beiden Reihen von Variabeln, welche in den Ausdruck für eine ternäre bilineare Form eintreten, geometrisch durch die Coordinaten einer Geraden in einer andern Ebene dargestellt werden, so ergiebt sich nach Clebsch ein Connex erster Ordnung und erster Klasse. Der Discussion dieses Connexes von Punkten und Geraden ist die vorliegende Note gewidmet. O.

J. Möller. Om connexens $C(x, x, 0;\ u, u, 0)$ principalcoincidens. Lund., Act 1881.

M. L.

W. Stahl. Das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse. Kronecker J. XCI. 1-22.

Im Band LXXXVI. des Borchardt'schen Journals (F. d. M. X. 1878. p. 420) hatte Herr Reye gezeigt, wie die von Kummer behandelten Strahlensysteme zweiter Klasse (mit einer Ausnahme) auf ein Strahlenbündel bezogen werden können, und hieraus die Construction derselben hergeleitet, sowie ihre Brennflächen auf bekannte Flächen abgebildet. In der vorliegenden Arbeit wird das Strahlensystem zweiter Klasse dritter Ordnung, welches

Herr Reye in No. 21 seiner Abhandlung beschreibt, einer specielleren Untersuchung auf Grund der folgenden ganz elementaren Construction unterworfen: In der Ebene (0, 1) seien zwei reciproke Systeme, vermöge deren der Geraden l_0 der Punkt L_1 entspricht, ferner seien in den Ebenen A, B zwei lineare Büschel α, β mit gemeinsamem Strahle gegeben. Wird nun durch den Punkt L_1 der Strahl gelegt, welcher die von l_0 getroffenen Strahlen der Büschel α, β schneidet, so bildet die Gesammtheit dieser Strahlen (nach Ausscheidung eines Systems erster Klasse und Ordnung) das genannte System Σ_0. Ausser der singulären Ebene (0, 1) besitzt dasselbe noch vier andere, in denen ebenfalls Büschel zweiter Ordnung liegen. Ihre Construction wird vermittelt durch die vier Punkte M, N, O, P, in denen die Schnittlinien von A, B einer der Ordnungscurven der Reciprocität in (0, 1) begegnen. Das System enthält ferner zehn singuläre Punkte, resp. Ebenen, von denen lineare Büschel ausgehen; sechs derselben sind unmittelbar ersichtlich. Die Gruppirung dieser singulären Elemente wird genauer erläutert.

Da ferner vermöge der reciproken Beziehung jeder Geraden l, je nachdem sie als dem Systeme 0 oder aber dem System 1 angehörig betrachtet wird, zwei Punkte entsprechen, so existirt ein zweites Strahlensystem Σ_1, welches nach derselben Vorschrift construirbar ist. Der Verfasser definirt es als gebildet von den Doppelgeraden der Regelflächen von Strahlen des Σ_0, die eine in (0, 1) liegende Gerade treffen, und zeigt, dass es auch von den Leitschaaren der Regelschaaren zweiter Ordnung gebildet wird, in die sich Σ_0 auflösen lässt. Die zu diesen Systemen hiernach conjugirten Flächen zweiter Ordnung gehen durch jene vier Punkte M, N, O, P und haben acht gemeinsame Tangentenebenen. Ausser den beiden Systemen Σ_0, Σ_1 werden nun noch vier analoge andere Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5 eingeführt. Dieselben bilden mit den zwei ersteren eine geschlossene Gruppe derart, dass jedes nach der obigen Vorschrift construirbar ist und je zwei unter einander so conjugirt sind, wie Σ_0 und Σ_1. Alle diese Systeme haben dieselben singulären Ebenen und Punkte und dieselbe Brennfläche, mit deren weiterer Betrachtung der Haupt-

inhalt der Arbeit abschliesst, der, wie aus dem Angeführten hervorgeht, in mehrfacher Weise die kurze Reye'sche Darstellung ergänzt; insbesondere ist derselben die synthetische Herleitung des Sextupels von Strahlensystemen eigentümlich. Zu erwähnen ist noch, dass auch die von Herrn Reye gegebene Construction des Strahlensystemes vom Verfasser aus der seinigen hergeleitet wird.

V.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

A. Voss. Ueber ein neues Princip der Abbildung krummer Oberflächen. Klein Ann. XIX. 1-27.

Siehe Abschn. IX. Cap. 3. A. p. 562.

A. V. Bäcklund. Zur Theorie der Flächentransformationen. Klein Ann. XIX. 387-422.

Siehe Abschn. VI. Cap. 6. p. 296.

T. A. Hirst. On quadric transformation. Quart. J. XVII. 301-311.

Dieser Aufsatz wurde bereits im Jahre 1865 der British Association vom Herrn Verfasser vorgelegt, zu einer Zeit, wo die Theorie der ebenen eindeutigen Transformationen bei Weitem nicht den Grad der heutigen Ausbildung erfahren hatte. Das eigentliche Problem ist das von Kantor (cf. F. d. M. XII. 1880.

p. 623-625) aufgeworfene und gelöste, die cyklischen Gruppen einer ebenen quadratischen (nicht involutorischen) eindeutigen Transformation aufzustellen. Die vom Herrn Verfasser aufgestellte Fundamentalformel ist mit der Kantor'schen identisch.

My.

F. Aschieri. Di una corrispondenza Cremoniana quadratica fra gli elementi di due forme fondamentali di 4^a specie e spazi rigati. **Lomb. Rend. (2) XIV. 123-131.**

F. Aschieri. Sopra una corrispondenza quadratica Cremoniana fra gli elementi di due spazi rigati. **Lomb. Rend. (2) XIV. 219-227.**

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. B. p. 494.

J. Guccia. Sur une classe de surfaces représentables, point par point, sur un plan. **Franc. Ass. 1880.**

Dies sind die Flächen n^{ter} Ordnung mit einer μ- und ν-fachen Geraden ($\mu+\nu = n-1$), die windschief sind. Die Abbildung wird auf folgende Weise vermittelt: „Man nehme in der Ebene ein homoloidisches Netz n^{ter} Ordnung an. Dann geht durch einen Punkt b noch ein Büschel von Curven f_b des Netzes, entsprechend durch einen zweiten Punkt c ein Büschel f_c. Zwei dieser Curven f_b, f_c werden beliebig herausgegriffen. Das Büschel (f_b, f_c) wird einem Büschel von Curven m^{ter} Ordnung (Φ, Ψ) projectivisch zugeordnet (so dass f_b und Φ, f_c und Ψ sich entsprechen, während die dritte Zuordnung noch willkürlich ist). Das Erzeugnis (s) dieser Zuordnung ist das Bild einer ebenen Schnittcurve der Fläche. Die Eigenschaften der Schaar (s) erlauben verschiedene Schlüsse zur Erforschung der Singularitäten der Fläche. Specielle Fälle solcher Flächen sind die allgemeine Fläche dritter Ordnung, sowie zwei Flächen fünfter Ordnung, von denen die eine von Clebsch, die andere von Cremona untersucht ist. My.

F. Aschieri. Sulle corrispondenze Cremoniane nel piano e nello spazio. Lomb. Rend. (2) XIV. 21-26.

F. Aschieri. La trasformazione quadratica doppia di spazio, e la sua applicazione alla geometria dello spazio non Euclideo. Lomb. Rend. (2) XIV. 673-683.

Eine beliebige quadratische eindeutige (Cremona'sche) Transformation erzeugt der Herr Verfasser so, dass seine Methode zugleich unmittelbar auf den Raum übertragen werden kann.

Er denkt sich zwischen zwei Ebenen E und E', die durch die erstgenannte Transformation verknüpft werden sollen, zunächst eine reciproke Verwandtschaft hergestellt und ausserdem in jeder von ihnen ein Strahlbüschel S resp. S' gegeben, die irgendwie projectivisch auf einander bezogen sind. Irgend ein Punkt x der Ebene E bestimmt einen Strahl Sx, dem ein Strahl Sx' in der zweiten vermöge der projectivischen Beziehung entspricht. Andererseits entspricht dem Punkt x vermöge der reciproken Verwandtschaft eine Gerade X' der zweiten Ebene. Diese treffe den Strahl Sx' im Punkte x', dann ist die Correspondenz der Punkte x, x' die gesuchte quadratische. Als Anwendung dieser Entstehung löst der Herr Verfasser die Aufgabe, das eine sich wechselweise entsprechende Punktepaar zu finden, welches in dem Falle existirt, dass die beiden Ebenen sich decken (eine Aufgabe, die Herr S. Kantor auf andere Weise behandelt hatte). Man erhält die beiden Punkte als den achten und neunten Schnittpunkt zweier Curven dritter Ordnung, deren andere Schnittpunkte bekannt sind. Will man die angegebene Erzeugungsmethode auf den Raum übertragen, so setze man nur statt der zwei Ebenen E, E' und der zwei Strahlbüschel S, S' resp. zwei Räume E, E' und zwei Strahlbündel S, S', während das Uebrige sich nicht ändert. Jeder Raum besitzt einen Fundamentalpunkt und eine Fundamentalcurve (Kegelschnitt), die auf einfache Weise construirt werden. Decken sich beide Räume, so kann man nach den Einheitspunkten der Transformation fragen. Diese, an Anzahl im Allgemeinen sechs, erhält man so: Man hat erstens eine Fläche zweiter Ordnung als Ort der Punkte, deren (vermöge der

reciproken Verwandtschaft) entsprechende Ebene durch sie hindurchgeht. Zweitens eine cubische Raumcurve als Erzeugnis der beiden projectivisch auf einander bezogenen Strahlenbündel. Die Schnittpunkte beider Gebilde sind die verlangten Einheitspunkte. Durch specielle Annahmen der reciproken Verwandtschaft, wie der projectivischen Beziehung ergeben sich leicht die verschiedenen Unterarten der quadratischen Verwandtschaft, insbesondere die (drei) involutorischen. Ein sich wechselseitig entsprechendes (involutorisches) Punktepaar giebt es in der allgemeinen quadratischen Verwandtschaft nicht; es kann im Speciellen ein Paar geben, und im noch specielleren Falle unendlich viele, die eine Fläche dritter Ordnung erfüllen.

Im letzten Falle sind sich die beiden Strahlbündel S, S' involutorisch zugeordnet. Der Herr Verfasser hätte noch hinzufügen können, dass seine Erzeugungsweise nebst der grössten Zahl der Consequenzen vollkommen für höhere lineare Räume erhalten bleibt, wenn man solche durch eine quadratische Cremona-Transformation verknüpfen will. Die zwei Strahlenbündel S, S' erzeugen dann, wenn die beiden Räume sich decken, eine Curve d^{ter} Ordnung (wenn der Raum d-fach ausgedehnt ist) und ihre Schnittpunkte mit der F_2, der Fundamentalfläche der reciproken Verwandtschaft, an Anzahl $2d$, sind die Einheitspunkte etc.

Die zweite Note schliesst sich an die Arbeit von Herrn Schur (Clebsch Ann. XV. 432-465, s. F. d. M. XI. 1879. p. 591) sowie die bezügliche Note des Herrn Verfassers über Complexe zweiten Grades an und ist noch nicht abgeschlossen.

My.

F. Aschieri. Sopra la rappresentazione dei complessi del 2° grado nello spazio punteggiato. Lomb. Rend. (2) XIV. 500-509.

Herr Schur (Clebsch Ann. XV., s. F. d. M. XI. 1879. p. 591) hatte gezeigt, wie man das ganze System der durch zwei Gerade gehenden linearen Complexe projectivisch auf die Ebenen des Punktraumes (S) beziehen kann. Treffen sich die beiden Geraden,

so haben alle linearen Complexe des Systems ein festes Strahlbüschel O gemein. Dann kann man die Punkte des Punktraumes auch eindeutig auf die Strahlbüschel beziehen, deren jedes einen Strahl mit dem festen Büschel gemein hat. Von dieser letzteren Zuordnung, die er auf einfache Weise mit Hülfe zweier Strahlenbündel S, S_1 von Neuem begründet, geht der Herr Verfasser aus und untersucht, welche Gebilde vermöge derselben einer Geraden, Curve n^{ter} Ordnung, Ebene, Fläche n^{ter} Ordnung (des Punktraumes) entsprechen. So entspricht einer Curve n^{ter} Ordnung $C^{(n)}$ eine Congruenz n^{ter} Ordnung, die von den den Punkten der Curve correspondirenden Strahlbüscheln gebildet wird. Die Centren dieser Büschel durchlaufen auf der Ebene Ω des festen Strahlbüschels O eine Curve n^{er} Ordnung, und ihre Ebenen umhüllen einen Kegel n^{ter} Klasse mit dem Scheitel O. Ebenso entspricht einer Fläche n^{ter} Ordnung ein Complex n^{ter} Ordnung etc. Nimmt man jetzt einen linearen Complex θ im Linienraum an, so kann man jedem Punkte P des Punktraumes (S) denjenigen Strahl von θ entsprechend setzen, der dem nach obiger Zuordnung P entsprechenden Strahlbüschel angehört. Dies ist keine andere als die Lie'sche Abbildung eines linearen Complexes auf den Punktraum. Sie leistet wichtige Dienste bei folgender Hauptfrage: Man hebe aus dem ursprünglichen Gebüsch von linearen Complexen, die alle den festen Strahlbüschel O gemein haben, irgend ein Netz P_1 heraus (dem dann in der Schur'schen Abbildung ein Strahlenbündel P entspricht). Andererseits lege man eine beliebige Regelschaar (zweiter Ordnung) $p^{(2)}$ zu Grunde. Durch sie geht ein Netz $\nu^{(2)}$ sowol von linearen Complexen, als linearen Congruenzen. Jetzt werden nach dem Vorgang von Herrn Schur in beiden Systemen P_1 und $\nu^{(2)}$ reciprok aufeinander bezogen, indem jedem Complexe des einen Systems eine Congruenz des andern und umgekehrt zugeordnet wird. Die dadurch erzeugten Regelschaaren $g^{(2)}$, $d^{(2)}$ bilden dann einen Complex zweiten Grades. Dieser wird hier eben mit Hülfe der Lie'schen Abbildung untersucht, indem sich dadurch die gemeinte Zuordnung ersetzen lässt durch die des Ebenenbündels P und eines gewissen Netzes von Flächen zweiter Ordnung. Ein so erzeugter Complex zweiten

Grades $\theta^{(2)}$ hat, wie schon Herr Caporali zeigte, die Eigenschaft, dass sich seine Geraden eindeutig auf die Punkte des Punktraumes (S) beziehen lassen. Dann entsprechen den Punkten einer Geraden in (S) die Geraden des Complexes, die eine Regelfläche dritten Grades erzeugen, für die eine Gerade der Ebene Ω einfache und eine Gerade des Bündels O doppelte Leitgerade ist. Umgekehrt ist das Bild der Geraden der Congruenz, die ein beliebiger linearer Complex mit $\theta^{(2)}$ gemein hat, gleichfalls eine Oberfläche dritter Ordnung. Es giebt eine bestimmte cubische Raumcurve $C^{(3)}$, deren Punkten nach der Schur'schen Abbildung solche Strahlbüschel entsprechen, die zugleich dem Complexe $\theta^{(2)}$ angehören etc. So hat es keine wesentliche Schwierigkeit, mit Hülfe der erwähnten zwei Abbildungen die Theorie dieser Zuordnung zwischen $\theta^{(2)}$ und dem Punktraum zu vervollständigen.

My.

B. Conforme Abbildung.

F. Klein. Ueber die conforme Abbildung von Flächen.

Klein Ann. XIX. 159-160.

Die kurze Notiz hat den Zweck, auf gewisse Untersuchungen hinzuweisen, welche der Herr Verfasser in einer Schrift (Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen. Leipzig. Teubner. Ref. im nächsten Bande.) dargestellt hat. Es handelt sich namentlich um die Abbildung der allgemeinsten geschlossenen Flächen. Ist p die Zahl der nicht zerstückenden Rückkehrschnitte, welche man auf einer solchen Fläche ziehen kann, so giebt es für $p>1$ $6p-6$ Constante, welche bei beliebiger conformer Deformation ungeändert bleiben; für $p=1$, resp. $p=0$ ist die Zahl der Constanten 2, resp. 0, woraus u. A. folgt, dass zwei geschlossene Flächen $p=0$ stets conform auf einander bezogen werden können. Für symmetrische Flächen reducirt sich die Zahl der Constanten auf die Hälfte. Die berandeten

und die Doppelflächen können in gewissem Sinne als symmetrische geschlossene betrachtet werden, und hieraus können für diese ähnliche Gesichtspunkte gewonnen werden.

A.

L. Lecornu. Sur les polygones générateurs d'une relation entre plusieurs variables imaginaires. C. R. XCII. 688-690.

Stellt man die Werte irgend eines Wertsystems imaginärer Variabeln, das einer Gleichung $f(z_1, z_2 \dots z_n) = 0$ genügt, in der Gauss'schen Ebene dar, so erhält man ein „erzeugendes" Polygon der Gleichung. Dann sagt der erste Satz aus:

„Dreht man dieses Polygon unendlich wenig um ein Centrum, dessen Lage durch den Wert

$$\frac{\Sigma \frac{\partial f}{\partial z_i} z_i}{\Sigma \frac{\partial f}{\partial z_i}}$$

gegeben ist, so genügt das so erhaltene Nachbarpolygon gleichfalls der Relation $f = 0$. Umgekehrt ist eine solche Bewegung des Polygons „ohne Deformation" nur in einer Weise möglich, indem man den Drehprocess in der angegebenen Weise fortsetzt." Somit beschreibt jeder Eckpunkt des Polygons eine gewisse Curve. Die zu ihnen orthogonalen bestimmen eine zweite Art von Verschiebung des Polygons, nämlich so, dass es sich immer ähnlich bleibt. Diese beiden Schaaren von Curven sind Isothermen.

Diese Betrachtungen werden mechanisch gedeutet, indem man die partiellen Differentialquotienten von f als (in den bezüglichen Punkten z_i wirkende) Kräfte auffasst.

My.

W. M. Hicks. On the numbers of systems of plane equipotential lines of the second degree, symmetrical with respect to a fixed line. Mess. (2) XI. 67-74.

Der Verfasser untersucht die Zahl und Natur der Familien von Curven zweiten Grades, welche symmetrisch in Bezug auf eine Linie sind und als äquipotentielle Curven dienen können. Die Frage kann allgemein so ausgesprochen werden: „Gegeben ist eine Relation $f(z, \omega) = 0$ zwischen zwei complexen Grössen $z = x+yi$ und $\omega = \varphi+\psi i$. Man soll die Bedingung dafür aufstellen, dass, wenn $f(z, \omega) = P+Qi$ (P und Q reell), das Resultat der Elimination von ψ zwischen $P = 0$ und $Q = 0$ sich als algebraische Function n^{ten} Grades von x und y darstellen lässt.“ Die Methode besteht darin, die gegebene Resultante in der gegebenen Form anzunehmen, wobei die Coefficienten als Functionen des Potentials φ vorausgesetzt werden, welches ein Parameter der Familie von Curven ist. Die Coefficienten werden dann aus der Bedingung, dass $\Delta^2\varphi$ identisch verschwinden muss, bestimmt. Dies giebt eine Zahl von Differentialgleichungen für die Bestimmung der Coefficienten, die grösser ist als die Zahl der Unbekannten. Der Verfasser findet, dass die einzigen Curven zweiten Grades sind: 1) concentrische Kreise, 2) confocale Kegelschnitte, 3) die rechtwinkligen Hyperbeln, 4) die Kreise durch zwei feste Punkte, 5) das System der zu letzteren orthogonalen Kreise.

Glr. (O.).

C. Rösen. Ueber die involutorische isogonale Verwandtschaft $W^2+Z^2+2AWZ = B$. Pr. Crefeld.

W, Z sind zwei complexe Variable, A, B zwei solche Constante. Im engen Anschluss an die Siebeck'sche Arbeit (Crelle's Journal LV.) durchgeführt. Jeder Ellipse, resp. Hyperbel der einen Ebene entsprechen zwei confocale Ellipsen, resp. Hyperbeln der andern.

My.

G. Holzmüller. Vollständige Durchführung einer isogonalen Verwandtschaft, die durch eine gebrochene Function zweiten Grades repräsentirt wird. Klein Ann. XVIII. 289-319.

Die Arbeit beschäftigt sich mit derjenigen isogonalen (conformen) Abbildung einer Ebene auf die andere, welche den Gleichungen

$$Z = \frac{z^2+1}{2z} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

also

$$z = Z+\sqrt{Z^2-1}$$

entspricht. Namentlich werden die Curvensysteme der z-Ebene aufgesucht, welche den Strahlbüscheln und Kreisschaaren der Z-Ebene, sowie ihren isogonalen Trajectorien entsprechen. Hierbei werden zu gewissen Lehrsätzen die durch die Verwandtschaft entsprechenden gefunden und die Eigenschaften gewisser Coordinatensysteme hergeleitet. Auch die physikalischen Beziehungen (Isothermensysteme) und die kinematischen werden überall hervorgehoben. In der angedeuteten Hinsicht ist die Arbeit sehr eingehend und den Gegenstand in der Hauptsache erschöpfend. Referent möchte hinzufügen, dass, wie er selbst in einer früheren Arbeit (Ueber eine conforme Abbildung der Erde nach der epicykloidischen Projection, Verh. d. Ges. f. Erdkunde zu Berlin IX., s. F. d. M. VI. 1874. 533) gelegentlich hervorgehoben hat, die hier besprochene Abbildung eine solche ist, wie sie sich ergiebt, wenn man dieselbe Kugel einmal stereographisch, das andere Mal nach einem der einfachsten Fälle der Lagrange'schen Projection in die Ebene projicirt, was bei dem kartographischen Interesse, welches die Lagrange'sche Projection verdient, nicht unwichtig ist. Den Schluss bilden Bemerkungen über etwas allgemeinere isogonale Verwandtschaften. A.

G. Holzmüller. Ueber Isothermenschaaren, isogonale Verwandtschaften und conform veränderliche Systeme, die mit den Abbildungen $z = \sqrt[n]{Z}$ und $z = \sqrt[m]{\frac{aZ^n+b}{cZ^n+d}}$ zusammenhängen. Schlömilch Z. XXVI. 231-257.

In dieser Arbeit, welche sich an einige frühere Arbeiten des Herrn Verfassers, namentlich an diejenigen anschliesst, über

welche in den F. d. M. VIII. 1876. p. 537, IX. 1877. p. 590 und XII. 1880. p. 628 referirt ist, werden die in der Ueberschrift bezeichneten Abbildungen einer genauen Discussion unterworfen, und es werden namentlich die Eigenschaften der sogenannten Hyperbeln und Lemniscaten n^{ter} Ordnung untersucht. Es ergiebt sich hierbei eine grosse Zahl einfacher Beziehungen, welche durch die betrachtete Verwandtschaft ohne Weiteres erkannt werden. Namentlich wird auch die eindeutige conforme Abbildung zweier Kegel auf einander durchgeführt, welche abgewickelt Sectoren von $\frac{360^\circ}{m}$ und $\frac{360^\circ}{n}$ bilden, wenn drei gegebenen Punkten der einen Fläche drei gegebene Punkte der anderen entsprechen. Endlich werden auch einige kinematische Untersuchungen angestellt.

A.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

G. Röllinger. Leitfaden für den Unterricht in der Mechanik fester Körper. Augsburg. Kranzfelder.

Das Buch ist für Schulen bestimmt und enthält das gewöhnliche Mass dessen, was man in einer Schule zu geben pflegt. In der Einleitung bemerkt der Verfasser, dass der Lehrgang der Mechanik im Allgemeinen der der Geometrie sei, nur komme noch ein wesentlich neues Beweismittel hinzu, der Versuch. Danach sollte man nun glauben, dass der Verfasser von diesem Gedanken ausgehend eine eigenartige Entwickelung des Stoffes geben werde, die von dem meist beobachteten Wege erheblich abweichen werde. Dem ist aber nicht so. An zwei Stellen macht der Verfasser allerdings einen Anlauf, indem er Beweise durch Versuche giebt; sonst geschieht alles nach dem hergebrachten Modus. Besondere Strenge und Präcision lassen sich dem Buche nicht überall nachsagen. Wir erwähnen nur Beweis 2 auf pag. 6, der völlig verfehlt ist. Der Verfasser hat Figuren in seinem Buche nicht gegeben, sondern nur fortlaufende Nummern an die Stellen gesetzt, wo Figuren nötig sind. Glücklich ist dieser Gedanke nicht, wenigstens nicht bei der Beschreibungsart des Buches. Dass ein Nichtwissender z. B. nach der Beschrei-

bung sich ein richtiges Bild der Brückenwage zeichnen würde, bezweifelt Referent. Am Schluss ist eine Anzahl Aufgaben angefügt. O.

H. Undeutsch. Einführung in die Mechanik. Freiberg. Graz u. Gerlach.

Das vorliegende 447 Seiten umfassende Buch ist wesentlich für die Zuhörer des Verfassers bestimmt. Es giebt, seinem Umfange nach, das gewöhnlich in elementaren Vorlesungen über Mechanik Gegebene und ist seinem Zweck entsprechend bis in die Details eingehend geschrieben. Es ist dabei, da es nicht für eigentliche Mathematiker bestimmt ist, hauptsächlich Rücksicht genommen auf ein gründliches Klarmachen des Gegebenen, und dies scheint durch die recht detaillirte Durchführung auch von Einzelheiten erreicht. Neben einer Einleitung, die eine Uebersicht über den Inhalt der Mechanik giebt und die Definitionen der ihr zugehörigen Begriffe vorwegnimmt, besteht das Buch aus vier Abteilungen, in denen übrigens die schon vorher besprochenen Definitionen an betreffender Stelle wiederholt und erläutert werden. Der erste Abschnitt enthält das Notwendigste der Kinematik in zwei Teilen, deren erster die einfache und deren zweiter die zusammengesetzte Bewegung eines mathematischen Punktes behandelt. Dabei wird mehr, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt, auf die Geschwindigkeitscurve im Zusammenhang mit der Bahn eingegangen. Abschnitt 2 giebt die Bewegungslehre eines materiellen Punktes. Im ersten Teil sind die nötigen Auseinandersetzungen über Kraft, Masse, Gewicht, mechanische Arbeit, Princip der lebendigen Kräfte, Antrieb einer Kraft, statische Momente und das Princip der Flächen enthalten. Die drei folgenden Teile dieses Abschnittes behandeln dann der Reihe nach die freie, die unfreie und die relative Bewegung eines materiellen Punktes. Der dritte Abschnitt ist der Bewegungslehre eines Körpers gewidmet. Nach den ersten Erläuterungen ist im Teil II. das Capitel der Kräfte, äusseren und inneren, an einem starren Körper behandelt, dem im Teil IV. die freie Bewegung eines starren

Körpers folgt. Hier wird zuerst das d'Alembert'sche Princip und das Gesetz des Schwerpunktes besprochen. Dem folgt eine Discussion der Bewegungsarten eines freien Körpers, dann ein Capitel über die lebendige Kraft, Schwerpunktsbestimmungen, Trägheitsmomente etc. Der vierte Abschnitt enthält Andeutungen über die Bewegung eines Systems von Körpern. O.

J. Lüroth. Grundriss der Mechanik. München. Th. Ackermann.

In dieser kleinen Schrift ist zum ersten Male die Ausdehnungslehre benutzt, um die Hauptsätze der Mechanik (im Anschluss an Grassmann's Programmabhandlung, Stettin 1867) im Zusammenhange darzustellen. Die Vorteile, welche sich hierbei aus dem Wegfall der umständlichen analytisch-geometrischen Formeln ergeben, sind bekannt. (Vgl. auch das Referat in den F. d. M. XI. 1879. 605-609). Einen weiteren Vorzug der Arbeit bildet noch die äusserst sorgfältige, in den Lehrbüchern meist vermisste Untersuchung über die relativen Bewegungen im Weltraume. Leider hat sich der Herr Verfasser durch die Meinung, es seien die Quaternionen in Deutschland mehr eingebürgert als die Ausdehnungslehre, verleiten lassen, die eleganten Formeln der letzteren in das schwerfällige Rüstzeug der Hamilton'schen Bezeichnungen zu kleiden, obwol, wie er selbst zugesteht, zur Verwendung der Quaternionen sich nirgends Anlass fand. (So decken sich z. B. die in §§ 17 und 18 aufgestellten Symbole S und V mit dem Begriffe des inneren, resp. äusseren Productes, während $T\alpha$ der numerische Wert der Strecke α ist). Auch wird, in Deutschland wenigstens, von den Quaternionen zwar mehr geredet als von der Ausdehnungslehre, aber, trotz verschiedener Lehrbücher, nach Ausweis der Literaturberichte, sehr viel weniger damit gearbeitet. Möge daher der Herr Verfasser bei Gelegenheit einer neuen Auflage ohne Bedenken zu den Originalbezeichnungen zurückkehren. Schg.

Bobylew. Lehrbuch der analytischen Mechanik. Petersburg. (Russisch).

Das Referat erfolgt nach vollendetem Erscheinen des Werkes.

Ty.

Sludsky. Lehrbuch der theoretischen Mechanik. Moskau, Nachr. 1881. (Russisch).

Auf 455 Seiten in 8° enthält dieses Werk Alles, was man über theoretische Mechanik an Universitäten vorzutragen pflegt, und ausserdem auch Manches, was dem Referenten in einem Lehrbuche der Art zum ersten Male begegnet ist, wie z. B. die Kinematik eines veränderlichen Systems, Anziehung einer sphärischen Schicht, deren Dichtigkeit umgekehrt wie die dritte Potenz der Entfernung ihrer Elemente von einem festen Punkte variirt (geometrisch ausgeführt); die Frage, welcher Art die Massenverteilung eines schweren Fadens sein muss, damit derselbe eine gegebene Form annimmt; die Sätze von Helmholtz über Wirbelbewegungen. Es versteht sich von selbst, dass bei einer solchen Menge des Materials und dem mässigen Umfange des Lehrbuches die Darlegung nur sehr kurz sein und nicht in die Einzelheiten eingehen kann. Darum scheint dem Referenten dasselbe nicht für das Selbststudium berechnet, obschon Manches, wie z. B. das Princip der kleinsten Wirkung, vollkommener als in sonst gebrauchten Lehrbüchern dargelegt ist; wol aber empfiehlt es sich für Universitätszuhörer, die durch dasselbe einen guten Ueberblick über die Elemente der theoretischen Mechanik leicht gewinnen können. Die Einteilung des Stoffes entspricht der gebräuchlichen in Kinematik und Dynamik, in der das Gleichgewicht als ein specieller Fall der Bewegung betrachtet wird; die Geometrie des Masses wird in der Einleitung zur Kinematik vorausgeschickt.

Ty.

J. **Lodge.** On action at a distance. Phil. Mag. 1881.

Die Arbeit enthält eine Replik auf eine frühere Arbeit von Herrn R. Brown; Herr Lodge hatte seinen Beweis, dass Wirkung

in der Entfernung unmöglich ist, auf das Gesetz von der Erhaltung der Energie und auf Newton's drittes Gesetz in folgender Weise begründet.

1) Wenn ein Körper *A* direct und allein auf einen Körper *B* wirkt, so ist die Kraft, mit welcher *A* auf *B* wirkt, gleich und entgegengesetzt der Kraft, mit welcher *B* auf *A* wirkt.

2) Wenn *B* der von *A* ausgehenden Kraft folgt, so wird von *A* gesagt, dass es Arbeit ausübe, und von *B*, dass Arbeit auf *B* geübt werde, wobei die Arbeit in beiden Fällen gemessen wird durch das Product der ausgeübten Kraft in die Entfernung, um welche *B* in der Richtung der Kraft bewegt worden ist. Von *A* wird dann gesagt, es habe eine Menge Energie verloren, gleich der Arbeit, die es verrichtet hat, und von *B*, es habe eine Menge Energie gewonnen, gleich der Arbeit, die an ihm verrichtet ist. Dabei findet aber weder ein Verlust noch ein Gewinn an Energie statt. Die Energie ist durch die Verrichtung der Arbeit einfach von *A* auf *B* übertragen.

Aus diesen Prämissen folgt, dass, da die Kräfte (F) gleich und entgegengesetzt und die Arbeiten (Fs) auch gleich und entgegengesetzt sind, die Entfernung (s) gleich, aber nicht entgegengesetzt sein kann. Das heisst, die beiden müssen sich über genau dieselbe Entfernung und in demselben Sinn bewegen. Aber das findet nicht statt, wenn man die sogenannte Wirkung in der Entfernung annimmt. Daher ist diese Hypothese zu verlassen.

Csy. (O.).

Capitel 2.

Kinematik.

E. Dewulf. Du déplacement d'une figure de forme invariable dans son plan. C. R. XCII. 1091-1093.

Fasst man bei der Bewegung eines ebenen starren Gebildes eine Gerade auf, welche vom momentanen Drehungscentrum aus-

[illegible] Scht.

J. [illegible]. Mechanische Beschreibungen einiger [illegible]. [illegible]

Der Verfasser geht von der mechanischen Entstehung der Curven aus und leitet aus derselben ihre hauptsächlichsten Eigenschaften ab. Er behandelt auf diese Weise nach einander: 1) Die Cycloide, 2) die Epicycloide, 3) die Hypocycloide, 4) die Archimedische Spirale, 5) die Evolute des Kreises, 6) die Ellipse, 7) die Parabel, 8) die Curven einer Cylinderfläche. An die Besprechung der letztgenannten [illegible] schliessen sich einige Betrachtungen über die Bewegung eines Projectils in einem Geschütze, welches mit parabolischen Zügen versehen ist. G.

P. A. MacMahon. A property of pedal curves. Mess. (2) X. 170-171.

Die Notiz bezieht sich auf folgendes Problem: „In jedem Punkte eines Kreisringes wird eine undehnbare Schnur befestigt, grade lang genug, um bis zu einem festen Punkte ausserhalb des Kreises zu reichen, in dem alle Schnüre in einem Knoten vereinigt sind. Wenn der Knoten nun in der Ebene des Kreises so bewegt wird, dass einige der Schnüre immer gespannt sind, so beschreibt derselbe eine Spirallinie.“ Glr. (O.).

Darboux. Sur le déplacement d'une figure invariable. C. R. XCII. 118-121.

Es bewege sich ein Rotationscylinder C innerhalb eines zweiten Rotationscylinders C' von doppeltem Radius in der Art, dass, während C auf C' rollt, gleichzeitig eine Gleitung längs der Erzeugenden der Flächen in dem Masse vor sich geht, dass ein Punkt von C eine bestimmte Gerade beschreibt, die durch die Axe von C' notwendig gehen muss. Bei dieser Bewegung beschreiben alle Punkte des Raumes, welche mit C starr verbunden gedacht werden, Kegelschnitte. Diese Bewegung ist, wie Herr Darboux zeigt, die einzig mögliche, bei welcher alle Punkte des beweglichen starren Körpers ebene Curven beschreiben, vorausgesetzt, dass man den Fall ausschliesst, in welchem der Körper eine Verschiebung parallel zu einer festen Ebene erleidet.

Unter den Bewegungen eines ebenen Gebildes in seiner Ebene giebt es eine, bei der alle Punkte desselben Kegelschnitte beschreiben. Im Raum giebt es dagegen keine Bewegung eines Körpers, bei der alle seine Punkte Flächen zweiten Grades zu Trajectorienflächen haben. Indessen ist eine Bewegung von starren Gebilden möglich, bei der die Trajectorienflächen aller Punkte Steiner'sche Flächen sind. Bei dieser Bewegungsform kann es vorkommen, dass die Punkte einer Geraden oder selbst die Punkte von zwei Geraden Ellipsoide beschreiben. In diesem Falle existirt, wenn man imaginäre Elemente mit in Betracht zieht, in dem starren Gebilde, welches jener Bewegung unterliegt, ein Tetraeder mit höchstens zwei reellen Kanten, für welches sich die Trajectorienflächen in folgender Weise darstellen: „Jeder Punkt ausserhalb der Seitenflächen beschreibt eine Steiner'sche Fläche; jeder Punkt einer Seitenfläche ausserhalb der Kanten läuft auf einer Regelfläche dritter Ordnung; jeder Punkt der Kanten beschreibt eine Fläche zweiter Ordnung oder eine Ebene.“ Schn.

E. B. Elliott. Some theorems of kinematics on a sphere. Lond., M. S., Proc. XII. 47-57.

Wenn eine Kugelfläche auf einer festen Kugel beweglich gedacht wird, so wird irgend ein Punkt der beweglichen Kugel-

fläche auf der festen eine gewisse sphärische Fläche umschreiben, und diese ist geschlossen, wenn die bewegliche Kugelfläche nach einem sonst willkürlichen Bewegungsvorgang in die ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist. Ueber die Abhängigkeit der umzogenen Fläche von der Lage des Punktes auf der beweglichen Kugelfläche hat Herr Darboux in dem Bulletin des Sciences Mathématiques, (2) II. 333 (s. F. d. M. X. 1878. 562) einige Theoreme gegeben, welche eine gewisse Analogie mit bekannten Relationen in der Kinematik der Ebene bilden. Diese werden hier in anderer Form gewonnen und erhalten eine etwas allgemeinere Fassung. Damit wird eine andere Frage verknüpft. Bei einem bestimmt gewählten Bewegungsvorgang wird ein grösster Kreis, der mit der beweglichen Kugelfläche verknüpft ist, auf der festen Kugel eine Curve als Enveloppe umziehen. Die Länge dieser Enveloppe ist von der Lage des grössten Kreises auf der beweglichen Kugelfläche abhängig. Ueber diese Abhängigkeit werden die entsprechenden Theoreme entwickelt, die in der Kinematik der Ebene über die Länge der Enveloppen, welche eine Gerade bei der Bewegung umzieht, gelten. Schn.

A. Amsler. Ueber den Flächeninhalt und das Volumen durch Bewegung erzeugter Curven und Flächen und über mechanische Integrationen. Schaffhausen. H. Meier.

Die allgemeinste Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene wird dadurch definirt, dass zwei ihrer Punkte zwei beliebig gegebene Bahnen durchlaufen. Es wird der Fall betrachtet, dass alle übrigen Punkte geschlossene Linien beschreiben, und die Flächeninhalte derselben untersucht. Zwischen diesen ergeben sich folgende bemerkenswerte Beziehungen. Zwischen den Flächeninhalten der Curven, welche von drei auf einer geraden Linie der beweglichen Ebene liegenden Punkten beschrieben werden, besteht eine lineare Relation, deren Coefficienten von den gegenseitigen Entfernungen jener drei Punkte abhängen. Macht die bewegliche Ebene keine volle Umdrehung, um in ihre Anfangslage zurückzukehren, so ist der Ort aller Punkte, welche

Curven gleichen Flächeninhalts beschreiben, eine Gerade; die Geraden, welche verschiedenen Flächeninhalten entsprechen, bilden ein Büschel paralleler Strahlen. Führt dagegen die Ebene eine oder mehrere volle Umdrehungen aus, so liegen jene Punkte auf einem Kreise; verschiedenen Inhalten entsprechen concentrische Kreise, der Mittelpunkt dem kleinsten oder grössten Inhalte. Analog wird nun die Bewegung einer Figur im Raume dadurch definirt, dass drei ihrer Punkte sich auf drei gegebenen Flächen bewegen, und der Fall untersucht, dass jeder ihrer Punkte eine geschlossene Fläche erzeugt. Es ergeben sich analoge Sätze. Entsprechende Beziehungen bestehen auch zwischen den Flächeninhalten derjenigen Curven, welche von den Geraden der beweglichen Ebene während einer geschlossenen Bewegung umhüllt werden. Sind es drei Gerade eines Strahlenbüschels, so besteht zwischen den Inhalten eine lineare Relation, deren Coefficienten abhängen von den Winkeln, welche jene drei Strahlen mit einander bilden, dem Flächeninhalt der vom Mittelpunkt des Büschels beschriebenen Curve und einer nur von der Bewegung der Ebene abhängigen Constanten. Die Strahlen, welche Curven gleichen Inhalts umhüllen, haben als Enveloppe in der beweglichen Ebene einen Kegelschnitt; die Kegelschnitte, welche verschiedenen Flächeninhalten entsprechen, sind confocal. Führt die Ebene keine volle Umdrehung aus, um in ihre Anfangslage zurückzukehren, so besteht das System confocaler Kegelschnitte speciell aus confocalen und coaxialen Parabeln. Die dargelegte Theorie wird sodann unmittelbar zur mechanischen Bestimmung des Flächeninhalts geschlossener ebener Curven verwertet, mittels einer auf der Zeichnungsebene mit Reibung aufliegenden Rolle, und durch Erweiterung des Princips mit denselben Hülfsmitteln zur mechanischen Bestimmung des statischen Moments, des Trägheitsmoments und der höheren Momente einer ebenen Figur, des Potentials einer homogenen ebenen Figur, des Inhalts einer sphärischen Figur, deren stereographische Projection gegeben ist, endlich zur mechanischen Integration von Differentialgleichungen. Der Anhang handelt von der technischen Ausführung. H.

Haillecourt. Extrait d'une lettre.

Barbarin. Réponse. Nouv. Ann. (2) XX. 265-271.

Herr Haillecourt weist auf einen Irrtum hin, der sich in der Arbeit des Herrn Barbarin „Note sur le planimètre polaire" (Nouv. Ann. (2) XIX. p. 212, F. d. M. XII. 1880. 233) befindet. Herr Barbarin erkennt den Irrtum an, weist aber nach, dass dieser Irrtum auf die schliesslichen Ergebnisse seiner Arbeit keinen Einfluss übe. Sch.

L. P. da Motta Pegado. Estudo sobre o deslocamento de um solido invariavel no espaço. Lisb. Mem. 1881. (Portugiesisch)

Der Verfasser betrachtet die allgemeinste Bewegung, mittels deren ein Körper im Raum aus einer Lage in eine andere übergehen kann. Er benutzt dazu eine geometrische Methode, die von der Chasles'schen verschieden ist. In Capitel 1 und 2 werden die Rotationsbewegungen untersucht, mittels deren eine Gerade aus einer Lage in die andere übergehen kann. Die Capitel 4 u. 5 erweitern dies auf die helicoidale Bewegung. Capitel 6 endlich fügt die helicoidale Bewegung einer veränderlichen Figur hinzu. Besonderes Gewicht wird überall auf die Rotationsaxen und ihre Lage gelegt. Tx. (O.).

Ad. Schumann. Beiträge zur Kinematik ähnlich-veränderlicher und affin-veränderlicher Gebilde. Schlömilch Z. XXVI. 157-179.

Hängen zwei complexe Zahlen z und η durch eine lineare Gleichung $\eta = zu + v$ zusammen, so wird dadurch die z-Ebene auf die η-Ebene in ähnlicher Form abgebildet, d. h. jedem Gebilde in der z-Ebene entspricht ein ähnliches Gebilde in der η-Ebene. Betrachtet man nun u und v als ganz beliebige Functionen der Zeit, so wird das Gebilde in der η-Ebene sich mit der Zeit verändern, aber stets die Aehnlichkeit mit dem ihm entsprechenden Gebilde in der z-Ebene bewahren. Es ist also

durch die Gleichung die Bewegung eines Systems dargestellt, welches sich während der Bewegung so ändert, dass es seine Aehnlichkeit bewahrt. Die Werte u und v bestimmen zwei mit der Zeit veränderliche Punkte, und es ist jedes durch η, v, $u+v$ bestimmte Dreieck dem Dreieck im z-System ähnlich, welches durch z, 0, 1 gebildet wird. Soll das Gebilde während der Bewegung in sich starr bleiben, so hat nur die Bedingung mod. $u =$ const. hinzuzutreten. Hiermit ist die Grundlage für eine Behandlung der Bewegung ähnlich-veränderlicher Systeme gegeben, welche die starren als besondere Formen in sich schliessen.

Ist irgend ein Bewegungsgesetz gewählt, so wird ein Richtstrahl, welcher vom Nullpunkt nach einem beliebigen Punkt η läuft, ein Flächenstück durchstreifen. Es wird die Frage gestellt, für welche Punkte η des Systems dieses Flächenstück denselben Wert hat. Die Analyse ergiebt, dass diese Punkte auf einem Kreise gelegen sind; der Mittelpunkt desselben umzieht je nach der Natur des Bewegungsgesetzes eine Minimal- oder Maximalfläche. Ist ϱ der Abstand des Punktes η von diesem Punkte und bedeutet M die vom Mittelpunkt umzogene Fläche, so ist die von η beschriebene Fläche F in der Form $F = M + \frac{\varrho^2}{a^2} U$ darstellbar, worin $a =$ mod. u zu Anfang der Bewegung, U aber die vom Punkte u während der Bewegung umzogene Fläche bedeutet. Sind 1, 2, 3 Punkte des η-Systems, welche in einer Geraden liegen, und bedeutet (i, k) den Abstand des Punktes i von dem Punkte k, so sind die von diesen drei Punkten umschriebenen Flächen F_1, F_2, F_3 durch die Relation verknüpft:

$$F_1(2,3) + F_2(3,1) + F_3(1,2) + \frac{U}{a^2}(1,2)(2,3)(3,1) = 0.$$

Während das erste Theorem eine Verallgemeinerung eines bekannten Steiner'schen Satzes enthält, welcher bei der Bewegung starrer Gebilde auftritt, schliesst diese Relation den Satz von Holditch in sich, sobald man sie auf die Bewegung einer starren Strecke anwendet, welche mit ihren Endpunkten eine geschlossene Curve durchläuft. Die Flächen F_1, F_2, F_3, F_4, welche vier be-

[illegible] Punkte (1, 2, 3) umschreiben, sind gleichfalls durch eine einfache Gleichung verknüpft. Bedeutet nämlich (i, k, l) die Dreiecksfläche, welche durch die Punkte i, k, l gebildet wird, so ist dieselbe gegeben durch

$$F_1(2,3,4) - F_2(3,4,1) - F_3(4,1,2) - F_4(1,2,3) = -\frac{c}{a^2} P(1,2,3),$$

wenn P die Potenz des Punktes 4 gegen den dem Dreieck (1, 2, 3) umschriebenen Kreis bedeutet. Hierin liegt eine Verallgemeinerung eines Theorems von Herrn Leudesdorf (Mess. VII. p. 125. 1877, siehe F. d. M. IX. p. [illegible]). Es springt dies sofort heraus, sobald die Bedingung gesetzt wird, dass das System starr ist und eine volle Umdrehung bei der Bewegung macht. Fragt man weiter nach den Geraden im r-System, welche bei einem ganz willkürlichen Bewegungsvorgang gleiche Bogenlängen umziehen, so entspricht dieser Forderung eine Schaar von Geraden, welche einen Kreis umhüllen; die Geraden, welche durch seinen Mittelpunkt gehen, umziehen Bogen, deren Längen, in bestimmtem Sinne gerechnet, den Wert Null haben. Drei Gerade 1, 2, 3, welche sich in einem Punkte schneiden, umziehen drei Bogenlängen S_1, S_2, S_3, welche durch die Gleichung

$$S_1 \sin(2,3) - S_2 \sin(3,1) - S_3 \sin(1,2) = 0$$

in Verbindung stehen. Für starre Systeme ist dieser Satz von Herrn Darboux (Darboux Bull. (2) II. p. 345, s. F. d. M. X. 1878. p. [illegible]) zuerst aufgestellt worden. Endlich sind auch die vier Bogenlängen, welche von vier beliebigen Systemgeraden beschrieben werden, durch eine einfache Gleichung verbunden. Bedeutet Δ_{ikl} die aus den Geraden i, k, l gebildete Dreiecksfläche und r_{ikl} den Radius des ihr umgeschriebenen Kreises, so ist

$$S_1 \frac{\Delta_{2,3,4}}{r_{2,3,4}} - S_2 \frac{\Delta_{3,4,1}}{r_{3,4,1}} - S_3 \frac{\Delta_{4,1,2}}{r_{4,1,2}} + S_4 \frac{\Delta_{1,2,3}}{r_{1,2,3}} = 0.$$

Aehnlich einfache Gesetze ergeben sich, wenn man die von Systemräumen umzogenen Flächenräume in Betracht zieht. Bedeutet v das Flächenstück, welches durch den von einer Systemgeraden umschriebenen Bogen und die Richtstrahlen nach seinen Endpunkten begrenzt ist, so bewahrt dieses v denselben Wert

bei der Bewegung des ähnlich veränderlichen Systems für alle Geraden, welche einen Kegelschnitt umhüllen; den veränderlichen Werten von V entspricht eine Schaar confocaler Kegelschnitte; alle Geraden, welche durch die Brennpunkte gehen, umschreiben gleiche Flächenräume V, und die kleinste Fläche umzieht diejenige Gerade, welche als kleine Axe in der Schaar confocaler Kegelschnitte auftritt. In dem letzten Teil der Abhandlung werden affine veränderliche Gebilde nach derselben Richtung hin untersucht. Für die Bogenlängen oder die Flächenräume, welche die Systemgeraden bei der Bewegung umziehen, ergeben sich nicht derartig einfache Gesetze, wie bei ähnlich veränderlichen Gebilden, dagegen erhalten sich dieselben im Wesentlichen für die Flächen, welche Systempunkte beschreiben. Es umziehen nämlich diejenigen Systempunkte gleiche Flächen V, welche auf einer Ellipse gelegen sind; den verschiedenen Werten von V entsprechen ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen, und ihr gemeinsamer Mittelpunkt umzieht eine Fläche M, welche je nach der Natur des Bewegungsvorganges ein Minimum oder Maximum ist. Bedeutet endlich ϱ den Richtstrahl von jenem Mittelpunkt aus nach einem beliebigen Systempunkt, r aber die Strecke, welche diejenige Ellipse darauf abschneidet, deren Punkte Flächen vom algebraischen Werte Null umschreiben, so stellt sich die von einem Systempunkt umzogene Fläche in der einfachen Form

$$V = M\left(1-\frac{\varrho^2}{r^2}\right)$$

dar. Schn.

R. S. Ball. On the extension of the theory of screws to the dynamics of any material system. Brit. Ass. Rep. 1881.

Ein mechanisches System aus einer beliebigen Anzahl von irgend wie verbundenen festen Stücken wird in eine unendlich nahe benachbarte Lage verrückt. Diese Verrückung kann hervorgebracht werden dadurch, dass man jedem Stück eine Schraubung von endlicher Amplitude um eine gegebene Schraube giebt (siehe

F. d. M. VIII. 1876. p. 599 über die Bedeutung der Ausdrücke). Man hat dann ein System von primären Schrauben, deren Zahl gleich der Zahl der Stücke des Systems ist. Wenn zwei Schraubungen auf irgend zwei aufeinanderfolgenden Schrauben zusammengesetzt werden, werden sie eine Schraubung auf einer dritten Schraube bilden, welche „Zwischen-Schraube" (intermediate screw) genannt wird. Die ganze Reihe von primären und Zwischen-Schrauben wird „Schraubenkette" (screw chain) genannt und drückt, combinirt mit einer Amplitude, dem einzigen metrischen Elemente, eine Verrückung des Systems aus.

Wenn das System nur einen Grad von Freiheit hat, dann sind die einzig möglichen Bewegungen die der Schraubung um eine Schraubenkette. Ist das System einer Verrückung um eine zweite Schraubenkette fähig, so ist es auch der Verrückung um eine einfach unendliche Zahl von andern Ketten fähig, welche leicht construirt werden können, wenn eine dritte Kette gefunden worden ist. Die Resultante aus der ersten und aus der zweiten Schraubung kann man auch direct durch eine dritte Schraubung erhalten. Jedem Element entsprechen also drei Schrauben. Diese Systeme von je drei sind sämmtlich cocylindroidisch. Die Zahl von Cylindroiden ist also gleich der Zahl der Elemente des Systems. Es folgt nun die Lösung der Aufgabe, eine andere Schraubenkette zu finden, um welche das System geschraubt werden kann. Man wähle eine Schraube auf einem der Cylindroide und eine homographische Schraube auf jedem der anderen. Dies giebt die primären Schrauben. Jene drei Zwischenschrauben sind auch cocylindroidisch, und die gesuchten Zwischenschrauben sind ein homographisches System.

Für den Fall eines Systems, welches Schraubungen um drei willkürliche Schraubenketten unterliegen kann, lässt sich zeigen, dass die Bestimmung der folgenden Ketten mit Hülfe von homographischen Punkten in Ebenen geschehen kann oder auch eventuell mit homographischen Punkten im Raum. Für höhere Grade von Freiheit lassen sich Betrachtungen analog denen der parallelen Projection in der Statik anwenden.

Das allgemeinste System von Kräften, die auf ein System wirken, lässt sich auch durch eine Reihe von Rucken auf den Schrauben einer Schraubenkette darstellen. Die Schraubenkette ist dann symmetrisch bezogen auf die allgemeinste Gruppe von Kräften und auf die allgemeinste Form der Verrückung.

Zur Erläuterung der allgemeinen Theorie möge dienen: Wenn die Kräfte impulsiv wirken, so beginnt das System um eine augenblickliche Schraubenkette zu schrauben. Im Allgemeinen sind die impulsive Schraubenkette und die augenblickliche verschieden. Es wird jedenfalls einige Zeit dauern, bis sie zusammenfallen. Die Zahl der Fälle, wo dies geschieht, ist gleich der Zahl der Grade von Freiheit, die das System besitzt.

Csy. (O.).

R. S. Ball. On the elucidation of a question in kinematics by the aid of non-euclidean space. Brit. Ass. Rep. 1881.

Der Verfasser will in dieser Arbeit eine vollständige geometrische Theorie der Statik und Kinematik eines starren Körpers mit drei Graden von Freiheit im Nicht-Euklidischen Raum geben. Unter Anderem wird bewiesen, dass alle Schrauben von gegebener Steigung, die zu einem Dreisystem gehören, auf zwei Flächen zweiten Grades liegen, welche reciproke Polaren in Bezug auf die Absolute sind. Jede Schraube kann entstehen aus einer Erzeugenden auf der einen Fläche und ihrer conjugirten Polare auf der anderen.

Csy. (O.).

D. Padeletti. Sugli assi conjugati di rotazione le cui direzioni comprendono un angolo costante e sugli assi conjugati ortogonali, nebst Bericht von E. Fergola, A. de Gasparis und N. Trudi. Nap., Rend. XIX. 41-51.

Der Verfasser betrachtet nach dem Berichte Complexe, gebildet aus conjugirten Rotationsaxen, die der Bedingung unterworfen sind, dass ihre Richtungen einen constanten Winkel bilden.

Speciell wird der Fall betrachtet, dass dieser Winkel ein Rechter ist. Nach Recapitulation einiger Sätze über die Zusammensetzung der Rotationen θ, θ' um zwei conjugirte Axen α, β führt der Verfasser die Bedingung ein, dass die Winkel der beiden Richtungen α, β constant seien, und bestimmt die Gleichung, der die Coordinaten von α genügen müssen, also die Gleichung des Complexes der ersten Rotationsaxen α. Dieser Complex ist von der vierten Ordnung und vierten Klasse. Dasselbe Resultat ergiebt sich dann auf sehr einfache Weise für die zweite Rotationsaxe β. Beide Complexe entsprechen einem speciellen Reciprocitätsgesetz. Es folgt die Betrachtung eines speciellen Falles. O.

C. Stéphanos. Sur la représentation des rotations autour d'un point par des points de l'espace. Brit. Ass. Rep. 1881.

Csy.

O. Marbach. Die Polbahnen des Hooke'schen Gelenkes. Diss. Jena.

Das Hooke'sche Universalgelenk, Kreuzgelenkkuppelung oder Cardanisches Gelenk genannt, ist ein von Cardano erfundener Maschinenteil, der von Robert Hooke (geb. 1635 zu Freshwater auf der Insel Wight, gest. in London 1703) zuerst zur Kuppelung von gegen einander geneigten Wellen benutzt wurde. Dasselbe besteht aus einem in sich starren aber beweglichen gleicharmigen Kreuz ACA, BCB; seine zapfenförmigen Enden sind drehbar in den Punkten AA und BB der Bügel befestigt, in welche die zu verbindenden Wellen auslaufen. Die Lager, in welchen die Wellen sich drehen, sind in starrer Verbindung. Dreht sich die eine Welle, so beschreiben die mit ihr in Verbindung stehenden Zapfenenden AA einen Kreis, der auf dieser Wellenaxe senkrecht steht. Die Zapfenenden BB aber durchlaufen einen Kreis, dessen Ebene gegen die andere Axe senkrecht gestellt ist. Beide reise sind grösste Kreise einer Kugel, deren Centrum C im euzmittelpunkt liegt. Der Quadrant ACB des Kreuzgelenkes

bewegt sich also, wie ein sphärischer Bogen $\frac{\pi}{2}$, welcher mit seinen Endpunkten durch zwei grösste Kreise der Einheitskugel geführt wird.

Denkt man auf der Oberfläche der festen Einheitskugel die Fläche einer mit ihr concentrischen Einheitskugel beweglich, so lässt sich jede Bewegung der beweglichen Hülle als ein Abrollen einer auf ihr befindlichen sphärischen Curve (Polcurve) auf einer sphärischen Bahn (Polbahn) auffassen, welche der festen Kugelfläche angehört. Bei der besonderen Bewegungsform, welche die Kreuzgelenkkuppelung darbietet, haben Polbahn und Polcurve einen eigenartigen Character. Sein Studium bildet den Inhalt der vorliegenden Abhandlung. Bilden die beiden grössten Kreise, in denen die Endpunkte des sphärischen Bogens $\frac{\pi}{2}$ geleitet werden, den Winkel 2ε, so stellt sich die Polbahn, wenn man den gemeinsamen Durchmesser beider grösster Kreise als η-Axe, die Ebene aber, welche ihren Winkel halbirt als die $\xi\eta$-Ebene eines rechtwinkligen Axensystems ansieht, als die Durchdringungscurve des Kegels

$$\frac{\xi^2}{\sin^2\varepsilon}+\frac{\eta^2}{\sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon\cos 2\varepsilon}-\frac{\zeta^2}{\cos^2\varepsilon}=0$$

mit der festen Einheitskugel dar. Denkt man andererseits mit der beweglichen Einheitskugel ein rechtwinkliges Axensystem verbunden, dessen x- und y-Axe durch die Endpunkte des beweglichen Quadranten bestimmt sind, so wird die Polbahn als der Durchschnitt des Kegels

$$(y^2+z^2)(x^2+z^2)\cos^2 2\varepsilon - z^4 = 0$$

mit der beweglichen Einheitskugel dargestellt. Beide sphärische Curven werden eingehend discutirt. Die Rectification der Polbahn führt auf ein elliptisches Integral dritter Gattung. Dasselbe wird numerisch behandelt für den Fall $\varepsilon = 30^\circ$ und der Gesammtumfang der Polbahn auf 2,644027 bestimmt. Der Winkel des der Polbahn entsprechenden Kegelmantels beträgt $151^\circ\, 29'\, 29'',75$. Der Umfang der Polcurve umfasst das Doppelte der Polbahn.

Schn.

M. D'OCAGNE. Note sur le système articulé de Peaucellier. Nouv. Ann. (2) XX. 456-459.

Eine durch elementare kinematische Betrachtungen gewonnene Bestimmung des Verhältnisses der verschiedenen Geschwindigkeiten, welche bei dem Apparat in Betracht kommen.

Schn.

GAGARINE. Systèmes articulés, assurant le mouvement rectiligne ou la courbure circulaire. C. R. XCIII. 711-713.

Den von Herrn Tchébychef seiner Zeit behandelten Articulationen zum Zweck der Führung von Punkten in möglichst langen nahezu geraden Strecken wird eine andere Articulation gegenübergestellt, welche gewisse Vorzüge darbietet.

Schn.

TCHÉBYCHEF. Théorème relatif à la courbe de Watt. Darb. Bull. (2) V. 216.

Wenn die zwei Ecken A und A_1 eines Dreiecks AA_1M bezüglich auf zwei Kreisen um C und C_1 gleiten, so beschreibt der Punkt M eine Bahn, welche mit ihrer Tangente höchstens einen Contact fünfter Ordnung haben kann. Die Bedingungen, unter denen der Grad des Contacts diese Höhe erreicht, werden gegeben.

Schn.

F. T. FREELAND. Linkages for x^m. Sylv., Am. J. III. 316-319.

Beschreibung eines aus Peaucellier'schen Elementen zusammengesetzten Apparates für x^m, wo m eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl ist. Wegen der Construction muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden. O.

[illegible]RÖHE. Ueber die Anwendung des Differentialparallelo[illegible]ramms zur Verzeichnung von Kreisbögen. [illegible]rdan, Z. f. V. IX. 243-247. 1880.

Theorie der von Herrn Sylvester erfundenen Geradführung. B.

P. RICHELMY. Sulle ruote dentate. Torino, Atti XVI. 29-44.

Der Verfasser bespricht zunächst die Anforderungen, welche an Zahnräder zu stellen seien, und erörtert dann die Probleme, welche sich aus diesen Forderungen ergeben. Die analytische Behandlung mehrerer dahin gehöriger Probleme, die den Hauptinhalt der Arbeit bilden, liefert vom mathematischen Standpunkt aus nichts Erwähnenswertes. O.

Lösungen von Aufgaben und Beweise specieller Lehrsätze aus der Kinematik von S. ROBERTS, G. HEPPEL, W. B. GROVE, G. F. WALKER, J. O'REGAN, D. EDWARDES, J. H. TURRELL finden sich ferner Ed. Times XXXIV, 46-47, 102, XXXV. 43-44, 85.

O.

Capitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

O. FABIAN. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Krak. Ber. 1881. (Polnisch).

Dn.

E. W. HYDE. Mechanics by quaternions. Anal. VIII. 17-24, 49-55.

Fortsetzung der früheren Notizen in Bd. VII. 137, 177, siehe F. d. M. XII. 1880. p. 654. Jn. (O.).

Genty. Applications mécaniques du calcul des quaternions. Résal J. (3) VII. 49-70.

Eine der Arbeiten, auf deren bevorstehendes Erscheinen Herr Laisant in der Vorrede zu seinem Lehrbuch der Quaternionen aufmerksam gemacht hatte. Es handelt sich darin im Anschluss an eine Arbeit des Herrn Darboux (Bord., Mém. (2) II. 1-67, siehe F. d. M. IX. 1877. p. 615) um die Theorie des astatischen Gleichgewichtes, speciell um die Bestimmung der vier verschiedenen Gleichgewichtslagen eines in einem Punkte befestigten Körpers unter dem Einfluss von n Kräften mit constanter Grösse und Richtung, woran sich Untersuchungen über das von Herrn Darboux eingeführte „Centralellipsoid" des Kräftesystems schliessen. Interessant ist der Fortschritt in der Quaternionentheorie, welchen Herr Genty dadurch macht, dass er den Ausdruck $S(ab)$ als „projectivisches Product" der beiden Vectoren a und b auffasst. Dieses Product ist nämlich identisch mit dem inneren Producte der Ausdehnungslehre, auf welche denn auch bei folgerechter Ausbildung der ganze Quaternionencalcül hinausläuft, wie dies schon Grassmann dargetan hat. Schg.

J. Greaves. A proof of the parallelogram of forces. Mess. (2) XI. 74-76.

Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte wird hergeleitet aus dem Princip der Uebertragbarkeit von Kräften unter Benutzung von Sätzen, die sich auf Kräftepaare beziehen.

Glr. (O.).

M. d'Ocagne. Remarque sur le centre de composition d'un système de forces quelconques dans le plan. Nouv. Ann. (2) XX. 201.

Ergänzende Notiz zu der Arbeit des vorigen Jahres, über die F. d. M. XII. 1880. p. 655 berichtet worden ist. O.

R. R. WEBB. On a theorem in statics. Mess. (2) X. 150-156.

A, B, C, D seien vier Punkte, welche ein endliches Tetraeder bestimmen. Betrachtet werden in der vorliegenden Arbeit: 1) die Componenten in sechs Linien BC, CA, AB, AD, BD, CD, welche einer Kraft in einer gegebenen Linie äquivalent sind; 2) die zusammensetzenden Paare, deren Axen dieselben Linien sind, und welche ein resultirendes Paar geben, dessen Axe mit der Richtung einer gegebenen Linie zusammenfällt. Die Untersuchung wird analytisch mit Benutzung von Tetraeder-Coordinaten geführt. Glr. (O.).

V. JAMET. Extrait d'une lettre. Nouv. Ann. (2) XX. 271-273.

Beweis des Satzes: „Wenn vier Kräfte im Gleichgewicht sind, liegen sie auf demselben Hyperboloid;" nebst Bemerkungen dazu. O.

D. PADELETTI. Sull' equivalenza astatica di un sistema di forze nella rotazione intorno ad un asse, nebst Bericht von E. FERGOLA, N. TRUDI, E. CAPORALI. Nap., Rend. XX. 247.

Enthält der Hauptsache nach eine veränderte Darstellung der bereits von Minding (Crelle J. XIV., XV.), Steichen (Crelle J. XXXVIII.) und Darboux (Mém. d. Bord. (2) II. 1-65, siehe F. d. M. IX. 1877. p. 615-617) gefundenen Resultate.

O.

R. HOPPE. Zu dem Aufsatz T. LXV. p. 218 des Archivs über den Schwerpunkt des Vierecks. Hoppe Arch. LXVI. 330.

Enthält die Berichtigung eines Irrtums, der in einer der Arbeiten, die im vorigen Bande des Jahrbuchs p. 658 besprochen sind, vorgekommen war. O.

E. W. Hyde. Centre of gravity of surface and solid of revolution. Sylv., Am. J. III. 329-331.

Behandlung der Frage mit Hülfe von Quaternionen.

O.

D. Padeletti. Nota sulla catenaria. Batt. G. XIX. 328-332.

Der Verfasser leitet die bekannten Sätze über die Kettenlinie her, indem er von einer Curve ausgeht, die er früher (Batt. G. XIV. p. 33, siehe F. d. M. VIII. 1876. p. 560) Tonograf (Spannungscurve) genannt hat. Diese Curve reducirt sich im Fall der Kettenlinie auf eine vertikale Gerade. O.

G. Bardelli. Sugli assi di equilibrio. Chelini, Coll. Math. 183-198.

Das Fundamentalproblem der von Möbius zuerst aufgestellten Gleichgewichtsaxen spricht der Verfasser in folgender Weise aus: „Gegeben ist ein System von unveränderlicher Gestalt im Gleichgewicht. Die Bedingungen sind zu finden, denen es genügen muss, damit das System, in eine neue Lage gebracht, in welcher in Intensität und Richtung dieselben Kräfte, wie in der ersten Lage auf dasselbe wirken, wieder im Gleichgewicht ist, und diese neue Lage zu bestimmen.“ Der Verfasser beschränkt sich in der vorliegenden Arbeit auf die Veränderung der Lage durch Drehung einer Axe. Er gelangt im Folgenden zu dem Satz: „Für ein unveränderliches System im Gleichgewicht giebt es immer drei unter einander senkrechte Richtungen (die Hauptgleichgewichtsaxen des Systems), die so beschaffen sind, dass bei einer Drehung des Systems um eine von ihnen um einen Winkel $\theta = (2n+1)\pi$ das System in eine neue Gleichgewichtslage gelangt, während die an den Punkten angebrachten Kräfte weder in Grösse noch in Richtung variiren.“ Im Weiteren folgen Specialisirungen und Untersuchungen der Eigenschaften der drei Axen. O.

G. Jung. Sui momenti obliqui di un sistema di punti e sull' „Imaginäres Bild" di Hesse. Chelini, Coll. Math. 327-339.

Hesse hat zuerst „das imaginäre Bild" eines Körpers bei der Untersuchung der Hauptträgheitsaxen benutzt (Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes 3te Aufl. 1875. Vorlesung 25), und Reye hat diese Untersuchungen in der Arbeit: „Trägheits- und höhere Momente eines Massensystems in Bezug auf Ebenen" (Borchardt J. LXXII. p. 293, siehe F. d. M. II. 1870. p. 671) fortgesetzt. Das imaginäre Bild wird bei ihm „zweite Nullfläche." In der vorliegenden Arbeit betrachtet der Verfasser ein (discretes oder continuirliches) System von Punkten O_i, die mit Coefficienten m_i behaftet sind, und gelangt auf synthetischem Wege zu einer Darstellung, die der obigen analog ist, aber allgemeiner insofern, als sie wohl zu einer imaginären Fläche zweiter Ordnung führt, wenn alle Coefficienten von demselben Vorzeichen sind (wie es im Fall der von Hesse betrachteten Fläche der Fall war), aber im allgemeineren Falle doch zu einer reellen Fläche zweiten Grades führt. Diese Darstellung ergiebt sich so naturgemäss, dass man sie als Verfolg des Gedankens von Reye und Hesse in der Tat als die natürliche Grundlage der Theorie der Momente zweiten Grades etc. betrachten kann; sie ist dabei frei von allem mechanischen Beiwerk und stellt die Theorie rein geometrisch auf. Nach einer kurzen Darstellung der Methode benutzt der Verfasser dieselbe zur Reduction eines Systems von n Punkten auf ein äquivalentes System von vier Punkten. O.

F. Wittenbauer. Ueber Momente höherer Ordnung. Wien. Ber. LXXXIII. 357-375.

Das Moment n^{ter} Ordnung einer ebenen Fläche bezüglich einer Axe ist gegeben durch den Ausdruck

$$M^{(n)} = \int d\mu . r^n,$$

wo $d\mu$ das Element der Fläche und r den Abstand desselben von der Axe bezeichnet. In Bezug auf diese Momente stellt sich der

Verfasser drei Fragen, wobei die Flächen als gleichförmig mit Masse belegt vorausgesetzt werden. 1) Welches sind die geometrischen Orte aller Geraden, bezüglich welcher das Moment n^{ter} Ordnung eines Ebenenstückes dieselbe Grösse besitzt? Es ergiebt sich eine Curve von der Classe $2n$, welche für ein grades n in zwei sich deckende Aeste zerfällt. 2) Welches ist der geometrische Ort aller Geraden, bezüglich welcher die Momente n^{ter} Ordnung zweier in derselben Ebene gelegener Flächen gleiche Grösse besitzen? Es ergiebt sich ebenfalls eine Curve von der Classe $2n$. 3) Welches sind die Geraden, bezüglich welcher die Momente n^{ter} Ordnung dreier in derselben Ebene gelegenen Flächen gleiche Grössen besitzen? Es ergeben sich $4n^2$ solcher Geraden. Diese allgemeinen Resultate finden im zweiten Teile der Arbeit specielle Anwendung auf Momente erster und zweiter Ordnung. O.

F. Wittenbauer. Ueber Deviationsmomente. Wien. Ber. LXXXIII. 972-1018.

Der allgemeine Ausdruck des Deviationsmomentes höherer Ordnung einer ebenen Fläche bezüglich eines in ihrer Ebene gelegenen Axenpaares ist

$$D = \int y^m x^n \, d\mu,$$

wo $d\mu$ das Flächenelement ist. Die Fläche wird auch hier als gleichförmig mit Masse belegt angesehen. Der Verfasser leitet zunächst zwei Ausdrücke für D her und behandelt dann Fragen über die Gruppirung von Geraden, wie sie im obigen Referat betrachtet sind, eingehend bis zu vier Flächen und den Momenten dritter Ordnung. O.

F. P. Ruffini. Dell' uso delle coordinate obliquangole nella determinazione dell' ellissoide d'inerzia. Bol., Mem. (4) II. 157-174

Ausgehend von den Resultaten der Chelini'schen Arbeit: „Dell' uso delle coordinate obliquangole nella determinazione

de' momenti d'inerzia" (Bol. Mem. (2) V. 1865) giebt der Verfasser eine Methode, welche unmittelbar zur Gleichung des Poinsot'schen Ellipsoides für den Fall, dass die Integrale

$$\int yz\,dM, \quad \int zx\,dM, \quad \int xy\,dM$$

zu Null werden, führt, und erläutert dies an einigen Beispielen.

O.

A. Cayley. On the flexure and equilibrium of a skew surface. Lond. M. S., Proc. XII. 103-108.

Die Fläche wird so vorausgesetzt, dass der Streifen zwischen zwei aufeinander folgenden erzeugenden Linien fest ist und die Biegung durch Rotation dieser Streifen um die erzeugenden Linien successive hervorgebracht ist. Die Theorie der Biegung für diese Flächen ist bekannt, aber die Theorie des Gleichgewichts einer solchen Fläche unter Wirkung beliebiger gegebener Kräfte ist noch nicht untersucht. Die erzeugenden Linien werden als materielle Linien betrachtet, an denen die Kräfte wirken. Es ergiebt sich dann als Gleichgewichtsgleichung

$$S\,[(X'\delta x+Y'\delta y+Z'\delta z)\,dm+T_1\delta U_1+T_2\delta U_2+T_3\delta U_3+T_4\delta U_4+T_5\delta U_5]=0,$$

wo die U_i fünf geometrische Bedingungen bezeichnen, während die T_i die unbestimmten Factoren sind, die die Verbindungskräfte darstellen, welche diesen Bedingungen entsprechen; x, y, z sind ferner die Coordinaten des Massenelementes dm auf einer speciellen Erzeugenden G und X', Y', Z' die diesen Axen parallelen Kräfte. Bezeichnet man ferner die Coordinaten eines speciellen Punktes mit ξ, η, ζ auf der Erzeugenden, mit p, q, r die Cosinus der Neigungswinkel (so dass $U_1 = p^2+q^2+r^2-1 = 0$) und mit ϱ die Entfernung von dm von P, so erhält man:

$$P(X\delta\xi+Y\delta\eta+Z\delta\zeta+L\delta p+M\delta q+N\delta r+T_1\delta U_1+\cdots+T_5\delta U_5)=0.$$

Um nun die Theorie der Biegung zu betrachten, denke man sich auf der Fläche eine beliebige Curve, welche jede Erzeugende G in einem Punkte $P(\xi\eta\zeta)$ schneidet, und bezeichne mit σ die Entfernung des Punktes P auf der Curve von einem festen Punkte

derselben. Dann sind ξ, η, ζ, p, q, r gegebene Functionen von σ, welche mit der Biegung variiren, aber mit gewissen Relationen, welche von der Biegung nicht beeinflusst werden. Ist P' der benachbarte Punkt der Curve, so dass die Richtung von PP' mit der Tangente PT in P zusammenfällt, so ist die Aenderung des Winkels $GPT = J$ infinitesimal, $\Omega d\sigma$, ebenso die Neigung GP zu GP' $\theta d\sigma$; endlich hat die Neigung von $G'P'$ zur Tangentialebene GPT in P einen gegebenen Wert $\varDelta d\sigma$. Zwischen diesen Grössen besteht die Gleichung $\theta^2 = \Omega^2 + \varDelta^2$. Ist die Fläche developpabel, so wird $\varDelta = 0$ und $\theta = \Omega$. Der Verfasser bestimmt dann im Folgenden die fünf Bedingungen U_i und erläutert die Aufgabe an Beispielen. O.

Weitere Beweise von Lehrsätzen und Lösungen von Aufgaben aus der Statik fester Körper von W. J. C. Sharp, G. H. Hopkins, G. S. Carr, J. L. Kitchin, G. Turriff, G. Eastwood, D. Edwardes, G. Heppel, J. Hammond, R. Leidhold, A. Martin, W. Siverley, Townsend, A. L. Watherston, J. W. Russell, T. R. Terry, G. F. Walker, J. A. Kealy, E. Fauquembergue finden sich Ed. Times XXXIV. 25-26, 57, 64, 67, 83, 89, 92, 114-115; XXXV. 27, 75, 89; Nouv. Ann. (2) XX. 231-235.

O.

M. Szystowski. Graphischer Calcül in der Ebene. T. II. Par. Denkschr. 1881. (Polnisch).

Ueber den ersten Teil siehe F. d. M. X. 1878. p. 806.

Der Inhalt des vorliegenden Teiles ist 1) Construction der Linien, 2) Multiplication, 3) Division, 4) Potenziren, 5) Radiciren, 6) Logarithmisiren. Dn.

C. Clericetti. Sulla determinazione dei momenti massimi, dovuti a pesi vincolati sopra una trave appoggiata. Lomb., Ist. Rend. (2) XIV. 172-189, 275-292.

Der Verfasser entwickelt auf analytischem Wege eine Reihe
'on Sätzen, welche graphostatisch durch Culmann und Andere
nehrfach gefunden wurden. Zu dem Zwecke betrachtet er die
Stellung, in welcher unter jeder Einzellast ein Maximalmoment
tattfindet, und zeigt, dass der Zug jedesmal um denselben Rad-
bstand zu verschieben ist, wenn die auf einanderfolgenden
Einzellasten ihr Maximalmoment liefern sollen. Störend ist hier-
ei die Consequenz, mit welcher auf Seite 177 ff. y_r statt $L-y_r$
n allen Formeln steht; die Resultate werden dadurch glück-
icherweise nicht berührt. Alsdann werden die Stellungen für
as absolute Maximum des Momentes und für das Maximum in
inem gegebenen Punkte betrachtet. Im zweiten Teile folgen
inige Zahlenbeispiele und eine Tabelle der gleichmässig ver-
eilten Lasten, welche für verschiedene Balkenlängen dasselbe
laximalmoment liefern, wie schwere Locomotivzüge.

Bn.

B. Hydrostatik.

A. Ehlert. Ueber den Mittelpunkt des Druckes einer ruhenden Flüssigkeit auf eine Kugel und auf ein Rotationsellipsoid, welche sich in der Flüssigkeit befinden. Pr. Frankfurt a. O.

Bestimmung des Mittelpunktes des Druckes, der auf einen
ı eine schwere homogene Flüssigkeit eingetauchten Körper aus-
eübt wird, für die Fälle, wo dieser Körper eine volle Kugel,
in Kugelsegment oder ein Rotationsellipsoid ist. Da die all-
emeinen Formeln für den Mittelpunkt des Druckes vorliegen,
o handelt es sich nur um die Ausführung von Integrationen; und
iese werden meist in umständlicher und schwerfälliger Weise
bsolvirt. Die Resultate können kaum ein Interesse bean-
pruchen, die Methode der Ableitung noch weniger. Wn.

A. Picart. Condition d'équilibre d'une masse fluide homogène, ayant la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux et animée d'un mouvement uniforme de rotation autour de l'un de ces axes. Nouv. Ann. (2) XX. 216-220.

Die Bedingungen, unter denen ein dreiaxiges Ellipsoid Gleichgewichtsfigur einer rotirenden Flüssigkeit sein kann, deren Teile sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, leitet der Verfasser folgendermassen ab. Die Componenten der Anziehung, welche das Ellipsoid auf einen Punkt seiner Oberfläche ausübt, haben die Form

$$X = Mx, \quad Y = Ny, \quad Z = Pz,$$

wo M, N, P bekannte Constanten (in Form von Integralen), x, y, z die Coordinaten des angezogenen Punktes sind. Man untersuche nun, unter welchen Bedingungen es möglich ist, diese Anziehung durch zwei andere Kräfte G und H zu ersetzen, von denen G normal zur Oberfläche des Ellipsoids, H normal zur Rotationsaxe ist. Diese Ersetzung ist möglich, wenn

$$G = \frac{MA^2}{p}, \quad H = \left(N - \frac{MA^2}{B^2}\right)r = \left(P - \frac{MA^2}{C^2}\right)r$$

ist. Dabei sind A, B, C die Halbaxen des Ellipsoids, r das Lot vom Punkte x, y, z auf die Rotationsaxe A, p das Lot vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene des Punktes x, y, z. Wenn nun das Ellipsoid mit einer solchen Winkelgeschwindigkeit ω rotirt, dass

$$\omega^2 r = H,$$

so wird die Componente H durch die Centrifugalkraft zerstört; es bleibt allein die normale Componente G übrig, die dem auf die Tangentialebene gefällten Lote umgekehrt proportional ist. Die so abgeleiteten Bedingungen lassen sich leicht in die übliche Form bringen. Wn.

Von Lamezan. Die Flächen kleinsten Widerstandes und grössten Antriebes. Berechnet und verwertet für das Vorderteil und Hinterteil von Schiffen. Arch. f. Art. 1881.

Der Verfasser hat sich nach der Vorrede nichts Geringeres vorgesetzt, als neben Lösung der im Titel genannten Aufgabe die Variationsrechnung neu zu begründen und in neuer Auffassung darzulegen. Leider ist der Text von Anfang an dunkel, die Bedeutung, welche der Verfasser den gebrauchten Ausdrücken untergelegt hat, abweichend von der üblichen und sogar oft wechselnd; aufeinanderfolgende Sätze widersprechen einander gradezu (vergl. S. 8 erster Absatz). Es ist daher dem Referenten nicht möglich gewesen, sich hindurch zu finden. Die gefundenen Resultate, so weit dieselben verstanden werden konnten, scheinen ebenfalls von allem bisher Bekannten abzuweichen, namentlich die beste Form des Vorderschiffes. Dieselbe soll nach dem Text ausser dem geringen Widerstande noch grosse anderweite Vorzüge besitzen; der Beweis dafür fehlt. Bn.

Capitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

Lobinin. Ueber das Princip der kleinsten Wirkung. Odessa. Nachr. XXXII.

Die Hauptaufgabe dieser Abhandlung ist die, durch Betrachtung der zweiten Variation des Integrals der Action $\int_{t_0}^{t_1} T dt$ zu beweisen, dass dieselbe durch die Uebergangsgleichungen wirklich zum Minimum wird. Ty.

R. Mischer. Ueber die zweite Lagrange'sche Form des d'Alembert'schen Princips. Diss. Jena.

Im Anschluss an seine früheren Arbeiten (siehe F. d. M. IX. 1877. p. 634) stellt hier der Verfasser die Differentialgleichungen

der Bewegung für beliebig viele Punkte auf, indem er sich dabei der Lagrange'schen Form des d'Alembert'schen Princips bedient, nämlich:

$$\frac{d\frac{\partial T}{\partial q_i'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0,$$

wo T die lebendige Kraft des Systems, q die independenten Coordinaten und Q die nach diesen genommenen Ableitungen der Kräftefunction bedeuten. Die gewonnenen Gleichungen benutzt er dann zur Lösung dreier Probleme, nämlich: 1) Ein Massenpunkt bewege sich auf einer beliebig beweglichen Geraden. Der Punkt unterliege nur der Schwerkraft, erleide aber ausserdem durch das Mittel, in welchem er sich befindet, einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand. Es ergiebt sich dabei eine lineare Bewegungsgleichung, welche im Allgemeinen die Zeit explicite enthält. Die t enthaltenden Glieder verschwinden nur im Fall einer vertikalen Rotationsaxe. 2) Der Schwerpunkt zweier Massen, welche durch eine gewichtslose Gerade starr verbunden sind, befinde sich auf einem Vertikalkreis, dessen Mittelpunkt mit einer constanten Beschleunigung auf einer in derselben Vertikalebene liegenden Geraden fortschreitet. Wie bewegen sich der Schwerpunkt und die beiden Massen? Hier erscheint t in den Gleichungen nicht explicite; die Gleichung des Schwerpunktes ist linear, die der Massenpunkte sind es nicht. 3) Vier gleiche Massen befinden sich in den Eckpunkten eines Rechtecks und sind unter sich starr verbunden. Wie bewegt sich das System, wenn es in einer Vertikalebene geworfen wird? Hier ergeben sich lineare Gleichungen, welche die Zeit nicht explicite enthalten.

Im zweiten Teile seiner Arbeit untersucht nun der Verfasser, unter welchen Bedingungen die Gleichungen den obigen Charakter haben. Indem er sich dabei auf einen Massenpunkt (oder Schwerpunkt eines Systems) beschränkt, gelangt er zu den Sätzen: „Ist ein Massenpunkt bei seiner Bewegung gezwungen, in einer Ebene oder der Fläche eines Kreiscylinders, auf einer Geraden oder Kreislinie zu bleiben, so sind seine Bewegungsgleichungen linear."

„Die Zeit kommt nicht explicite in den Bewegungsgleichungen vor, wenn ein Massenpunkt von einer constanten Kraft beeinflusst wird, und wenn der Ort, auf dem er bleiben soll, eine ausschliesslich translatorische Bewegung hat, die mit constanter Beschleunigung, welche auch Null sein kann, erfolgt.“ „Die Zeit kommt auch nicht explicite in den Bewegungsgleichungen vor, wenn der Massenpunkt von einer constanten Kraft beeinflusst wird, und wenn der Ort, auf dem er bleiben soll, eine ausschliesslich rotirende mit constanter Geschwindigkeit erfolgende Bewegung um die Richtung jener Kraft ausführt.“

O.

P. v. Geer. Over de beweging van stelsels, gebonden aan voorwaarden, die afhangen van den tijd.

Nieuw Arch. VII. 164-206.

In diesem Aufsatz wird die Bewegung von Systemen behandelt, welche durch Bedingungen gebunden sind, die von der Zeit abhängen. In einer historischen Einleitung wird mitgeteilt, was von früheren Mathematikern, nämlich Bernoulli, Clairaut, Euler, Ampère und Anderen, für das in Frage stehende Problem geleistet worden ist. In der Arbeit selbst geht der Verfasser von den allgemeinen Bewegungsgleichungen eines veränderlichen Systems aus, um alsdann zu zeigen, dass hier das Princip der lebendigen Kräfte nicht mehr gilt, wenigstens kein Integral giebt. Darauf werden die neuen Formen der Bewegungsgleichungen, welche zuerst von Hamilton, später von Jacobi abgeleitet worden sind, von Neuem behandelt und gezeigt, welche Form sie annehmen, wenn die Verbindungen des Systems von der Zeit abhängen. In diesem Falle wird nämlich die charakteristische Function nicht durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

worin $H = L - U$ die Differenz der lebendigen Kraft und Kräftefunction bedeutet, gegeben, sondern durch die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma q'p - (L + H) = 0,$$

wo q die neuen Coordinaten, $q' = \frac{\partial q}{\partial t}$, $p = \frac{\partial L}{\partial q'}$ sind.

Indem der Verfasser alsdann zu den Anwendungen übergeht, wird zuerst auf eine frühere Arbeit des Herrn Grinwis (siehe F. d. M. X. 1878. p. 615) hingewiesen, welche die Aufsuchung der charakteristischen Function bei einigen einfachen Bewegungsaufgaben behandelte, und eine andere allgemeinere Lösung derselben Aufgaben mittels dieser Function gab. Weiter werden einige einfache Aufgaben behandelt, bei welchen die Zeit direct in den Verbindungen auftritt, z. B. die Bewegung eines Punktes auf einer drehenden Linie und einem sich bewegenden Kreise. Allgemeiner wird die Bewegung eines materiellen Punktes untersucht, welcher auf einer Curve bleiben muss, deren Parameter von der Zeit abhängt. Werden die Coordinaten des Punktes mittels der Gleichungen der Curve ausgedrückt, wie folgt:

$$x = f_1(q, t), \quad y = f_2(q, t), \quad z = f_3(q, t),$$

so wird nun die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \frac{\partial f_2}{\partial q}\frac{d^2 f_2}{dt^2} + \frac{\partial f_3}{\partial q}\frac{d^2 f_3}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial q}.$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung giebt aufgelöst q als Function von t, und dadurch ist die Bewegung des Punktes vollständig bestimmt. Als Anwendung wird die Bewegung eines Punktes betrachtet, welcher auf einer ebenen Curve um eine in der Ebene derselben gelegene Axe rotirt. Der besondere Fall des gewöhnlichen Pendels, wobei die Ebene eine einfache Drehung um eine verticale Axe ausführt, wird ausführlich behandelt und die Berechnung vollständig durchgeführt. Dann wird die Frage beantwortet, welche Curve bei der einfachen Drehung der Ebene die Eigenschaft des Tautochronismus zeigt. Die Gleichung dieser Curve ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, die aber nicht integrirbar ist. Hat die Curve, auf welcher die Bewegung des Punktes stattfinden muss, nur eine fortschreitende Bewegung, so ist die Auflösung einfacher, und es ergiebt sich, dass eine gleichförmige Bewegung der Curve keinen Einfluss auf

diejenige des Punktes ausübt. Bei einer geradlinigen gleichförmig veränderlichen Bewegung der Curve braucht nur die constante Beschleunigung in umgekehrter Richtung der des Punktes hinzugefügt zu werden.

Im folgenden Jahrgang wird die Abhandlung fortgesetzt werden. G.

V. Cerruti. Intorno ad una generalizzazione di alcuni teoremi di meccanica. Chelini, Coll. Math. 171-182.

Der Verfasser leitet eine Reihe von Sätzen her über solche Bewegungen eines Punktes (§ 6) oder eines Systems (§ 7-9), für welche die Differentialgleichungen ein oder mehrere Integrale haben, die linear sind in Bezug auf die Componenten der Geschwindigkeit, jede mit einer einzigen isolirten willkürlichen Constanten. Hier möge zur Charakteristik der Untersuchungen, wie sie ähnlich von Bertrand in der Arbeit: „Sur quelques-unes des formes les plus simples que puissent présenter les intégrales des équations différentielles du mouvement d'un point matériel.“ (Liouville J. (2) II. 113-140) für die Bewegung eines Punktes in einer Ebene veröffentlicht sind, das Folgende angeführt werden: „Die Differentialgleichungen der Bewegung eines materiellen Punktes lassen ein Integral von der Form

$$Ax'+By'+Cz'+D=b$$

zu, wenn die Wirkungslinien der angreifenden Kraft einem linearen Complex Ω angehören. x', y', z' sind dabei die Componenten der Geschwindigkeit nach den Axen; A, B, C, D sind Functionen der Coordinaten x, y, z; endlich ist b eine willkürliche Constante.“ Das Integral

$$lx'+my'+nz'+p(zy'-z'y)+q(xz'-x'z)+r(yx'-y'x)=b,$$

wo

$$A=l+ry-qz,\quad B=m+pz-rx,\quad C=n+qx-py$$
$$(l,\ m,\ n,\ p,\ q,\ r\ \text{constant}),$$

drückt aus, dass das Moment der Bewegungsgrösse des Punktes in Bezug auf den Complex Ω während der ganzen Dauer der Bewegung constant bleibt. O.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma q'p - (L + H) = 0,$$

wo q die neuen Coordinaten, $q' = \frac{\partial q}{\partial t}$, $p = \frac{\partial L}{\partial q'}$ sind.

Indem der Verfasser alsdann zu den Anwendungen ü
wird zuerst auf eine frühere Arbeit des Herrn Grinwi
F. d. M. X. 1878. p. 615) hingewiesen, welche die Au
der charakteristischen Function bei einigen einfachen Be
aufgaben behandelte, und eine andere allgemeinere Lö
selben Aufgaben mittels dieser Function gab. Weit
einige einfache Aufgaben behandelt, bei welche
direct in den Verbindungen auftritt, z. B. die Bew
Punktes auf einer drehenden Linie und einem sich
Kreise. Allgemeiner wird die Bewegung eines materi
untersucht, welcher auf einer Curve bleiben muss
meter von der Zeit abhängt. Werden die Coordinat
mittels der Gleichungen der Curve ausgedrückt,

$$x = f_1(q, t), \quad y = f_2(q, t), \quad z = f_3(q$$

so wird nun die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial f_1}{\partial q}\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \frac{\partial f_2}{\partial q}\frac{d^2 f_2}{dt^2} + \frac{\partial f_3}{\partial q}\frac{d^2 f_3}{dt^2} =$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung
q als Function von t, und dadurch ist d
Punktes vollständig bestimmt. Als Anwen
wegung eines Punktes betrachtet, welcher au
um eine in der Ebene derselben gelegene Axe
Fall des gewöhnlichen Pendels, wobei d
Drehung um eine verticale Axe ausführt,
delt und die Berechnung vollständig durc
Frage beantwortet, welche Curve bei d
Ebene die Eigenschaft d
dieser Curve ist eine
aber nicht integri
...gung des P

U. Dainelli. Sulla decomposizione della forza acceleratrice d'un punto materiale libero che si muove secondo una curva qualunque. Batt. G. XIX. 171-197.

Die Arbeit schliesst sich unmittelbar an diejenige an, die in Bd. XII. 1880. d. Jahrb. p. 678 besprochen ist. Auch hier werden im ersten Abschnitte Probleme der Ebene, im zweiten Probleme des Raumes behandelt. Zur Charakteristik der abgeleiteten Sätze führen wir den letzten für die Ebene an: „Wenn ein frei beweglicher Punkt eine ebene Curve durchläuft, und man die beschleunigende Kraft zerlegt in zwei Componenten, F' normal zu der Geraden, die den beweglichen Punkt mit dem Coordinatenanfangspunkt verbindet, und F'' längs der Tangente zur Bahn, so haben die beiden Kräfte die Grössen

$$F' = k^2 \frac{T^2 r}{\varrho \Delta^3}, \quad F'' = k^2 \frac{T}{\Delta^2} \frac{dT}{ds} - k^2 \frac{T^2}{\Delta^3},$$

wo T eine willkürliche Function der Coordinaten des beweglichen Punktes, ds das Bahnelement, ϱ den Krümmungsradius, r und Δ die Entfernungen des beweglichen Punktes vom Coordinatenanfangspunkte und von der Normalen zur Bahn bezeichnen. k endlich ist eine Constante, die von der Anfangsgeschwindigkeit und der Anfangslage des beweglichen Punktes abhängt." Für den Raum diene zur Charakteristik: „Wenn ein frei beweglicher Punkt eine Bahn von doppelter Krümmung durchläuft in Folge einer Kraft F auf der osculirenden Ebene und parallel einer gegebenen festen Ebene, so ist die Grösse dieser Kraft gegeben durch

$$F = \frac{h^2}{\varrho \sin^2(P_f, P_0) \sin^3(F, \mathrm{tg})},$$

wo P_f, P_0 und F, tg die Winkel zwischen der festen und der osculirenden Ebene und zwischen der Richtung der Kraft und der Tangente an die Bahn bezeichnen, ϱ der Krümmungsradius ist, und k eine Constante darstellt, die von der beliebigen Anfangsgeschwindigkeit und Anfangslage abhängt."

O.

E. COMBESCURE. Sur quelques questions concernant les forces centrales. Résal J. (3) VII. 239-276.

Binet hat im zweiten Bande des Liouville'schen Journ. (Serie I) an Stelle der drei gewöhnlichen Gleichungen für die Bewegung, die durch eine Centralkraft hervorgebracht wird, ein System von n Gleichungen betrachtet, die die charakteristische Form jener Gleichungen haben. Der Verfasser giebt in dem vorliegenden Aufsatze eine Verallgemeinerung der Binet'schen Arbeit nach zwei Richtungen. Er betrachtet erstens eine beliebige Zahl von Systemen Binet'scher Gleichungen, und zweitens führt er an Stelle des Radiusvectors eine allgemeine quadratische Form ein. Der Verfasser führt im § 1 der Arbeit zunächst die Verallgemeinerung im Wesentlichen nach der von Binet benutzten Methode durch, bespricht im § 2 und 3 specielle Transformationen und Relationen, welche zwischen den Constanten und den Anfangswerten der Variablen sich ergeben, um die Resultate davon in § 4 auf die Bewegung längs eines Kegelschnittes anzuwenden. § 5 und 6 enthalten zum Teil Reproductionen Jacobi'scher Untersuchungen.

O.

R. HOPPE. Ueber die Ausdehnung der Kepler'schen Gesetze. Hoppe Arch. LXVI. 328-329.

Fortsetzung und Schluss der Notiz auf p. 112 desselben Bandes (F. d. M. XII. 1880. p. 672). Die Resultate der Untersuchung sind folgende: Das erste und dritte Gesetz gelten bedingungslos, das zweite nur für Attraction nach dem Newton'schen Gesetz. Jeder elliptischen Bewegung um ein Attractionscentrum, das aber auf einer Axe liegen muss, und zwar vom Mittelpunkt entfernter als der Krümmungsmittelpunkt des Scheitels, entspricht ein angebbares Potential. Statt dessen kann auch das Attractionscentrum im Mittelpunkt selbst liegen. Das Potential ist rational 1) im letztgenannten Fall, 2) wenn die Bahn ein Kreis, 3) wenn das Attractionscentrum Brennpunkt ist. Das vierte Gesetz gilt (abgesehen von Newton'scher Attraction) bei

elliptischer Bewegung, wenn das Quadrat der Flächengeschwindigkeit dem Parameter der Ellipse proportional ist, für Planeten, deren Radii vectores nie einander gleich werden. Die Form der Relation zwischen mittlerer und excentrischer Anomalie ist für alle elliptischen Centralbewegungen dieselbe. O.

SCHRADER. Ueber die Bewegung von Massenpunkten nach dem Newton'schen Gesetz. Hamb. Mitt. 1881. 6-7.

Der Verfasser stellt die Differentialgleichungen für n Massenpunkte auf, bespricht die allgemeinen Eigenschaften derselben und wendet sich zur Specialisirung auf zwei solcher Punkte.

O.

R. RADAU. Travaux concernant le problème des trois corps et la théorie des perturbations. Darb. Bull. (2) V. 270-295.

Die Methode der Variation der Constanten zeigt, sobald man über die ersten Stufen successiver Annäherung heraus ist, grosse Schwierigkeiten und genügt nicht einmal immer, da starke Variationen der elliptischen Elemente sich gegenseitig compensiren und nur schwache Veränderungen in den Coordinaten hervorbringen können. Man hat daher verschiedene Methoden versucht. Vom praktischen Gesichtspunkte haben die Methoden der Quadratur Dienste geleistet, ebenso haben die Methoden von Hansen Eingang gefunden, auf denen ja die neueren Arbeiten von Gyldén beruhen. Endlich hat man noch direct die bekannten Integrale des Problems der drei Körper nutzbar zu machen versucht. Letzterer Methode ist die Arbeit des Herrn Radau gewidmet. Der Verfasser giebt in dieser Arbeit einen Ueberblick des Standes des Problems, indem er von der orthogonalen Transformation ausgeht, die er früher (siehe F. d. M. I. 1868. p. 321-323) gegeben hatte, und die in besagter Richtung gegebenen Methoden auseinandersetzt mit besonderer Berücksichtigung der Arbeit, die Weiler im Jahre 1880 publicirt hatte (s. F. d. M. XII. 859-860).

O.

W. Kobert. Ueber ein mechanisches Problem.
Pr. Freienwalde a. O.

Das Problem betrifft die Bewegung eines Punktes, der im umgekehrten cubischen Verhältnis der Entfernung angezogen wird. Der Verfasser geht von der Hamilton'schen Differentialgleichung nach Jacobi's Vorlesungen über Dynamik p. 162 aus, leitet nach Einführung von Polarcoordinaten die Integralgleichungen der Bewegung her, welche dann einer detaillirten Discussion unterworfen werden. Zu neuen Resultaten für das längst (zuletzt von Gascheau wieder 1879, siehe F. d. M. XI. p. 646 und früher von Euler) behandelte Problem gelangt der Verfasser nicht.

O.

Appell et Janaud. Remarques sur l'introduction de fonctions continues n'ayant pas de dérivée dans les éléments de la mécanique. C. R. XCIII. 1005-1008.

Die Verfasser erläutern die Möglichkeit der Existenz stetiger Functionen ohne Derivirte auch in der Mechanik.

O.

Janaud. Sur les équations fondamentales de la dynamique. Hoppe Arch. LXVII. 160-164.

Hier wird eingehender die Bewegung eines Punktes auf einer Geraden für den Fall untersucht, dass die Abscisse eine stetige Function der Zeit ist, welche für keinen Wert der Variabeln eine zweite Derivirte hat.

O.

Züge. Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes auf vorgeschriebenen Curven und cylindrischen Flächen unter Einwirkung einer Attractionskraft. Pr. Lingen.

Es wird die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer cylindrischen Fläche betrachtet unter Einwirkung einer Attractions-

kraft, deren Richtung durch einen mit der Fläche fest verbundenen Punkt geht, und deren Grösse einer ganzen Potenz der Entfernung der beiden Punkte proportional ist. Die Cylinderfläche selbst hat nur eine fortschreitende Bewegung. Der Verfasser stellt im ersten Paragraphen der Arbeit die allgemeinen Bewegungsgleichungen auf. Den Hauptinhalt aber nehmen die Specialisirungen in Anspruch. Diese bestehen zunächst darin, dass die Betrachtung auf Kreiscylinder beschränkt wird. Die sämmtlichen Fälle, die der Verfasser betrachtet, lassen sich in zwei gesonderte Bewegungen zerfällen. § 2 behandelt den Fall, dass der anziehende Punkt in der Axe des Kreiscylinders liegt. Die Potenzen der Anziehung, die hier betrachtet werden, sind -2, -3, 0, 1, 3. In § 3 wird das Attractionscentrum in einen Punkt ausserhalb der Axe des Kreiscylinders verlegt. Hier beschränkt sich der Verfasser auf den Fall, wo die Kraft proportional der ersten Potenz der Entfernung ist. Betreffs der einzelnen Resultate muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

O.

A. Seydler. Ueber die Bewegung von Punkten auf gegebenen Flächen und Curven. Prag. Ber. 1880. 111-125.

Wenn die Bewegung eines Punktes an eine Curve oder Fläche gebunden ist, so lassen sich oft höchst zweckmässig krummlinige Coordinaten der Behandlung zu Grunde legen. Als solche sind eingeführt worden die Grössen q_1, q_2, q_3 durch die Gleichungen

$$q_1 = f_1(x, y, z)$$
$$q_2 = f_2(x, y, z)$$
$$q_3 = f_3(x, y, z),$$

so dass, wenn eine der Coordinaten constant, die anderen beiden als Functionen der Zeit aufgefasst werden, die Bewegung auf einer Fläche vor sich geht, auf einer Curve aber, wenn zwei der Coordinaten als unveränderlich gedacht werden. Eine wichtige Rolle bei einem derartigen Coordinatensystem spielt die Grösse

$$h_n = \sqrt{\left(\frac{\partial q_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_n}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_n}{\partial z}\right)^2},$$

welche Lamé Differentialparameter der ersten Ordnung von der entsprechenden Function q_n genannt hat. So oft nun die Bewegung eines Punktes auf einer festgesetzten Curve erfolgt und die tangentielle Beschleunigung, welche im Allgemeinen eine Function der Lage, der Geschwindigkeit und der Zeit sein wird, durch die Coordinaten q_n und durch ihre Differentialquotienten nach der Zeit q_n' und durch die Zeit allein, ferner auch die Grössen h_n durch q_n allein ausgedrückt werden können, ist die Bewegung durch eine einzige Differentialgleichung gegeben, welche im Anschluss an die Somow'sche Kinematik aufgestellt wird. Diese Differentialgleichung ist immer integrirbar, sofern die Tangentialbeschleunigung eines Punktes eine Function der Lage, d. h. der Coordinaten allein ist. Als Beispiel wird die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Krümmungslinie eines Ellipsoides behandelt. Ist ein Punkt an eine Fläche gebunden, so sind für die Bewegung desselben zwei Differentialgleichungen aufzustellen. Die allgemeinen Formen derselben werden auf die Bewegung eines materiellen Punktes angewendet, der auf einem abgeplatteten Rotationsellipsoid, dessen Axe in die Richtung der Schwere fällt, zu verbleiben genötigt ist, und auf den Fall, wo die Bewegung auf einem gegen die vertikale Richtung geneigten Cylinder unter dem Einfluss der Schwere vor sich geht. Schn.

G. Morera. Sulla separazione delle variabili nelle equazioni del moto di un punto materiale su una superficie. Torino, Atti XVI. 276-295.

Beweis des folgenden, von Liouville nur für einige Fälle von Coordinaten gegebenen Satzes: „Es seien φ und ψ die krummlinigen Coordinaten eines auf einer Oberfläche beweglichen Punktes und φ', ψ' ihre Derivirten nach der Zeit. Dann sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit eine

Trennung der Variabeln φ und ψ möglich ist, 1) dass der Ausdruck für die lebendige Kraft von der Form

$$\theta(\Phi\varphi'^2 + \Psi\psi'^2)$$

sei, wo θ eine Function ist, in der φ und ψ getrennt sind, und Φ und Ψ Functionen bezeichnen, die nur φ, resp. ψ enthalten, 2) dass in dem Produkt θU der Kräftefunction U in θ die Variabeln φ und ψ ebenfalls getrennt auftreten." O.

H. Résal. Sur quelques théorèmes de mécanique.
Résal J. (3) VII. 33-48.

In Abschnitt I. wird bewiesen, dass die Beschleunigung eines freien Punktes, wenn ihre Richtuug constant ist, proportional ist dem Verhältnis des Cubus der Geschwindigkeit der Punkte zum Krümmungsradius seiner Bahn. Angewandt wird der Satz auf die Bestimmung der Krümmungsradien der Parabel. No. II. enthält den Satz: „Die Beschleunigung eines Punktes nach einem festen Centrum gerichtet ist proportional dem Cubus der Geschwindigkeit, dem Radiusvector und der Krümmung der Bahn," nebst Anwendungen auf die Krümmungsradien der Ellipse, Hyperbel, der hyperbolischen und logarithmischen Spirale. No. III. endlich behandelt folgendes Problem. Wenn man sich auf einer Rotationsfläche eine Curve denkt, so kann man diese stets dadurch entstanden denken, dass sich ein materieller Punkt auf einem Meridian bewegt, während sich gleichzeitig die Meridianebene um die Rotationsaxe dreht. Zwischen diesen Bewegungen muss ein Zusammenhang existiren, der durch die Natur der gegebenen Curve bedingt ist. Der Verfasser stellt hier die Bedingungen für die Componenten einer Kraft längs des Meridians und der Tangente an den Parallelkreis auf, durch deren Wirkung eine gegebene Curve beschrieben werden kann. Unter den Systemen von derartigen Componenten wird dann das einfachste gewählt. Der Verfasser bestimmt daher die geodätische Componente (d. h. diejenige, welche senkrecht zur Geschwindigkeit in der Tangentialebene ist) und leitet daraus die Lage der osculi-

renden Ebene und die des Krümmungsradius der gegebenen Curve her. Dies Problem wird für sphärische und cylindrische Coordinaten durchgeführt. O.

F. Tisserand. Sur le mouvement du pendule conique. Darb. Bull. (2) V. 448-454.

Herr Résal hat in seinem: „Traité de Mécanique" gezeigt, dass die Curve, welche von der Projection des Endpunktes eines Pendels auf den Horizont im Falle kleiner Oscillationen beschrieben wird, eine Ellipse ist, deren grosse Axe sich gleichförmig um ihren Mittelpunkt dreht. Der Verfasser bestimmt in der vorliegenden Arbeit den Grad der Näherung dieser Lösung. Die Lösung des Herrn Résal ist darnach als erste Annäherung zu betrachten. Es folgt die Besprechung der zweiten und dritten Annäherung. Im letzten Fall ist die Rotationsbewegung der grossen Axe nicht mehr der Zeit proportional, sondern mit einem kleinen periodischen Gliede behaftet. O.

L. Ordinaire de Lacolonge. Théorie géométrique du pendule de Foucault. Bord., Mém. (2) IV. 339-365.

Nach einem historischen Rückblick auf die Frage des Foucault'schen Pendels leitet der Verfasser eine von der gewöhnlichen abweichende Formel her für die bekannte Erscheinung, nämlich

$$\operatorname{tang} P = \operatorname{tang} \beta \cos L^0 - \sin \lambda \sin L^0.$$

Die Folgerungen, welche sich aus dieser Formel ergeben würden, werden eingehend untersucht. Doch ist es nicht wohl möglich, dieselben in Kürze zu recapituliren, weshalb Referent auf die Arbeit selbst verweisen muss. O.

N. Amoroso. Un teorema di meccanica. Batt. G. XIX. 380-384.

Herr Battaglini hat in seiner „Meccanica razionale" gezeigt, dass, wenn die Bewegung eines Punktes unter alleiniger Einwir-

kung der Schwere auf einer sphärischen Fläche stattfindet, sich die Lösung auf eine Quadratur reducirt. In der vorliegenden Note wird gezeigt, dass dies für jede Rotationsfläche der Fall ist, und dies an dem Beispiel des Rotationsparaboloides erläutert. O.

E. Jürgenssen. Ueber eine Art Bewegungen eines Punktes auf einer Kugelfläche. Diss. Halle.

Der Punkt ist gezwungen auf der Oberfläche einer Kugel zu bleiben und wird von einem auf der Oberfläche befindlichen Anziehungscentrum proportional einer ganzzahligen Potenz angezogen. Der Verfasser leitet die Gleichung für die Bewegung her, für welche, wie nachgewiesen wird, das zweite Kepler'sche Gesetz gilt, bestimmt dann den Widerstand, den die Oberfläche der Kugel auf den Punkt ausübt, und giebt eine Discussion der Bahn, wie der Bewegung für die Fälle

$$n \geqq -2,\ n = -3,\ n < -3.$$

O.

A. Sonntag. Die Brachystochrone auf dem Rotationsparaboloid. Pr. Bockenheim.

Der Verfasser behandelt das Problem der Brachystochrone für einen materiellen Punkt, der auf einem Rotationsparaboloid bleiben muss und nur der Schwere unterworfen ist. Denkt man sich den materiellen Punkt, nachdem er den zweiten gegebenen Punkt auf dem kürzesten Wege erreicht hat, sich selbst überlassen, so wird er durch einen tiefsten Punkt gehen und schliesslich denselben Parallelkreis wieder erreichen, von dem er ausgegangen war. Die oscillirende Bewegung des materiellen Punktes zwischen zwei bestimmten Parallelkreisen wird im zweiten Ab-[illegible]t der Arbeit behandelt, indem die Zeit derselben, die Be-[illegible] in der Bahn, endlich die Länge der Bahn bestimmt [illegible]

O.

H. Willotte. Sur un cas particulier de la théorie du mouvement d'un solide invariable dans un milieu résistant. C. R. XCIII. 376-379.

δ sei die mittlere Entfernung der materiellen Punkte, aus welchen das Widerstand leistende Mittel besteht. Die Wirkung des Mittels auf einen in ihm befindlichen starren Körper kann als Function von $\frac{1}{\delta}$ dargestellt werden, z. B. durch

$$F + F_1 \frac{1}{\delta} + F_2 \frac{1}{\delta^2} + \cdots.$$

Der theoretische Wert des ersten Gliedes kann für verschiedene Fälle bestimmt werden; der Verfasser will nur einen speciellen Fall untersuchen. Es sei m die Masse irgend eines materiellen Punktes, aus welchem das widerstehende Mittel besteht, v die Geschwindigkeit dieses Punktes zu irgend einer Zeit und M die Masse des sich bewegenden starren Körpers. $\frac{m}{M}$ sei so klein, dass die Potenzen, welche höher als die erste, vernachlässigt werden können. mv^2 ist im Allgemeinen von derselben Grössenordnung wie die Grössen der gesammten Translations- und Rotationsenergie, welche zu irgend einer Zeit in M enthalten sind. Unter der Voraussetzung, dass der Körper sich in einem permanenten mittleren Bewegungszustand befindet, bekommt der Verfasser für die in der Zeit t verlorenen oder gewonnenen Energiequantitäten

$$\Sigma M(u_1^2 - u^2) = 2St\left(\frac{m}{4M} K_2 w^2 + u^2 fK - u\omega f_2 K\right) w$$

$$\Sigma J(\omega_1^2 - \omega^2) = 2St\left(\frac{m}{4M} K_2 w^2 - \frac{\omega}{3} f_1 K_1 w - u\omega f_2 K - \omega^2 f_3 K\right) w$$

und sagt: „Für (die Geschwindigkeit des Schwerpunktes von M) $u = 0$ und für (die Winkelgeschwindigkeit von M in Bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende momentane Rotationsaxe) $\omega = 0$ sind sie nicht Null, sondern positiv. Wenn ein nicht in Bewegung befindlicher starrer Körper in ein widerstehendes Mittel unter den angegebenen Bedingungen gebracht wird, kommt er in Bewegung. Die Wirkung eines widerstehenden Mittels auf

einen starren Körper ist also nicht notwendig eine verzögernde, sie kann in gewissen Fällen eine beschleunigende sein." Wenn man in ein Mittel von angegebener Beschaffenheit irgend eine Zahl von Kugeln bringt, bei deren jeder der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt zusammenfällt, und die irgend welche Fortschreitungs- und Drehungs-Geschwindigkeiten haben, so strebt das ganze System einem stabilen dynamischen Gleichgewichtszustande zu, welcher charakterisirt ist durch die Gleichungen

$$Mu^2 = M'u'^2 = M''u''^2 = \cdots = \frac{3}{4}\frac{K_2}{K} m w^2.$$

Die Drehgeschwindigkeiten verändern sich nicht. Der Verfasser meint, dass die gegebenen Ausdrücke für die Energievariationen wenigstens analog sein müssen den unbekannten Ausdrücken, welche die Wirkung des Aethers auf die Atome der wirklichen Körper darstellen. Rs.

M. D'OCAGNE. Sur le mouvement d'un point pesant dans un milieu résistant. Nouv. Ann. (2) XX. 506-511.

Bei der vertikalen Bewegung eines schweren Körpers verläuft die aufsteigende und absteigende Bewegung nicht gleichförmig, wenn man auf den Widerstand Rücksicht nimmt. Der Verfasser beweist unter Annahme eines Widerstandes proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit, dass für beide Teile der Bewegung die Summe

$$e^{\frac{g\alpha_{n-1}}{K^2}} + e^{\frac{g\alpha_n}{K^2}}$$

constant und unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit ist. Dabei bedeutet g die Intensität der Schwere im leeren Raume, K die Widerstandsconstante, α_{n-1} und α_n zwei auf einander-folgende in gleichen Zeiten durchlaufene Strecken. O.

AUSTERLITZ. Beitrag zum ballistischen Problem. Wien. Ber. LXXXIV. 704-709.

Die Arbeit beginnt mit historischen Notizen über frühere Arbeiten. Diese sind indess sehr lückenhaft. So ist z. B. die Arbeit von Gautier (Ann. de l'É. Norm. V. 7-65, siehe F. d. M. I. 1868. p. 335) gar nicht erwähnt, während sie doch für das Problem einen wesentlichen Fortschritt insofern bezeichnet, als sie die Form des Geschosses und die daraus sich ergebenden Modificationen des Luftwiderstandes berücksichtigt. Der Verfasser der vorliegenden Notiz nimmt auf die Form des Geschosses keine Rücksicht, sondern betrachtet einen Punkt von der Masse 1, der unter einem Elevationswinkel γ mit der Anfangsgeschwindigkeit c in die Höhe geworfen wird. Der Widerstand des Mittels wird proportional der n^{ten} Potenz der Geschwindigkeit und dem constanten Factor K angenommen. Durch diese Annahme wird die Bewegung selbst eine ebene. Der Verfasser leitet zunächst allgemein die Gleichung der Bahn her und specialisirt sie dann für $n = 4$. Er erhält dann

$$x = -\frac{1}{g}\int_{\operatorname{tg}\gamma}^{y'} \frac{dy'}{\sqrt{\frac{1}{c^4\cos^4\gamma} - 4\frac{\varkappa}{g}\int_{\operatorname{tg}\gamma}^{y'}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}dy'}}.$$

Statt der geschlossenen logarithmischen Form entwickelt er diesen Ausdruck in eine Reihe. Vernachlässigt man dann, wie es für Elevationswinkel bis 10° zulässig ist, die höheren Potenzen, so ergiebt sich schliesslich als Gleichung der Flugbahncurve

$$y = x\operatorname{tg}\gamma - \frac{gx^2}{2c^2\cos^2\gamma} - \frac{g\varkappa x^3}{3},$$

eine Gleichung, die für $\varkappa = 0$ in die gewöhnliche Parabel des luftleeren Raumes übergeht. Der Verfasser unterzieht nun diese Curve und die in ihr stattfindende Bewegung einer detaillirten Discussion und betrachtet schliesslich den Fall, dass auch das zweite Glied der oben erwähnten Reihe berücksichtigt werden muss.

O.

A. G. Greenhill. On the motion of a projectile in a resisting medium. Woolwich, Art. Inst. Proc. XI.

Das Referat muss verschoben werden, bis die Arbeit abgeschlossen sein wird. Die vorliegende Notiz ist nur ein einzelnes Resultat aus einer ganzen Reihe wieder. [illegible]

F. Cesàro. Sur le calcul des éléments balistiques. Rev. d'Art. 39.

Der Verfasser zeigt im ersten Teil, dass die Zugrundelegung der einfachsten Parabel für die Berechnung der ballistischen Elemente zu artilleristischen Zwecken völlig ausreichend sei. Der zweite Teil handelt von der annäherungsweisen Bestimmung der Schusselemente einer Waffe. Die Arbeit bietet mathematisch nichts Wesentliches. O.

G. A. Maggi. Sul moto di un filo flessibile ed inestensibile che si sposta pochissimo dalla sua posizione d'equilibrio. Ber. G. XIX. 1-44.

Der Verfasser betrachtet die Bewegung eines biegsamen, unausdehnbaren Fadens von variabeler Dichtigkeit, der sich in einem widerstehenden Mittel befindet und gegebenen Kräften unterworfen ist, unter der Voraussetzung, dass sich die einzelnen Punkte nur wenig aus ihrer Gleichgewichtslage entfernen. Die Arbeit zerfällt in drei Teile. Im ersten werden die Gleichungen der oscillatorischen Bewegung des Seiles ohne irgend welche specielle Annahmen über die Kräfte aufgestellt, und zwar in doppelter Weise, einmal für die Componenten der Verrückung, parallel zu irgend welchen drei orthogonalen Axen; zweitens werden dann Relationen aufgestellt zwischen den longitudinalen und den transversalen Vibrationen, welche letztere teils in der osculirenden, teils in der dazu normalen Ebene gelegen sind. Im zweiten Teile werden diese Gleichungen reducirt unter der Annahme, dass die wirkende Kraft in Intensität und Richtung constant bleibt. Der [illegible] Teil beschäftigt sich mit der Integration der einfacheren [illegible]en Gleichungen sowohl für den Fall, dass das eine [illegible]t ist, als für den, dass beide fest sind, wenn für

einen bestimmten Augenblick die Gestalt und das Gesetz gegeben ist, nach dem die Geschwindigkeit sich von Punkt zu Punkt ändert. In letzterem Fall wird das widerstehende Mittel nur für den Fall der Homogeneïtät betrachtet. Der Fall des homogenen Seiles wird dann besonders untersucht. O.

P. G. Tait. Note on a singular problem in kinetics. Edinb. Proc. X. 173-175.

Das behandelte Problem ist das folgende: Zwei gleiche Massen sind an den Enden eines Seiles befestigt, das wie in der Atwood'schen Fallmaschine über eine glatte Rolle geht. Die eine ist in einer vertikalen Ebene ein wenig aus ihrer Gleichgewichtslage verrückt worden. Man soll die Natur der folgenden Bewegung finden. Es wird bemerkt, dass das Problem in Folge der eigentümlichen Form der Bewegungsgleichungen von besonderer mathematischer Schwierigkeit, und dass es vom physikalischen Gesichtspunkte ein vortreffliches Beispiel einer sehr langsamen, aber continuirlichen Transformation von gemischter potentieller und kinetischer Energie in kinetische allein sei. Die Bewegungsgleichungen werden aufgestellt und einige allgemeine Bemerkungen daran geknüpft. Ein Versuch zur Lösung des Problems wird nicht gemacht. Cly. (O.).

G. Lehmann. Ueber die Schwingungen an einanderhängender Pendel. Pr. Rudolstadt.

E. Jackwitz. Die unendlich kleinen Schwingungen eines aus zwei Massenpunkten bestehenden Pendels. Pr. Posen.

Beide Arbeiten geben detaillirte Ausführungen des durch den Titel hinlänglich gekennzeichneten Problems. In der ersten Arbeit betrachtet der Verfasser zwei und drei an einanderhängende Pendel und geht von der Arbeit von Dumas (siehe F. d. M. VI. 1874. p. 606) aus; die zweite Arbeit beschränkt sich auf

zwei Pendel. Siehe übrigens auch die Arbeit von Résal (F. d. M. VIII. 1876. p. 596). O.

H. Résal. Note sur la généralisation d'un théorème de Pappus. Nouv. Ann. (2) XX. 335-338.

Der Verfasser verallgemeinert einen von Pappus ausgesprochenen Satz dahin, dass er nun lautet: „$A_1 A_2 \dots A_n A_1$ sei ein ebenes oder räumliches geschlossenes Polygon von n Seiten. Jeder der n materiellen Punkte habe die Masse m und bewege sich gleichzeitig in den Schenkeln $A_1 A_2, \dots A_n A_1$ in demselben Sinne mit constanten Geschwindigkeiten, welche den Längen der Seiten $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots$ proportional sind. Dann bleibt der Schwerpunkt der Massen m fest." Die Notiz enthält einen Beweis dieses Satzes.

O.

Despeyrous. Équations différentielles du mouvement d'un corps solide libre ou gêné sollicité par des forces quelconques. Toul. Mém. (8) III. 145-168.

Die sechs Differentialgleichungen der Bewegung eines Körpers, der von beliebigen Kräften angegriffen wird, können auf die Form

$$\Sigma X = \frac{d}{dt}\iiint dm \frac{dx}{dt} \quad \text{u. s. f.},$$

$$L = \frac{d}{dt}\iiint dm\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) \quad \text{u. s. f.}$$

gebracht werden, wo x, y, z die Coordinaten eines Punktes des Körpers, bezogen auf drei feste beliebige rechtwinklige Axen im Raume sind. Die Bewegungsgrössen, welche zu einer gegebenen Zeit die verschiedenen Elemente des Körpers besitzen, sind denselben Gesetzen der Zusammensetzung und Zerlegung unterworfen, wie die Kräfte. Nimmt man daher als Reductions-[illegible]strum den Anfangspunkt der Coordinaten, so reduciren sich [illegible] Bewegungsgrössen auf eine einzige Grösse und ein einziges [illegible]r. Es möge nun A ein Punkt sein, dessen Coordinaten die

Componenten $\iiint dm \frac{dx}{dt}$ u. s. w. der Resultante der Bewegungsgrössen sind, und B ein Punkt, dessen Coordinaten die Componenten $\iiint dm\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$ u. s. w. des Paares der Bewegungsgrössen sind. Dann wird jeder der Punkte A und B eine Curve im Raume beschreiben. Ebenso aber werden sich für dasselbe Reductionscentrum auch die bewegenden Kräfte auf eine einzige Kraft R und ein einziges Paar G reduciren. Es gilt nun folgender Satz: „In jedem Augenblick ist 1) die Geschwindigkeit AA_1 des Endpunktes der Resultante der Bewegungsgrössen in Grösse und Richtung gleich der einzigen Kraft R der bewegenden Kräfte; 2) die Geschwindigkeit BB_1 des Endpunktes B der Axe des einzigen Paares dieser selben Bewegungsgrössen in Grösse und Richtung gleich dem einzigen Paar H dieser selben bewegenden Kräfte.“ Dieser Satz wird im zweiten Teile der Arbeit zur Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung eines festen Körpers benutzt, und zwar 1) für die Rotation um eine feste Axe, 2) für die Rotation um einen festen Punkt, 3) für die Bewegung eines festen Körpers und endlich 4) für die Rotation eines in Beziehung auf eine Axe symmetrischen Körpers um einen Punkt derselben..

O.

C. Frenzel. Neue Lösung eines Rotationsproblems.
Pr. Belgard. Schlömilch Z. XXVI. 104-127.

Das Problem heisst: „Es soll die Bewegung eines Rotationskörpers um einen als fest angenommenen Punkt seiner Axe unter dem Einfluss der Schwerkraft bestimmt werden.“ Es wird behandelt im Anschluss an die Methoden, welche Weierstrass in seinen Vorlesungen (1879) und Hermite in seiner Arbeit: „Sur quelques applications des fonctions elliptiques“ C. R. 1877, 78, (siehe F. d. M. IX. 349, X. 315, XI. 301, XII. 370) gegeben haben.

O.

E. Brassinne. Détermination des trois axes d'un corps sur lesquels les forces centrifuges exercent, pendant la rotation, une action maximum. Résal J. (3) VII. 215-218.

E. Brassinne. Sur les trois axes centrifuges. C. R. XCIII. 49-50.

Die erste Arbeit hat denselben Inhalt, wie diejenige, die im vorigen Bande des Jahrbuches p. 686 nach anderen Quellen besprochen ist. Die zweite Notiz enthält einige Folgerungen für die Centrifugalaxen aus dem dort bewiesenen Satze. O.

E. Brassinne. Sur les axes centrifuges. Toul. Mém. (8) III. 181-182.

Notiz über die Fortsetzung einer Arbeit, über die im vorigen Bande p. 686 referirt worden ist. Die Notiz ist zu kurz, um daraus ein Bild des Inhalts der Arbeit gewinnen zu können. O.

E. Beltrami. Sulla teoria degli assi di rotazione. Chelini, Coll. Math. 340-362.

Der Verfasser giebt eine zusammenhängende und vereinfachte Darstellung der auf Grundlage Poinsot'scher Gedanken von Chelini und Turazza aufgebauten Theorie der Rotationsaxen. O.

F. Siacci. L'iperboloide centrale nella rotazione de' corpi. Chelini, Coll. Math. 6-16.

„Wenn ein Körper ohne Kräfte sich um einen festen Punkt dreht, so rollt ein Hyperboloid, welches mit ihm verbunden ist und die Hauptträgheitsaxen des Körpers in Bezug auf den Punkt zu Axen hat, ohne zu gleiten auf einem geraden Kreiscylinder, dessen Axe durch den festen Punkt geht und parallel der Axe des Angriffspaares ist. Sind A, B, C die Hauptträgheitsmomente des Körpers in Bezug auf den festen Punkt, F die lebendige Kraft

desselben, G das Angriffspaar, so sind die Quadrate der Axen des Hyperboloids umgekehrt proportional G^2-2AF, G^2-2BF, G^2-2CF. Ist das mittlere Moment gleich $G^2:2F$, so bleibt die betreffende Axe parallel dieser mit dem Körper verbundenen Geraden, welche sich auf einer Kettenlinie abwickelt, die auf dem festen Cylinder gezogen ist." Die Arbeit enthält den Beweis dieser und ähnlicher Sätze. O.

W. Hess. Ueber das Gyroscop. Klein Ann. XIX. 121-154.

Der Verfasser giebt hier gewissermassen eine Fortsetzung der Studien, über die im vorigen Bande des Jahrbuchs p. 649 berichtet worden ist. Er betrachtet hier den Fall des Gyroscops, wo kein seitlicher Anstoss auf dasselbe wirkt. Dabei werden namentlich zwei Punkte berücksichtigt, einmal die Gestalt des Kegels, den die Figuraxe während der Bewegung beschreibt, und zweitens die Gestalt der beiden Kegel, durch deren Abrollen Poinsot die Bewegung um einen festen Punkt anschaulich gemacht hatte. Was den ersten Kegel betrifft, so sind die Resultate des Verfassers: Die Figuraxe des Gyroscops beschreibt im Raume um die Richtung der Schwere einen Kegel, der zwischen zwei Kreiskegeln eingeschlossen bleibt. Den einen derselben berührt er, während er sich auf den andern mit Rückkehrkanten aufsetzt. Letzterer ist nur bedingt durch die Anfangsneigung der Figuraxe gegen die Verticale, der andere durch zwei Constante, von denen es abhängt, ob der Schwerpunkt des Gyroscops oberhalb des Unterstützungspunktes bleiben kann, oder nicht. Die Bahn des Schwerpunkts ist eine sphärische Curve, deren horizontale Projection eine Hypocycloide oder auch eine Epi- oder Hypocycloide ist, je nachdem der Schwerpunkt unterhalb oder oberhalb der Unterstützungspunkte liegt. Was den zweiten Punkt betrifft, so ist für das Gyroscop der rollende Kegel im Allgemeinen transcendent und ganz von einem Kreiskegel um die Figuraxe eingeschlossen. Die Polhodie ist eben und besteht aus unendlich vielen congruenten Zweigen, welche die Form eines Blattes besitzen. Der feste Kegel ist ebenfalls transcendent und

von zwei ihn berührenden Kreiskegeln um die Axe der Schwere eingeschlossen, deren einer durch die Anfangsneigung der Figuraxe gegen die Verticale bestimmt ist, während der andere durch drei Constante bestimmt ist. Die Herpolhodie ist eine Curve doppelter Krümmung. Die Resultate werden an speciellen Beispielen und durch Zeichnungen erläutert. O.

E. Fauquembergue. Question de licence. Nouv. Ann. (2) XX. 420-421.

Ein fester Körper bewegt sich um einen festen Punkt. Man soll für einen beliebigen Augenblick den Ort der Punkte des Körpers suchen, für welche die Beschleunigung senkrecht zur augenblicklichen Rotationsaxe ist. O.

R. Hoppe. Wälzung eines cylindrisch begrenzten Körpers auf Horizontalebene. Hoppe Arch. LXVI. 213-219.

Es wird die Bewegung eines Körpers untersucht, der zum Teil von einer cylindrischen Fläche beliebigen Querschnitts, sonst aber beliebig begrenzt ist und eine horizontale Ebene ausschliesslich mit dem cylindrischen Teile berührt, ohne daran zu gleiten. Die Verteilung der Masse ist beliebig, und es wirkt nur die Schwere. Der Verfasser behandelt das Problem zunächst allgemein, specialisirt dann die Lösung für verschiedene Fälle, wie z. B. für den Fall, dass die Cylinderbasis ein Kreis ist, dessen vollständige Durchführung früher bereits von Bender (Grunert Arch. LX. 113, siehe F. d. M. IX. 1877. p. 658) gegeben worden war. Zum Schluss werden die tautochronischen Oscillationen einer Walze betrachtet. O.

R. Hoppe. Wälzung eines von einer Tangentenfläche begrenzten Körpers auf Horizontalebene. Hoppe Arch. LXVI. 373-385.

Unter Wälzung eines Körpers wird diejenige Bewegung ver-

standen, bei welcher er eine Unterstützungsfläche, ohne daran zu gleiten, beständig längs einer Linie berührt. Ein Körper kann sich dann nur auf einer Fläche wälzen, auf welcher der zur Berührung gelangende Teil seiner Oberfläche abwickelbar ist. In dem betrachteten Falle ist die Unterstützungsfläche eine Horizontalebene, der zur Berührung gelangende Teil der Oberfläche als allgemeinste Form einer Abwickelbaren ein solches Stück einer Tangentenfläche, welches sich nicht über die Gratlinie hinaus erstreckt. Es ergiebt sich als Resultat: „Die lebendige Kraft der betrachteten Bewegung ist gleich dem halben Product des Trägheitsmomentes in Bezug auf die momentan in die Grundebene fallende Erzeugende und des Quadrats der Wälzungsgeschwindigkeit.“ § 2 enthält Beispiele. O.

R. Hoppe. Ueber das Rollen eines seiner Schwere überlassenen Körpers auf horizontaler Ebene. Hoppe Arch. LXVI. 260-273.

Es wird die Bewegung eines Körpers untersucht, auf den allein seine Schwere wirkt, und der beständig eine horizontale Ebene in einem Punkte berührt ohne daran zu gleiten. Die Bewegung einer abwickelbaren Fläche, die einen Ausnahmefall des allgemeinen Problems bildet, wird einer besonderen Behandlung vorbehalten. Die betrachtete Bewegung besteht aus zwei Elementarbewegungen. Die Fläche berühre die Grundebene zur Zeit t in P. Nach Verlauf der Zeit dt gelangt der benachbarte Oberflächenpunkt P' zur Berührung im Grundebenenpunkte P''. Der Weg $P'P''$ kann eine beliebige Neigung gegen die Grundebene haben. Ist P'' die Projection des Oberflächenpunktes P_0 zur Zeit t, so kann man der Bewegung folgende substituiren. Durch Rotation des Körpers um seine Normale um den Winkel $d\varphi$ beschreibt P' erst den Weg $P'P_0 = PP'd\varphi$, durch nachheriges Rollen senkt er sich vertical von P_0 auf P''. Beide Wege sind unendlich klein von der zweiten Ordnung. Beim Rollen steigt P vertical auf in der Tangente an seine actuelle Bahn. Daher resultirt aus der Substitution eine Verrückung seiner schliess-

lichen Lage, die aber als unendlich klein höherer Ordnung verschwindet. Durch beide Punkte ist die Lage des Körpers bestimmt, und die Substitution ist von keiner Aenderung der Bewegung begleitet. Die Bewegung lässt sich daher in eine Rotation um die Normale und in eine eigentliche Rollbewegung zerlegen. Im Folgenden stellt der Verfasser die allgemeinen Differentialgleichungen der Bewegung auf und behandelt dann in § 2 die Rotation um die Normale, wobei der Fall der Nullrotation überall speciell berücksichtigt wird. Er bestimmt dabei die Bahn des Berührungspunktes auf der Oberfläche ohne Rücksicht auf die Zeit, d. h. er bestimmt also die Bewegung des Körpers geometrisch. § 3 behandelt den Fall eines Rotationskörpers mit Specialisirung auf den Fall, dass die Berührungscurve der Parallelkreis der Bewegung ist. O.

R. Hoppe. Bewegung und Stabilität eines laufenden Rades. Hoppe Arch. LXVII. 165-176.

Das Rad rollt ohne Einwirkung äusserer Kräfte ausser seiner Schwere auf einer horizontalen Ebene und wird als eine Kreisfläche betrachtet, deren Dichte nur radial variirt, so dass der Mittelpunkt Schwerpunkt und das auf die normale Axe bezügliche Trägheitsmoment doppelt so gross als für jede diametrale Axe ist. Ist c der Radius, m die Masse, c^2mn das Trägheitsmoment für die diametrale Axe, so ist $0 < n < \frac{1}{2}$. Die äussersten Werte 0 und $\frac{1}{2}$ entsprechen den Grenzfällen, wo die Masse im Mittelpunkte concentrirt ist oder auf der Peripherie liegt. Variirt die Dichte proportional dem Radius zwischen α und β, so wird $n = \frac{3}{20}\frac{\alpha+4\beta}{\alpha+2\beta}$, also bei constanter Dichte $n = \frac{1}{4}$. In § 1 stellt der Verfasser zunächst die Coordinaten xyz eines beliebigen Punktes dm des Rades auf, dargestellt durch die Polarcoordinaten in der Ebene des Rades und die Neigung des Rades gegen die Grundebene, specialisirt dieselben für den Berührungspunkt mit

der Grundebene und gelangt durch Benutzung der d'Alembert'schen Gleichung

$$\int\left(x''\delta x+y''\delta y-(z''+g)\delta z\right)dm=0$$

zu den Differentialgleichungen der Bewegung. In § 2 findet sich die Integration der Gleichungen behandelt und in § 3 eine Discussion der Resultate. Betreffs der Einzelheiten muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden. O.

Weitere Beweise von Lehrsätzen und Lösungen von Aufgaben aus der Dynamik fester Körper von SCOTT, D. EDWARDES, J. J. WALKER, C. J. MONRO, G. F. WALKER, TOWNSEND, W. J. C. SHARP, A. ANDERSON, R. TUCKER, G. S. CARR, C. MORGAN, WOLSTENHOLME, MATZ, T. R. TERRY, D. WICKERSHAM, J. L. KITCHIN, A. MARTIN, E. B. ELLIOTT, W. M. COATES finden sich Ed. Times XXXIV. 26, 30-31, 36-37, 44-45, 49, 56-57, 66, 88; XXXV. 42-43, 44-45, 55-56, 69, 72-73, 79, 83, 108.

O.

C. H. C. GRINWIS. De overgang der energie bij de botsing van lichamen. Amst. Versl. en Meded. XVI. 244-273. Arch. Néerl. XVI. 303-332.

Dieser Aufsatz behandelt den Uebergang der Energie beim Stosse der Körper. An erster Stelle ist über den geraden Stoss zweier fester Körper gesprochen und sind auf bekannte Weise die Ausdrücke für die Geschwindigkeit und Energie nach dem Stosse bestimmt, wobei der Elasticitäts-Coefficient eingeführt wird. Aus diesen Ausdrücken werden einige Folgerungen und besondere Fälle abgeleitet. Darauf wird der Uebergang der Energie von dem einen Körper zum andern berechnet und daran einige Folgerungen geknüpft. Der schiefe Stoss wird zwischen zwei Kugeln ohne Reibung untersucht und durch Zerlegung in die Richtung der Bewegung auf den geraden Stoss zurückgeführt. Schliess-

lich wird noch der Fall betrachtet, dass mehrere Körper nach einander einem geraden Stosse unterworfen werden, und dabei angenommen, dass die Körper vollkommen elastisch sind.

G.

H. Léauté. Remarque sur le frottement d'une corde sur un cylindre lorsque tous deux tournent avec une grande vitesse. S. M. F. Bull. IX. 46-49.

Der Verfasser zeigt, dass die Grenzgleichung für das Gleiten von Seilen, die um rotirende Cylinder geschlungen sind, $\frac{T_1}{T_2} < e^{fA}$ ihre Gültigkeit verliert, sobald es sich um Treibriemen und Riemenscheiben von grosser Geschwindigkeit handelt, weil dabei die dem Normaldruck entgegenwirkende Centrifugalkraft berücksichtigt werden muss. Statt obiger Gleichung, die in der Praxis angewendet zu werden pflegt, entwickelt der Verfasser die Bedingung:

$$\frac{T_1}{T_2} < e^{fA} - \frac{P}{g}(e^{fA}-1)\frac{v^2}{T_2}.$$

Für Dratseile, welche Bewegungen auf grosse Entfernungen übertragen, leitet er hieraus zum Schluss die sehr einfache Bedingung $\frac{f_2}{f_1} < e^{fA}$ ab, wo f_1 und f_2 die Pfeile der von dem Seile gebildeten Bogen bedeuten.

Bn.

H. Résal. Sur la théorie des boulets ramés. C. R. XCIII. 916-920.

Der Verfasser giebt die Gleichungen für die Bewegungen von Stangenkugeln in Bezug auf den als ruhend gedachten gemeinsamen Schwerpunkt, unter der Voraussetzung, dass beide Massen gleich sind und die Masse des Stabes, sowie der Luftwiderstand vernachlässigt wird. Die Integrationen ergeben eine Sinuslinie mit kreisförmig gebogener Axe. Die im Stabe vor-

kommenden Spannungen zeigen schliesslich, dass die Masse desselben keine unerhebliche sein kann. Bn.

B. Hydrodynamik.

F. Auerbach. Die theoretische Hydrodynamik. Nach dem Gange der Entwickelung in der neuesten Zeit in Kürze dargestellt. Braunschweig. Vieweg u. Sohn.

Die vorliegende Schrift, durch eine von dem Venetianischen Institute der Wissenschaften gestellte Preisaufgabe veranlasst, giebt auf circa 150 Seiten eine Uebersicht über das Gebiet der Hydrodynamik im engeren Sinne, also die allgemeine Theorie der Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten. Sie zerfällt in drei Teile. Im ersten werden die Grundgleichungen für die Bewegung idealer, d. h. nicht reibender Flüssigkeiten sowohl in der Euler'schen, als in der sogenannten Lagrange'schen Form abgeleitet und die verschiedenen Transformationen derselben entwickelt, woran sich die Erörterung der Frage nach der Zerlegung der Flüssigkeitsbewegungen schliesst. Diesem grundlegenden Teile folgen die Anwendungen. Nach einander werden behandelt 1) Strömung und Wellenbewegung, 2) Ausfluss und Strahlbildung, 3) gleichzeitige Bewegung fester und flüssiger Körper, 4) Wirbelbewegung. Im dritten Teile endlich werden die reibenden Flüssigkeiten der Betrachtung unterworfen. Auch hier werden nach Aufstellung der allgemeinen Gleichungen diejenigen speciellen Probleme, die bisher gelöst sind, ausführlich besprochen. Wenn in einzelnen Abschnitten auch eine grössere Ausführlichkeit erwünscht wäre (z. B. in dem Paragraphen, der von der Ebbe und Flut handelt), und wenn auch ein wichtiges Problem absichtlich unberücksichtigt gelassen ist, nämlich das der Bewegung eines gravitirenden flüssigen Ellipsoids, so giebt die vorliegende Schrift doch ein sehr vollständiges Bild dessen, was in den letzten dreissig Jahren von den

verschiedenen Forschern auf dem Gebiete der Hydrodynamik geleistet ist. Der sachliche Zusammenhang der einzelnen Untersuchungen ist überall in die erste Linie gestellt. Dabei ist aber durchweg auf die historische Entwickelung aufmerksam gemacht, und die einschlägigen Originalarbeiten sind teils ausführlich besprochen, teils ihrer Bedeutung nach kurz charakterisirt. Diese eingehende Berücksichtigung der historisch-literarischen Seite der Sache verleiht dem Buche eine Bedeutung auch neben der unübertrefflichen Darstellung, welche man von denselben Problemen in Kirchhoff's Mechanik findet. Wn.

E. Betti. Sopra i moti che conservano la figura ellissoidale a una massa fluida eterogenea. Brioschi Ann. (2) X. 173-187; Rom., Acc. L. (3) V. 201-202.

Das zuerst von Dirichlet, dann von Riemann behandelte Problem der Bewegung eines homogenen flüssigen Ellipsoids, dessen Teile sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen (cf. Riemann, Gesammelte Werke p. 168) wird in der vorliegenden Arbeit weiter reducirt. Zugleich wird dasselbe dahin erweitert, dass die Dichtigkeit nicht mehr als constant angenommen wird, sondern als variabel von einer Ellipsoidfläche zu einer ähnlichen und ähnlich liegenden. Der Verfasser wendet die von Riemann eingeführten Variabeln an, drückt weiter die Lage der Hauptaxen, sowie des Riemann'schen Axensystems gegen drei feste Axen durch die Euler'schen Winkel aus und führt dann mittels der Hamilton'schen Methode die Lösung des Problems auf die Bestimmung der vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit neun unabhängigen Variabeln zurück. Von dieser Gleichung ergeben sich leicht fünf Integrale. Um die allgemeine Lösung zu erhalten, bleibt daher noch übrig, ein einziges Integral eines Systems von sechs, ein Integral eines Systems von vier und ein Integral eines Systems von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zu finden. Uebrigens behalten bei dem hier behandelten allgemeineren Problem die Differentialgleichungen dieselbe Form, wie bei dem ein-

facheren Problem, wo die Flüssigkeit als homogen angenommen wird, nur dass ein Glied statt des Factors 1 einen andern von der Dichtigkeitsänderung abhängigen Factor hat. Dies gilt namentlich auch für den Fall, wo die Figur der flüssigen Masse sich bei der Bewegung nicht ändert, wo also die Bewegung stationär ist.

Wn.

L. Birkenmajer. Ueber das kinetische Gleichgewicht eines dreiaxigen Ellipsoides. Krak. Denkschr. 1881. (Polnisch).

Dn.

A. G. Greenhill. On the general motion of a liquid ellipsoid under the gravitation of its own parts. Cambr. Proc. IV.

Fortsetzung der Arbeit über die Rotation eines flüssigen Ellipsoids (siehe III. 288-293. F. d. M. XI. 1879. 678; XII. 1880. 696.). Das Problem ist früher von Lejeune-Dirichlet und Riemann behandelt worden. Des Verfassers Methode, die auf der Bewegung der Axen beruht, ist aber von den früheren verschieden.

Glr. (O.).

A. Bjerknes. Sur l'imitation, par voie hydrodynamique, des actions électriques et magnétiques. C. R. XCIII. 303-305.

Kurzer Bericht über die weiteren Untersuchungen des Verfassers, die scheinbaren Anziehungserscheinungen betreffend, welche oscillirende Kugeln in einer Flüssigkeit auf eingetauchte Körper in derselben ausüben. Hierhin sollen auch die Anziehungserscheinungen in der Nähe von Schallquellen gehören.

Ok.

W. M. Hicks. On the problem of two pulsating spheres in a fluid. Cambr. Proc. IV. 29-35.

In einer früheren Arbeit (Cambr. Proc. III. 276-285, siehe F. d. M. XI. 1879. 677; XII. 1880. 695) hat der Verfasser gezeigt, wie die Kraft zwischen zwei pulsirenden Kugeln bestimmt werden kann mit Hülfe von Massenbildern (mass-images), und hat das Glied berechnet, das von der Zeit-Variation des Potentials abhängt. In Folge eines Uebersehens wurde das Glied, das von dem Quadrate der Geschwindigkeit abhängt, so behandelt, als wenn es keine Wirkung auf die resultirende Kraft hätte. Dies ist aber nur dann richtig, wenn die Potenzen von $\frac{1}{r}$ (r Entfernung), welche höher als die zweite sind, vernachlässigt werden. In der vorliegenden Arbeit zeigt der Verfasser, wie diese Glieder gefunden werden. Glr. (O.).

E. J. Routh. Some applications of conjugate functions. L. M. S. XIII. 73-89.

Die Substitution

$$\xi+i\eta = f(x+iy),$$

durch welche die Ebene xy conform auf der Ebene $\xi\eta$ abgebildet wird, wendet der Verfasser an 1) zur Transformation der Differentialgleichung, von der die Schwingungen der Membranen abhängen, 2) auf die hydrodynamischen Bewegungen, die nur von zwei Coordinaten abhängen. Es ergiebt sich ad 1) dass, wenn man die Bewegung einer Membran in der $\xi\eta$-Ebene kennt, man damit auch sofort die einer anders begrenzten Membran in der xy-Ebene hat. Freilich sind beide Membranen nicht gleichzeitig homogen. Ebenso kann man ad 2) aus der bekannten Flüssigkeitsbewegung innerhalb eines Raumes die innerhalb eines andern ableiten. Die genannten Beziehungen werden eingehend discutirt und an einigen Beispielen erörtert, ohne dass sich wesentlich neue Resultate ergeben. Wn.

G. Riess. Ueber die Bewegung einer Flüssigkeit in einem cylindrischen Gefässe. Pr. Wurzen.

Der obige Titel giebt das behandelte Problem nicht präcise an. Es handelt sich nämlich nicht um die Bewegung einer Flüssigkeit in einem cylindrischen Gefässe im Allgemeinen, sondern speciell nur um die unendlich kleinen Schwingungen einer schweren incompressiblen Flüssigkeit, die in einem cylindrischen Gefässe enthalten ist. Der Ansatz des Problems wird in bekannter Art gemacht (cf. Kirchhoff, Mechanik, Vorlesung 25, § 3); auch die Form der Lösung ist die bekannte, nur dass natürlich wegen der cylindrischen Begrenzung Bessel'sche Functionen an Stelle der Kreisfunctionen treten. Eine particuläre Lösung ist von der Form

$$\varphi = (A\cos(kt) + B\sin(kt))\cdot\frac{e^{\gamma(c-z)}+e^{-\gamma(c-z)}}{e^{\gamma c}+e^{-\gamma c}}\cdot J_0(\gamma r).$$

Darin ist φ das Geschwindigkeitspotential, z die verticale Ordinate, von der Gleichgewichtsoberfläche der Flüssigkeit an gerechnet, c die Tiefe des Gefässes, r die Entfernung eines Punktes von der Axe; A und B sind willkürliche Constante, J_0 bezeichnet die Bessel'sche Function, während

$$k^2 = g\gamma\,\frac{e^{\gamma c}-e^{-\gamma c}}{e^{\gamma c}+e^{-\gamma c}}$$

ist; γ endlich ist eine Wurzel der transcendenten Gleichung

$$J_1(\gamma a) = 0,$$

wo a den Radius des Cylinders bezeichnet. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für φ ist die Summe solcher Ausdrücke, wenn man darin für γ die verschiedenen Wurzeln der obigen transcendenten Gleichung nimmt. In bekannter Art werden die willkürlichen Constanten aus dem Anfangszustande bestimmt, sodann wird die Bewegung, die einer particulären Lösung entspricht, genauer discutirt. Endlich wird auch der Fall behandelt, in dem die Bessel'sche Function zweiter Art auftritt, wo also die incompressible Flüssigkeit sich in einem cylindrischen Gefässe befindet, dessen Basis ein Kreisring ist. Ueberall wird die Bewegung als nur von zwei Coordinaten z, r abhängig angesehen.

Wn.

P. A. Cornaglia. De la propagation des ondes dans les liquides. Résal J. (3) VII. 289-340.

Nach des Verfassers Ansicht sind hinsichtlich der Wellenbewegung von Flüssigkeiten die rein theoretisch abgeleiteten Resultate bisher für die praktische Anwendung ohne jeden Wert. Er sucht daher neue Formeln aufzustellen, die den Beobachtungen besser entsprechen. Zu dem Zwecke leitet er, ohne auf die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen Rücksicht zu nehmen, specielle, nur unter gewissen Annahmen gültige Gleichungen für das Problem der Wellenbewegung ab, die dann durch successive Näherungen integrirt werden. Referent kann diesen Formeln einen theoretischen Werth nicht beimessen, sondern dieselben höchstens als empirische Formeln ansehen, falls sie, was dahingestellt bleibe, für die Praxis brauchbar sind. Zur Charakterisirung der Resultate des Verfassers mögen folgende Bemerkungen hier Platz finden. Von Grenzbedingungen, die an der freien Oberfläche der Flüssigkeit resp. am Grunde zu erfüllen sind, ist nirgends die Rede. Die Formeln für die Bewegung (bei der, wie üblich, von der inneren Reibung der Flüssigkeitsteilchen abstrahirt wird) genügen der Bedingung der Continuität und Incompressibilität nicht genau, sondern nur annähernd. Ueber die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen hat der Verfasser die von der bisher allgemein angenommenen abweichende Ansicht, dass diese Bahnen Ellipsen sind, deren grosse Axe vertical ist. Fast scheint die Misachtung, die der Verfasser gegen die Theorie hegt, aus mangelhafter Kenntnis derselben entsprungen zu sein. Nennt er doch z. B. die Wellenlänge abweichend von dem Gebrauch aller übrigen Autoren „Amplitude“. Wn.

J. Klemenčič. Ueber die Dämpfung der Schwingungen fester Körper in Flüssigkeiten. Wien. Ber. LXXXIV. 147-168.

Herr Kirchhoff hat in seiner Mechanik (Vorlesung 26) zwei Arten der Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit behandelt, einmal diejenige Bewegung, bei der die Kugel um

einen Durchmesser als Axe schwingt, sodann diejenige, bei der die Kugel auf einer Geraden hin- und herschwingt. Der Verfasser des vorliegenden Aufsatzes führt nun, an Kirchhoff's Formeln direct anknüpfend, die oben genannten Probleme insofern weiter, als er bei der Reihenentwickelung der schliesslichen Resultate noch die Glieder zweiter Ordnung der Reibungsconstante berücksichtigt, während Kirchhoff sich auf die Glieder erster Ordnung beschränkt. Sodann wird gezeigt, dass die von Kirchhoff seinen Entwickelungen zu Grunde gelegten Voraussetzungen über das Grössenverhältnis verschiedener Glieder den Bedingungen mancher Versuche nicht entsprechen. Es wird daher die angenäherte Lösung der Probleme noch unter der Voraussetzung durchgeführt, dass die Grösse

$$\frac{\sqrt{k\mu T_0}}{R\varrho}$$

klein gegen 1 ist, während bei Kirchhoff

$$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{kT_0}{\mu}}$$

als klein gegen 1 angesehen wird. (Dabei ist μ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, k deren Reibungsconstante, T_0 die Schwingungsdauer der ungedämpften Kugel, R der Kugelradius, ϱ die Dichtigkeit der Kugel.) Die hier als klein gegen 1 betrachteten Glieder behalten diese Eigenschaft auch bei abnehmender Dichte des Mittels, während dies bei der Kirchhoff'schen Voraussetzung nicht mehr der Fall ist.

Ausserdem dehnt der Verfasser die beiden oben genannten Probleme auch auf den Cylinder aus. Die Schwingungen eines Cylinders um seine Axe oder senkrecht dazu lassen sich, wenn man von dem Einfluss der Enden abstrahirt, auf dem von Kirchhoff für die Kugel eingeschlagenen Wege vollständig behandeln. Aus den für das logarithmische Decrement der Schwingungen aufgestellten Formeln ergiebt sich bei der Kugel, wie beim Cylinder das Resultat, dass die Dämpfung, welche ein schwingender Körper durch eine ihn umgebende unbegrenzte Flüssigkeit erfährt, mit abnehmender Dichte dieser Flüssigkeit, jedoch bei constant bleibendem

Reibungscoefficienten, sich einer von Null verschiedenen Grenze nähert. Wn.

J. Klemenčič. Dämpfung der Torsionsschwingungen durch innere Reibung. Carl Rep. XVII. 144-159.

H. Eichler. Die Gezeiten. Z. f. d. Realsch. V. 402-411. 1880.

Ein klarer und ansprechender Bericht über die Resultate der neuesten physikalisch-mathematischen Untersuchungen zur Theorie der verschiedenen Meeresbewegungen. Besprochen werden die Forschungen von Zöppritz über den Einfluss der Winde auf die Strömungen, die Mühry'sche Theorie einer Ascensionsströmung in Folge der Erdrotation, die Arbeiten von Schilling und sehr eingehend die auf säculare Schwankungen des Seespiegels hinweisenden Hypothesen von Croll, Adhémar und Schmick. Vermisst werden bei dieser Aufzählung die Studien von Blazek in Prag und von Witte in Pless. Die Schmick'sche Lehre von der abwechselnden Ueberflutung der Nord- und Südhalbkugel hat wohl eine zu günstige Beurteilung gefunden, denn wenn man auch durchaus nicht geneigt ist, das vernichtende Urteil in allen Punkten zu unterschreiben, welches Zöppritz (Gött. Gel. Anz. 1878) über jene Lehre ausgesprochen hat, so muss doch unter allen Umständen zugestanden werden, dass noch sehr viel zu tun ist, um dieselbe mit den feststehenden Wahrheiten der theoretischen Mechanik allenthalben in Einklang zu bringen. Wir müssen deshalb auch Herrn Eichler's Hoffnung, der berühmte Geologe E. Suess werde sich schliesslich ganz auf den Boden der Schmick'schen Anschauungen stellen, als eine sehr optimistische bezeichnen. Gr.

C. Razzaboni. Sopra alcuni casi d'efflusso di liquidi per vasi comunicanti. Bologna, Mem. (4) II. 135-157.

Die Arbeit handelt von dem Ausfluss des Wassers aus

einem Gefäss, welches gleichzeitig durch eine Verbindungsöffnung aus einem anderen Gefäss Zufluss erhält; es werden die beiden Fälle unterschieden, ob die Verbindungsöffnung unter dem niederen Spiegel liegt oder darüber. Für den ersten Fall ist die Integration der Differentialgleichungen durch einfache Substitution ermöglicht. Speciell durchgeführt ist sie für den Fall, dass der obere Wasserspiegel constant bleibt. Es ergiebt sich t als Function der Druckhöhe. Da dieselbe aber algebraische und transcendente Glieder enthält, so kann man die Druckhöhe nicht als Function der Zeit explicit darstellen. Ebenso werden die Differentialgleichungen für freien Ausfluss aus dem oberen Gefäss aufgestellt und integrirt. Die Beziehung zwischen der Zeit und dem Niveau im zweiten Gefäss lässt keine allgemeine Integration zu. Bn.

G. Bucchia. Facile regola pratica di preconoscere la reale portata dei fontanili. Ven., Atti Ist. (5) VII. 885-904.

Der Verfasser berechnet die in einer ausgehobenen Grube (in der wasserführenden Schicht) sich sammelnde Wassermenge, wenn der Wasserspiegel durch Auspumpen erniedrigt wird, einmal unter der Voraussetzung, dass die Ausflussgeschwindigkeit der Wurzel aus der Druckhöhe proportional ist (Mazzeri), und zweitens, wenn dieselbe der Druckhöhe selbst proportional ist (Colombani). Da die Zuflussröhren capillare sind, so stimmt die zweite Voraussetzung besser mit den vom Verfasser gemachten Versuchen überein. Zur Constantenbestimmung dient die Zeit, welche das Wasser braucht, um von dem künstlich erniedrigten Stande wieder auf den ruhenden Spiegel zu kommen. Alsdann zeigt Verfasser, dass beide Voraussetzungen dasselbe Resultat geben, wenn man die Zeit berechnet, welche das Wasser braucht, um in einem nur von unten zugänglichen abgeteuften Rohre eine Strecke zu steigen, welche nur ein kleiner Bruchteil der Druckhöhe ist, (so dass das Quadrat derselben vernachlässigt werden kann) und knüpft daran eine sehr einfache Regel für solche Vorermittelungen. Bn.

Th. Belpaire. Étude sur la marche des crues et sur l'influence des travaux de rectification, d'approfondissement et d'élargissement des cours d'eau. Brux. S. Sc. V. B. 52-71.

Ch. Lagasse. Rapport sur le mémoire de M. Belpaire. Brux. S. Sc. V. A. 65-71.

Im Falle gleichförmiger Bewegung setzt der Verfasser voraus, dass die Höhe des Wassers eine ganze Function zweiten Grades der Ausflussmenge und eine Function ersten Grades der Zeit sei. Er erklärt durch diese Annahme die meisten Erscheinungen, die das Anschwellen eines Flusses mit sich bringt, und stellt analoge Hypothesen für ungleichförmige Bewegungen auf.

Mn. (O.).

Capitel 5.

Potentialtheorie.

L. Kronecker. Ueber Potentiale n-facher Mannichfaltigkeiten. Chelini, Coll. Math.. 224-231.

Es wird gezeigt, wie sich der bekannte Ausdruck für das Potential eines homogenen Ellipsoids, sowie die Dirichlet'sche Beweisführung durch Aufstellung der zur Definition des Potentials notwendigen und hinreichenden Bedingungen vollständig auf einen Raum von n Dimensionen übertragen lässt.

B.

Th. Horn. Die Discontinuitäten der zweiten Differentialquotienten des Oberflächenpotentials. Schlömilch Z. XXVI. 145-157, 209-231.

Die Aufgabe bezieht sich auf die Unstetigkeiten, welche die weiten Ableitungen eines Flächenpotentials besitzen, wenn der

betrachtete Punkt die Fläche passirt. Die Methode besteht im Wesentlichen darin, dass die Ausdrücke für die Ableitungen, welche sich unmittelbar aus der Integraldarstellung der Potentiale ergeben, durch factorenweise Integration so zerlegt und umgeformt werden, dass die Stetigkeit oder die Art der Unstetigkeit sich unmittelbar aus bekannten Potentialsätzen ergiebt. Im Anschlusse hieran wird dann noch untersucht, in welchen Richtungen die zweimal in derselben Richtung genommene Ableitung keine Unstetigkeit besitzt. B.

E. Beltrami. Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche. Bologna, Mem. (4) II. 416-507.

Wenn das Potential von symmetrisch um eine Axe verteilten Massen für Punkte der Axe gegeben ist, so erhält man das Potential für einen beliebigen Punkt des Raumes durch eine complexe Integration des analytischen Ausdruckes für das Potential auf der Axe. Die vorliegende Arbeit zeigt nun, dass man, als ein Seitenstück zu jenem bekannten Satze, das Potential von Massen, die in einer Ebene symmetrisch um einen Punkt verteilt sind, für einen beliebigen Punkt durch Quadraturen darstellen kann, sobald es für Punkte jener Ebene bekannt ist, sei es für alle Punkte derselben oder doch für die mit Masse erfüllten. Sind z und u die Coordinaten eines beliebigen Punktes parallel und rechtwinklig zur Symmetrieaxe, so erhält man für das Potential V und für die vom Verfasser als associirt bezeichnete Function (F. d. M. X. 1878. 663) die Ausdrücke

$$V = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\mp zs} J_0(us) J_0(st)\, v(t)\, st\, ds\, dt,$$

$$W = \pm u \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\mp zs} J_0'(us) J_0(st) v(t) st\, ds\, dt,$$

wo $v(t)$ das Potential in der Ebene der Massen für die Punkte bedeutet, in denen $u = t$, wo ferner die oberen resp. unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem $z \gtrless 0$.

Wenn v nur für die Punkte der mit Masse belegten Scheibe

vom Radius a gegeben ist, so wird die Lösung durch folgende bereits früher vom Verfasser gefundenen Relationen vermittelt:

$$F(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^u \frac{v(t)\,t\,dt}{\sqrt{u^2-t^2}}, \quad M(u) = \int_u^a \frac{F'(s)\,s\,ds}{\sqrt{s^2-u^2}},$$

wo $M(u)$ die Masse auf der Scheibe zwischen ihrem Rande und dem Kreise mit dem Radius u bedeutet. Diese Principien sind nun die gemeinsame Quelle für eine Fülle von interessanten, zum Teil neuen Relationen, bezüglich deren auf die Abhandlung zu verweisen ist. B.

F. Klein. Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind. Klein Ann. XVIII. 410-427.

Siehe Abschn. VII. Cap. 2. p. 407.

G. W. von Junzelmann. A theorem on the attraction ellipsoid. Mess. (2) XI. 79-80.

Erweiterung des Ivory'schen Satzes auf den Fall, dass die beiden Ellipsoide ein homogenes Ellipsoid und ein confocales Ellipsoid sind, in welches ersteres durch einen Zwang transfor) mirt wird. Glr. (O.).

A. Cayley. On a Smith's Prize question relating to potentials. Mess. (2) XI. 15-48.

Erläuterung des folgenden Paradoxons: „Eine sphärische Schale wird in zwei Segmente A und B geteilt. Das Potential des Segmentes A in Bezug auf einen Punkt P mit den Coordinaten x, y, z ist ein und dieselbe Function von x, y, z, wie auch die Lage des Punktes P sein mag. Ebenso ist auch das Potential von B in Bezug auf denselben Punkt P dieselbe Function von x, y, z, wie auch die Lage von P sein mag. Also ist auch Potential der ganzen Schale in Bezug auf den Punkt P

dieselbe Function von x, y, z, wie auch die Lage von P sein mag." Glr. (O.).

O. Pihl. Om Attractioner mellem to Cirkelperipherier. Christ. G. d. W. 1881. 1-24.

Zwei materielle Kreise üben eine gegenseitige Anziehung auf einander aus, deren numerische Berechnung in den meisten Fällen ziemlich weitläufige Rechnungen verlangt. Für den Fall, dass die Ebenen der beiden Kreise parallel sind, hat nun der Verfasser diese Rechnungen unter verschiedenen speciellen Voraussetzungen ausgeführt. Die Resultate werden in einer Tabelle zusammengestellt. L.

A. L. Selby, J. W. Sharpe, Townsend. Solutions of a question (6279). Ed. Times XXXIV. 73-74.

Eine ringförmige homogene Scheibe, die innen und aussen von concentrischen Kreisen mit beliebigen Radien begrenzt wird, zieht nach dem Gesetz des umgekehrten Cubus der Entfernung ein materielles Teilchen an, das irgendwo auf der concentrischen Kugel liegt, deren Radius das geometrische Mittel zwischen den Radien der begrenzenden Kreise ist. Dann steht die Resultante der Anziehung senkrecht auf dieser Ebene. O.

O. Zimmermann. Das logarithmische Potential einer gleichseitig dreieckigen Platte. Diss. Jena.

Herr Kirchoff hat gezeigt, dass die Untersuchung der stationären elektrischen Strömungen in unendlich dünnen Platten auf die Ermittelung eines gewissen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen genügenden logarithmischen Potentials, resp. auf eine Abbildungsaufgabe zu reduciren ist und hat zugleich die Lösung für den Fall eines Kreises gegeben. Verfasser bemerkt nun, dass danach die Aufgabe auch für den Fall eines Dreiecks zu lösen sei, da nach den H. A. Schwarz'schen Sätzen sich der

Kreis auf eine Halbebene und diese auf ein Dreieck abbilden lasse.

Nach Reproduction der Kirchhoff'schen Entwickelungen wird für den Fall eines gleichseitigen Dreiecks nun die abbildende Function zunächst direct gesucht, wobei zu bemerken ist, dass die Lösung eigentlich unmittelbar durch die bekannten Eigenschaften derjenigen elliptischen Functionen gegeben war, für welche der reelle Teil der complexen Periode halb so gross ist, wie die reelle Periode.

Eine zweite Lösung leitet der Verfasser durch die Methode der wiederholten Spiegelung ab und zeigt dann die Identität beider Lösungen. B.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Capitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

G. Helm. Ueber die Vermittelung der Fernewirkungen durch den Aether. Wiedemann Ann. (3) XIV. 149-176.

Der Verfasser will durch seine Betrachtungen und Rechnungen zeigen, wie jede Art von Fernewirkung durch eine Art der Energie-Uebertragung an der Molecüloberfläche ersetzt werden kann. Um die Energie-Uebertragung zwischen Aether und ponderablem Molecül kennen zu lernen, muss er über die Bewegung der Molecüle im Aether bestimmte Annahmen machen. Seine Vorstellungen sind: Aether und Molecül bestehen aus derselben Substanz. Dieser Stoff besitzt einen anderen Grad der Beweglichkeit im freien Weltenraume, einen anderen in der Nähe der Molecüle, einen anderen in den Molecülen. Ausserhalb der Molecüle bewegt sich der Stoff gemäss den Differentialgleichungen eines elastisch festen Körpers, aber die Constanten sind verschieden im freien Weltenraume und in der Nähe der Molecüle, d. i. in den physischen Körpern. In den Molecülen bewegt sich der Stoff nach den Differentialgleichungen eines flüssigen Körpers. Dem entsprechend ist der Ausspruch zu verstehen, „das Molecül ist eine Stelle im Raume, wo der Aether verflüssigt wird.“ Bewegt sich ein Molecül, so bewegt sich die Ursache dieser Ver-

flüssigung. Die Geschwindigkeit eines ponderablen Körpers ist nicht etwa die Geschwindigkeit des in ihm befindlichen Aethers, weder der festen Aetherelemente, noch der flüssigen Elemente seiner Molecüle; die Geschwindigkeit des Körpers ist vielmehr nur die Geschwindigkeit, mit welcher der Aether seinen Bewegungszustand ändert. An der Grenze des innern und des äussern Aethers findet Energie-Uebertragung statt. Durch eine Art solcher Energie-Uebertragung an der Molecüloberfläche kann jede Art von Fernewirkung ersetzt werden. Den Differentialgleichungen des Aethers genügen zwei Lösungen. Die eine wird gebraucht zur Beschreibung der Gravitationserscheinungen, die zweite zur Beschreibung der magnetischen Erscheinungen. Die weiteren Entwickelungen beziehen sich auf Leiter und Diëlektrica und die elektrische Strömung. Die entwickelte Theorie der Diëlektrica schliesst sich den von Faraday herrührenden und von Maxwell mathematisch durchgeführten Vorstellungen an. Es wird jedoch abweichend vom Maxwell'schen Ergebnis die Diëlektricitätsconstante $1+4\pi K$ nur dann dem Quadrate des Brechungsindex proportional gefunden, wenn in allen Medien die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Longitudinalwellen die gleiche ist.

Rs.

E. Beltrami. Sulle equazioni generali dell' elasticità. Brioschi Ann. (2) X. 188-211.

Nach Erwähnung der Arbeiten von Lamé (Mémoire sur les surfaces isostatiques dans les corps solides homogènes en équilibre d'élasticité. Liouville J. (1) VI. 37-60), C. Neumann (Zur Theorie der Elasticität. Crelle J. LVII. 281-318) und Borchardt (Transformation der Elasticitätsgleichungen in allgemeine orthogonale Coordinaten. Borchardt J. LXXVI. 45-58, s. F. d. M. V. 1873. p. 521) werden die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht eines elastischen Körpers in orthogonalen Coordinaten beliebiger Art hergeleitet. Die gewonnene Form ist fast dieselbe, welche die von Lamé gewonnenen Gleichungen haben; erstere sind jedoch allgemeiner; sie gelten nicht nur für den Euklidischen Raum. Die

weiteren Entwickelungen gestatten, jenen Gleichungen eine andere Gestalt zu geben, woraus sich die von Herrn C. Neumann aufgestellten Gleichungen ergeben. Die gewöhnlichen Elasticitätsgleichungen für isotrope Körper gelten nur für den Euklidischen Raum. Der Verfasser giebt die bezüglichen Gleichungen für einen Raum constanter Krümmung. Bei den darauf untersuchten Specialfällen, wo sphärische, resp. Cylinder-Coordinaten benutzt werden, ergeben sich analoge Beziehungen, wie in der Theorie der Diëlektrica und beim elektromagnetischen Potential eines geradlinigen Stromes. Der Verfasser wünscht durch diese Anwendungen auf die Wichtigkeit der von ihm hergeleiteten allgemeinen Gleichungen aufmerksam zu machen. Rs.

W. H. Besant. Note on elasticity. Mess. (2) XI. 63-64.

Directe Untersuchung der Ausdrücke für den tangentialen und normalen Druck in Polarcoordinaten. Glr. (O.).

J. Finger. Ueber die Beziehungen der homogenen Deformationen fester Körper zur Reactionsfläche. Wien. Ber. LXXXIII. 234-262.

Die Reactionsfläche, welche zuerst von Thomson und Tait, dann auch von Kirchhoff angewandt wurde, stellt der Verfasser zunächst in abweichender Weise auf und entwickelt aus ihr sämmtliche Deformationen des elastischen Körpers, zu deren vollständiger Darstellung man nach Lamé's Vorgange bisher drei Flächen zweiten Grades (Elasticitätsellipsoid, Deformationsellipsoid) brauchte. Es seien t_{11}, t_{22}, t_{33} die Zugspannungen nach den drei Coordinatenrichtungen, t_{23}, t_{31}, t_{12} die tangentialen Schubspannungen in den drei Ebenen; denkt man sich ferner auf allen vom betrachteten Punkte ausgehenden Strahlen Strecken abgeschnitten, welche der Wurzel aus der in der Strahlenrichtung stattfindenden Zugspannung umgekehrt proportional sind, so erhält man eine Fläche

$$t_{11}x^2+t_{22}y^2+t_{33}z^2+2t_{23}yz+2t_{31}zx+2t_{12}xy=k,$$

welche mit der Thomson'schen Reactionsfläche identisch ist. Finden nur Zug- oder nur Druckspannungen statt, so ist die Fläche ein Ellipsoid (oder Ausartungen desselben); wechseln dagegen die Spannungen, so besteht sie aus einem einschaligen und einem zweischaligen Hyperboloid, einer Zug- und einer Druckfläche; für die letztere ist k negativ zu nehmen. Diese Fläche ist geeignet, alle Spannungs- und Deformationszustände des betrachteten Körpers darzustellen. Der Radius vector eines beliebigen Punktes m stellt laut Definition die in der Richtung vorhandene Spannung dar; die Normale der Fläche in m giebt die Richtung der resultirenden Spannung auf ein Flächenelement df, welches senkrecht zu jenem Radiusvector steht; hierdurch ist auch die in df vorhandene Schubspannung bestimmt. Auf ebenso einfache Weise stellen sich nicht nur die Längenänderungen der Linien des Körpers dar, sondern auch ihre Richtungsänderungen, demnach auch die Veränderungen der Winkel, der Stellungen der Ebenen, ihrer Neigungswinkel und derer zwischen Ebene und Gerade. Bn.

J. Stefan. Ueber das Gleichgewicht eines festen elastischen Körpers von ungleichförmiger oder veränderlicher Temperatur. Wien. Ber. LXXXIII. 549-575; Wien. Anz. 1881. 71-72.

Die in Betracht zu ziehende Wirkung der Wärme verglich F. Neumann mit einem hydrostatischen Drucke; diese Wirkung wird daher kurz der Wärmedruck genannt. Die absolute Grösse desselben kann nicht angegeben werden; es genügt aber auch, die Aenderung dieses Druckes und der gleichwertigen inneren Spannungen bei dem Uebergang des Körpers aus einem Zustande in einen anderen zu kennen. Daher muss irgend ein Zustand als der normale betrachtet werden. Es sei derjenige, in welchem der Körper gleichförmig erwärmt von der Einwirkung äusserer Kräfte frei ist und sich im Gleichgewichtszustande befindet. Wenn der Körper in einen anderen Gleichgewichtszustand übergeführt wird, werden die Aenderungen in den Span-

nungen den Zunahmen des Wärmedruckes und den äusseren Kräften das Gleichgewicht halten. Jene Definition des spannungsfreien Zustandes, welcher als normaler angesehen wird, kann auch auf die einzelnen Körperteile angewendet werden. Der Verfasser geht daher bei seinen Entwickelungen von dem Satze aus: „Ein Element eines festen elastischen Körpers ist als frei von jeder Spannung zu betrachten, wenn es aus dem Körper herausgeschnitten ohne Veränderung der Temperatur und ohne Hinzutun äusserer Kräfte sein Volumen und seine Gestalt beibehält.“ Für die Berechnung der Spannungen aus den Deformationen ergiebt sich als Regel: „Die in jedem Elemente des Körpers vorhandenen Dilatationen sind zu vermindern um jene, welche das Element im freien Zustande in Folge der Temperaturveränderung erhielte. Aus den so verminderten Dilatationen und den übrigen noch vorhandenen Formänderungen sind die Spannungen so zu berechnen, als wäre die Temperatur des Körpers unverändert geblieben.“ Die weiteren Rechnungen, um den Einfluss der Temperaturänderungen auf das Gleichgewicht elastischer Körper zu bestimmen, können nun nach den in der gewöhnlichen Elasticitätstheorie entwickelten Formeln geschehen.

Mit Hülfe der gewonnenen Gleichungen werden einige Aufgaben gelöst, in welchen vorausgesetzt ist, dass keine auf die Masse wirkende äussere Kräfte vorhanden sind: 1) Es wird die Spannung in einem rechtwinkligen Prisma von unveränderlicher Länge bei einer Temperaturerhöhung um s^0 berechnet, wenn im Anfangszustande bei der Temperatur 0^0 in dem Prisma keine Spannung vorhanden ist und auf die Seitenflächen desselben keine Züge oder Drucke wirken. 2) Das Gleichgewicht einer Kugelschale, in welcher die Temperatur concentrisch verteilt ist, wird untersucht. Die Züge und Drucke, welche auf die beiden Oberflächen wirken, sollen normal zu diesen Flächen und in allen Teilen derselben Fläche gleich sein. Das bereits von Duhamel mitgeteilte Resultat wird bestätigt. 3) Die Temperatur s eines Punktes der Kugelschale sei nur symmetrisch um die Axe verteilt und zwar soll, wenn a und b Functionen des Radius r bezeichnen, $s = a + b \sin^2 \varphi$ sein. φ ist der Winkel, welchen der

Radius mit der Aequatorebene bildet. Auch hier wird angenommen, dass sowohl die innere, als auch die äussere Oberfläche unter der Wirkung eines constanten von φ unabhängigen Zuges oder Druckes steht, welcher senkrecht gegen die Oberfläche gerichtet ist. In dem speciellen Falle, dass die Dicke der Kugelschale im Vergleich zu den Radien sehr klein ist, und dass a und b von r unabhängig und zwar beide negativ sind, wächst während der Abkühlung der Kugelschale die Contraction gegen den Mittelpunkt mit dem Quadrat des Sinus der geographischen Breite. Die daraus folgende Abplattung ist für jeden Grad Temperaturdifferenz zwischen Aequator und Pol gleich $0,81\alpha$, wenn α den linearen Ausdehnungscoefficienten bedeutet. Ausser der radialen Contraction tritt noch eine Verschiebung gegen die Pole ein, welche dem Sinus der doppelten Breite proportional ist und daher für die Breite 45° den grössten Wert erreicht. Dieser beträgt für jeden Grad Temperaturdifferenz $(10:191)\ \alpha r_2$. Die Kugelschale ist nach der Abkühlung gespannt. Die Spannung in der Richtung des Meridians ist auf der ganzen Oberfläche dieselbe. Die Spannung in der Richtung der Parallelkreise ist von der Breite abhängig, sie wechselt bei $\varphi = 54^\circ\ 44'$ ihr Zeichen und ist in geringeren Breiten einem Drucke, in höheren einem Zuge gleich. Rs.

Th. Craig. Distortion of an elastic sphere. Kronecker J. XC. 253-266.

Die von Geologen angestellten Betrachtungen über die Wirkung, welche an den Polen befindliche Eiskappen auf die Erde ausüben, veranlassten den Verfasser, das Problem zu behandeln: „Es ist die Deformation einer elastischen Kugel zu bestimmen, bei welcher an den Enden eines Durchmessers ein gleicher Druck ausgeübt wird.“ Die Eismassen sollen den Kern an den Polen in sehr kleinen Flächen berühren, und es wird vorausgesetzt, dass die Verkürzung des Polardurchmessers klein ist, und dass die Länge eines Teilchens durch die Deformation nicht verändert wird. Nachdem die Differentialgleichungen für

den Fall des Gleichgewichts aufgestellt sind, wird daran erinnert, dass W. Thomson ein Problem von grösserer Allgemeinheit und Schwierigkeit, als das zu behandelnde, gelöst hat, als er die Verrückungen für eine Kugelfläche bestimmte, wenn die Verteilung der Kraft über dieselbe gegeben ist. Mit Rücksicht auf die Thomson'sche Lösung und mit Hülfe von Kugelfunctionen wird die Integration ausgeführt, so dass die Componenten der Verrückungen und die cubische Dilatation bestimmt werden können. Rs.

J. Boussinesq. Comment se transmet, dans un solide isotrope (en équilibre), la pression exercée sur une très petite partie de sa surface. C. R. XCIII. 703-706.

Es wird danach gefragt, welche Veränderungen in einem elastischen Körper erfolgen, wenn man in einem sehr kleinen Teile seiner Oberfläche einen Druck ausübt, während die entfernteren Teile unbeweglich erhalten bleiben? Der so ausgeübte Druck wird nur in der Nachbarschaft des Angriffspunktes merkbare Wirkungen erzeugen. Mit Benutzung von Resultaten früherer Arbeiten (C. R. LXXXVI. 1260-1263, siehe F. d. M. X. 1878. 674-675; C. R. LXXXVIII. 741-743, siehe F. d. M. XI. 1879. 704) gelangt der Verfasser zu folgenden Sätzen: „Wenn in einem Punkte der Oberfläche ein normaler Druck ausgeübt wird, überträgt dieser sich von jeder zur Körperoberfläche parallelen Schicht auf die folgende unter der Form schiefer Drücke, welche von diesem Punkte aus genau entgegengesetzt gerichtet und für die Flächeneinheit gleich $\frac{3dP}{2\pi}\frac{z^2}{r^4}$ sind. Hierin bedeutet r die Entfernung des Punktes vom Angriffspunkte des Elementardruckes dP und z die Tiefe der Schicht, auf welcher jener Punkt unterhalb der Oberfläche liegt. Wenn man in dem Körper Kugeln construirt, welche ihn im Angriffspunkte der Kraft dP berühren, so wird der Druck auf die Flächeneinheit der zur Oberfläche parallelen Schichten in allen Punkten jeder Kugel

constant und für die verschiedenen Kugeln umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Durchmesser sein.“ Rs.

J. Boussinesq. Égalité des abaissements moyens que produisent, chacune, aux points où est déposée l'autre, deux charges égales, arbitrairement distribuées, le long de deux circonférences concentriques, sur un sol horizontal ou sur une plaque circulaire horizontale ayant même centre que ces circonférences et appuyée ou encastrée sur tout son contour. C. R. XCIII. 783-785.

Im Anschluss an die Arbeit (C. R. LXXXVII. 402, s. F. d. M. X. 1878. p. 675) wird der im Titel angegebene Satz bewiesen. Rs.

S. Oppenheim. Ueber eine Gleichung, welcher die lebendige Kraft schwingender Bewegungen genügt. Wiedemann Ann. (2) XIV. 705-708.

Lamé hat gezeigt, dass, wenn V das Potential der Gravitation, T die lebendige Kraft der durch dieselbe erzeugten Bewegung ist, ebenso wie $\Delta_2 V = 0$ auch $\Delta_2 T = 0$ ist. Der Verfasser giebt in der vorliegenden Notiz eine analoge Relation für die lebendige Kraft für eine Bewegung, die durch das Potential

$$P = -\frac{\lambda}{2}\int d\tau\Big[\Big(\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\xi}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\xi}{\partial z}\Big)^2$$

$$+\Big(\frac{\partial\eta}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\eta}{\partial z}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\Big)^2\Big]$$

charakterisirt ist. Dieselbe lautet:

$$\mu\frac{d^2T}{dt^2} - \lambda\Delta_2 T = 0, \quad \text{und} \quad \mu\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \lambda\Delta_2 P = 0.$$

O.

E. Mathieu. Sur la théorie des plaques vibrantes. C. R. XCII. 123-125.

Die allgemeine Lösung für die Wärmebewegung in einem

homogenen beliebig gestalteten Körper ist die Summe unendlich vieler einfacher Lösungen, welche eine convergente Reihe bilden. u und u' seien zwei dieser einfachen Lösungen, dann ist

$$\iiint u u' \, dx \, dy \, dz = 0 \text{ oder } \iint u u' \, dx \, dy = 0,$$

je nachdem über das Volumen des Körpers oder nur über die Oberfläche desselben zu integriren ist, wenn sich derselbe auf eine Ebene oder dünne Platte reducirt. Die allgemeine Lösung der Schwingungsbewegungen von Membranen setzt sich aus einer Reihe von Gliedern zusammen, von welchen zwei beliebige der zweiten Gleichung genügen. Der Verfasser beweist, dass dasselbe auch für die Schwingungsbewegung von Platten gilt. Dies widerspricht nicht den Bedingungsgleichungen, welche Kirchhoff für den Umfang der Platten gegeben hat; es bestätigt vielmehr die Richtigkeit derselben. Rs.

E. Mathieu. Sur la théorie mathématique du mouvement vibratoire des cloches. C. R. XCII. 636-638.

E. Mathieu. Intégration des équations différentielles du mouvement vibratoire d'une cloche sphérique. C. R. XCIII. 840-842.

In der ersten der beiden Abhandlungen stellt der Verfasser zunächst die allgemeinen Differentialgleichungen dieser Schwingungen auf und giebt dann (ohne Ableitung) eine Reihe von Resultaten, die er aus denselben gezogen. Bemerkenswert ist unter denselben namentlich, dass die Longitudinalschwingungen (tangentiale) von derselben Ordnung sind wie die transversalen, dass sich durch besondere Formen der Glocke die tangentialen Schwingungen nicht beseitigen lassen, und dass die tiefsten Töne der Glocke durch Aenderung ihrer Dicke nicht wesentlich beeinflusst werden. In der zweiten Abhandlung werden die Differentialgleichungen für den speciellen Fall einer Kugel von constanter Dicke mit Hülfe Gauss'scher Integrale integrirt. Bn.

F. Tendering. Theorie der elastischen Schwingungen. Hoppe Arch. LXVI. 147-212.

Die Arbeit enthält nichts wesentlich Neues. Die hergeleiteten Gleichungen beziehen sich auf die Spannungen und Dehnungen in Körpern, welche sich im Gleichgewichtszustande befinden, auf Spannungen und Dehnungen in isotropen Körpern unter dem Einflusse äusserer Kräfte, im Speciellen auf Fortpflanzung des Schalles in einem dünnen prismatischen Stabe, in Pfeifen, in der freien Luft. Rs.

L. Boltzmann. Einige Experimente über den Stoss von Cylindern. Wien. Ber. LXXXIV. 1224-1229.

Der Verfasser hat versucht, den Einfluss der Longitudinalwellen in den zusammenstossenden Cylindern auf den Erfolg des Stosses experimentell nachzuweisen; theoretisch ist derselbe durch Cauchy und St. Venant ermittelt worden. Es ergiebt sich aus der Theorie, dass bei ungleich langen Stäben der Verlust grösser sein muss, als bei gleich langen, da die entstandenen Longitudinalwellen nicht gleichzeitig zum Berührungspunkt zurückkehren. Die gegebenen Beobachtungszahlen bestätigen die Theorie. Die Publication ist nur eine vorläufige, da die Versuchsstäbe den Anforderungen des Verfassers noch nicht genügten. Bn.

H. G. Tammen. Ueber die unifilar aufgehängte Drehwage. Pr. Zwickau. Carl Rep. XVIII. 348-381.

Bei Torsionsschwingungen zeigt sich ein Wandern der Ruhelage und zwar mehrfacher Art, erstens eine stets gleichgerichtete Wanderung, die, sehr bald schwach werdend, sich Jahre lang fortsetzt, dann eine zweite, namentlich durch die Untersuchungen von Kohlrausch und Wiedemann nachgewiesene, bei welcher die Ruhelage hin- und herschwankt, wie die Drehwage selbst, und hierzu gesellt sich nach den Untersuchungen des Verfassers eine dritte Art, der ersten entgegengesetzt, die sich aber erst nach

längerem Gebrauche zeigt, und welche der Verfasser durch eine gewundene Structur der äusseren Dratfasern zu erklären sucht.

Bn.

E. J. Routh. Some applications of conjugate functions. Lond., M. S. Proc. XII. 73-89.

Siehe Abschn. X. Cap. 4. B. p. 720.

Y. Villarceau. Emploi des fonctions hyperboliques dans les calculs de résistance des matériaux. Ann. d. P. et Ch. 1881. I. 207.

A. G. Greenhill. Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical post or mast can be made, and of the greatest height to which a tree of given proportion can grow. Cambr. Proc. IV.

Ein homogener cylindrischer Pfahl wird vertical in einem niedrigsten Punkte befestigt und soweit verlängert, dass die verticale Lage unstabil wird und eine Biegung eintritt. Es soll die Höhe bestimmt werden. Das entsprechende Problem wird auch gelöst, wenn 1) der Stab sich gleichförmig verjüngt, 2) wenn dies in der Form eines Rotationsparaboloides und 3) wenn es in der Form eines beliebigen Rotationskörpers geschieht. Die Höhen werden bestimmt als Wurzeln von Bessel'schen Functionen, die gleich Null gesetzt werden.

Glr. (O.).

Bottiglia. Teoria e calcolo delle molle metalliche. Torino, Atti XVI. 424-454.

Der Verfasser leitet die Formeln für die Anwendung der verschiedenen Arten Metallfedern aus den allgemeinen Bedingungsgleichungen für den einseitig eingespannten elastischen Stab ab. Es werden der Reihe nach einfache und zusammen-

gesetzte Federn (rechteckig und trapezförmig), die nur auf Biegung beansprucht werden, Federn in Spiralform, in Schraubenform und endlich solche in conischer Schraubenform (Pufferfedern) behandelt; die Resultate sind im Wesentlichen die schon von andern Verfassern her bekannten. Bn.

BRESSE. Rapport sur un mémoire de M. PÉRISSÉ: Des causes qui tendent à gauchir les poutres des ponts en fer, et des moyens de calculer ces poutres pour résister aux efforts gauchissants. C. R. XCII. 948-951.

Bericht über die F. d. M. XII. 1880. p. 737 besprochene Arbeit. Mit den im ersten Teile gegebenen Entwickelungen ist Herr Bresse einverstanden, dagegen erhebt er Bedenken gegen die Betrachtungsweise des Verfassers, der die Zerknickungsfestigkeit der oberen Gurtungen ebenso behandelt, wie die gerader Stäbe, die an beiden Enden geradlinig gegen einander geführt werden. Herr Bresse hält die Sache demnach nicht für abgeschlossen. Bn.

Weitere Lösungen von Aufgaben aus der Elasticitätslehre von MINCHIN, G. S. CARR, K. S. PUTNAM, W. R. W. ROBERTS, T. R. TERRY, L. A. KITTUDGE, J. O'REGAN, D. EDWARDES, DROZ finden sich Ed. Times XXXIV. 47-48, 67-68; XXXV. 67-68, 74, 75, 83-84.

O.

H. RÉSAL. Recherches sur la théorie mathématique de la capillarité. Résal J. (3) VII. 341-374.

Da seit der von Poisson gegebenen Theorie wichtige Experimente von Plateau und Boutigny ausgeführt sind, und die mathematischen Hülfsmittel sich vergrössert haben, unterwirft der Verfasser die Capillaritätserscheinungen einer neuen theoretischen Behandlung. Nachdem die Gleichung für den Meniscus herge-

leitet und der Grenzwinkel in Betracht gezogen ist, beschäftigt sich der Verfasser mit Capillaritätserscheinungen bei schweren Flüssigkeiten. Er untersucht, welche Gestalt die Oberfläche einer Flüssigkeit in Berührung mit einer senkrecht stehenden Platte bildet, wenn diese in horizontaler Ausdehnung genügend lang ist, so dass ihre Enden die Gestalt des mittleren Teiles der Flüssigkeit nicht merkbar beeinflussen, und welche Gestalt sie zwischen zwei verticalen parallelen Wänden hat, wobei die beiden Fälle unterschieden werden: 1) die Flüssigkeit benetzt die eine Wand, die andere nicht, 2) beide Wände sind von derselben Art. Ferner wird die Gestalt des Meniscus in einer kreisförmigen Röhre von kleinem Durchmesser und das Volumen der Flüssigkeit bestimmt, welche zwischen dem Meniscus und einer bestimmten horizontalen Ebene vorhanden ist. Die Gleichung der Trennungsfläche zweier über einander gelagerter Flüssigkeiten in einer Capillarröhre von kreisförmigem Querschnitte wird abgeleitet. Eben so kann man die Trennungsflächen mehrerer über einander in einer Capillarröhre befindlicher Flüssigkeiten finden. Die Gestalt eines sehr kleinen und die eines sehr grossen Tropfens einer Flüssigkeit, welche sich auf einer horizontalen, ebenen Fläche befindet, ohne diese zu benetzen, wird festgestellt. Darauf wird die Gleichung für die Oberfläche einer Flüssigkeit berechnet, welche sich in einer anderen von demselben specifischen Gewichte befindet, ohne sich mit ihr zu mischen, und welche eine gewisse Rotationsgeschwindigkeit hat. Wenn die Winkelgeschwindigkeit klein ist, wird sich die Oberfläche nur wenig von einer Kugelfläche unterscheiden. Andererseits wird der Fall berücksichtigt, dass die Entfernung der Masse von der Rotationsaxe im Verhältnis zur transversalen Dimension des Ringes sehr gross ist. Indem Plateau zwei Flüssigkeiten benutzte, welche dieselbe Dichtigkeit hatten und sich nicht mit einander mischten, und indem er eine bestimmte Menge M der einen Flüssigkeit in die andere brachte, konnte er, je nachdem er verschiedene Bedingungen von M erfüllen liess, auch die verschiedenen Gestalten experimentell bekommen, welche ein fester Umdrehungskörper von constanter mittlerer Krümmung haben kann. Die allgemeine

Gleichung für solche Umdrehungsflächen, deren mittlere Krümmung constant ist, wird einfacher als bisher hergeleitet.

Rs.

G. van der Mensbrugghe. Sur une propriété générale des lames liquides en mouvement. Belg., Bull. (3) I. 286-303.

Erklärung verschiedener Erscheinungen mittels des folgenden Princips: Wenn eine Flüssigkeitsmasse unter der Einwirkung irgend einer Kraft die Gestalt einer Lamelle annimmt, deren Dicke um so geringer wird, je länger die Kraft wirkt, so ist die durch den Widerstand der Flüssigkeit geleistete Arbeit direct proportional der Oberflächenspannung für die Flächeneinheit und umgekehrt proportional der Dicke der Schicht in dem betrachteten Moment. Mn. (Wn.).

Capitel 2.

Akustik und Optik.

E. A. O. Was. Het beginsel van Doppler in de geluidsleer. Diss. Leiden.

Doppler war der erste, welcher auf den Einfluss der Bewegung des Beobachters oder der Schallquelle auf die Tonhöhe hingewiesen hat. In dieser Dissertation wird der Gegenstand vom theoretischen Gesichtspunkt aus näher behandelt. Zuerst werden die Arbeiten Petzwal's, Doppler's, von Ettingshausen's und Mach's besprochen und auf einige Fehler in ihren Betrachtungen aufmerksam gemacht. Dann geht der Verfasser auf die Theorie über und nimmt dabei die Gleichungen für die Bewegung des Schalles zum Ausgangspunkt. Er erhält folgende Resultate: 1) Der Satz, dass die Tonhöhe bei der Bewegung des Beobachters oder der Schallquelle sich ändert, ist richtig. 2) Die von Doppler auf elementarem Wege abgeleiteten Formeln, welche

das Mass der Veränderung angeben, gelten mit aller Strenge sowohl für den Fall, dass die Schallquelle sich bewegt und der Beobachter in Ruhe bleibt, als auch für den umgekehrten Fall, dass nur der Abstand von Schallquelle und Beobachter so gross ist, dass im ersten Fall die Strömung, welche die sich bewegende Schallquelle verursacht, bei dem Beobachter, im zweiten Falle, die durch den sich bewegenden Beobachter hervorgebrachte Strömung in der Nähe der Schallquelle unmerkbar ist, und die Wellen, welche das Ohr des Beobachters erreichen, in beiden Fällen als ebene Wellen betrachtet werden dürfen. Weiter wird die Rechnung für den besonderen Fall durchgeführt, dass der schallgebende Körper eine Kugel ist, welche sich mit unendlich kleiner Geschwindigkeit fortbewegt.

Zum Schluss werden die Versuche besprochen, welche einige Physiker angestellt haben, um die Theorie von Doppler experimentell zu beweisen; diese Versuche geben beträchtliche Abweichungen von der Theorie, wofür eine genügende Erklärung noch nicht gefunden ist. G.

F. Koláček. Beitrag zur Theorie der Resonanz.

Wiedemann Ann. (2) XII. 353-363.

Der Verfasser sucht den Einfluss der Wärmeleitung auf die Resonanz zu ermitteln, sieht dabei aber von der inneren Reibung des Gases ab, da deren Berücksichtigung zu grosse Schwierigkeiten bieten würde. Er leitet die Grundgleichungen des Problems unter folgenden vereinfachenden Voraussetzungen ab: Die im Innern des Resonators in Folge von Temperatur-Differenzen entstehenden Druckungleichheiten und die daraus hervorgehenden secundären Luftbewegungen sollen verschwindend gering sein. Der Druck soll stets für alle Punkte des Resonators derselbe, die Druckänderung also nur eine Function der Zeit sein. Von den Dichtigkeitsänderungen wird als minimal ganz abstrahirt. Endlich sollen die Resonatorwände keine merkliche Temperaturerhöhung erfahren. Aus dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie folgt dann für ω, welche Grösse die (von

Punkt zu Punkt variirende) Temperatur minus einer der Druckänderung proportionalen Grösse bezeichnet, die Gleichung

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = r^2 \left\{ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right\}$$

mit der Bedingung, dass an der Wand $\omega = \psi(t)$ sein soll. Dazu kommt eine zweite Gleichung für $\psi(t)$, welche ausdrückt, dass die in der Zeit dt in Folge des aussen vorhandenen Ueberdrucks in den Resonator eintretende Gasmasse eine Arbeit leistet, die sich durch Erwärmung der Gasmasse innerhalb des Resonators und durch nach aussen entweichende Wärme manifestirt.

Die obige Gleichung für ω wird dann für den Fall eines kugelförmigen Resonators und unter der Annahme, dass ω nur von $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ abhängt, in bekannter Weise durch Reihenentwickelung integrirt. Diese Reihe endlich wird zur Lösung der folgenden beiden Aufgaben benutzt: 1) Die Tonhöhe eines frei schwingenden Resonators zu bestimmen, 2) die Tonhöhe der grössten Resonanz zu bestimmen, wenn äussere periodische Schallquellen den Resonator erregen. In beiden Fällen ergiebt sich, dass die Schwingungszahl eine geringere ist, wie ohne Berücksichtigung der Wärmeleitung. Doch ist diese Verminderung der Schwingungszahl stets sehr klein. Wn.

E. Verdet. Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes. Deutsche Bearbeitung von Karl Exner. Erster Band, erste Abteilung. Braunschweig. Vieweg u. S.

Verdet's Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes zeichnen sich vor andern ähnlichen Werken durch die Reichhaltigkeit des behandelten Stoffes aus und bilden daher wohl das ausführlichste Lehrbuch der theoretischen Optik, das wir besitzen. Die mathematischen Entwickelungen knüpfen stets an das Experiment an und die verschiedenen auf die Theorie bezüglichen Beobachtungen werden in erschöpfender Weise besprochen. Die deutsche Bearbeitung ist gegen das französische Original durch viele Zusätze erweitert; namentlich ist das den einzelnen Ab-

schnitten beigegebene Literaturverzeichnis ergänzt und bis auf die neueste Zeit fortgeführt. Die Darstellung ist durchweg übersichtlich und leicht verständlich.

Die vorliegende erste Abteilung enthält neben einer geometrisch-optischen und historischen Einleitung die Theorie der Interferenz, Fortpflanzung und Beugung des Lichtes, soweit dieselben von jeder Voraussetzung über die Constitution der Lichtschwingungen unabhängig sind. Wn.

Gouy. Sur la vitesse de la lumière; réponse à M. Cornu. C. R. XCII. 34-35.

A. Cornu. Sur les conditions relatives à l'expression théorique de la vitesse de la lumière. C. R. XCII. 53-57.

Gouy. Remarques sur une opinion que m'attribue une note de M. Cornu. C. R. XCII. 127-128.

Fortsetzung einer im vorigen Jahre begonnenen Discussion [cf. F. d. M. XII. 1880. p. 749]. Herr Gouy hält an seiner Ansicht, dass die gewöhnliche Definition der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht umfassend genug sei, fest, ohne indessen irgend etwas beizubringen, was diese Ansicht besser begründen könnte, als seine früheren Argumente. Herr Cornu setzt nochmals ausführlich auseinander, weshalb die Schlussweise seines Gegners unzulässig ist. Wn.

E. Maiss. Bewegungen des Aethers im freien Raume, welche ein continuirliches Farbenspectrum verursachen. Hoppe Arch. LXVI. 397-404.

Der Verfasser behauptet, dass die gewöhnlichen Elasticitätsgleichungen für isotrope Medien particuläre Integrale von der Form zulassen:

$$\xi = ae^{-St}\cos(k\varrho - st + \alpha)$$
$$\eta = be^{-St}\cos(k\varrho - st + \beta)$$
$$\zeta = ce^{-St}\cos(k\varrho - st + \gamma),$$

wo

$$k\varrho = ux + vy + wz.$$

Dies Resultat, zu dem der Verfasser durch nicht strenge Schlüsse gelangt, ist falsch. Setzt man nämlich die obigen Ausdrücke in die Differentialgleichungen der Elasticität ein, so zeigt eine einfache Discussion der dadurch zwischen den Constanten S, s, a, b, c, α, β, γ, u, v, w entstehenden Gleichungen, dass jene Ausdrücke eine reelle Lösung nur ergeben für $S = O$. Was der Verfasser weiter über die physikalische Bedeutung seiner Lösung sagt, die eine Bewegung des Aethers vorstellen soll, durch welche ein continuirliches Spectrum verursacht wird, wird mit jener Lösung ebenfalls hinfällig. Wn.

E. Mathieu. Remarques sur les mémoires relatifs à la théorie de la lumière, renfermés dans les exercices d'analyse et de physique mathématique de Cauchy. Résal J. (3) VII. 201-214.

In dem Aufsatze wird eine Reihe von kritischen Bemerkungen, resp. Einwänden gegen die Cauchy'sche Lichttheorie zusammengestellt. Diese Bemerkungen, die der Verfasser vor circa 20 Jahren gemacht, aber nicht veröffentlicht hat, sind zum Teil nicht neu, finden sich jedoch nirgends in der Vollständigkeit zusammengestellt, wie in der vorliegenden Arbeit. Die hauptsächlichsten Einwände richten sich zunächst gegen die Grundgleichungen der Cauchy'schen Theorie. Nach diesen müsste auch in Krystallen jedes Molecül sich in einer Ellipse bewegen, was den Erscheinungen der Doppelbrechung widerspricht. Auch kann man aus jenen Gleichungen nicht die Drehung der Polarisationsebene erklären. Sodann wird die Cauchy'sche Reflexionstheorie eingehend kritisirt. Diese Theorie ist zu verwerfen, weil sie mit den Principien der Erhaltung der lebendigen Kraft in Widerspruch steht. Auch folgt aus jener Theorie, was Cauchy selbst nicht ausspricht, dass einfache longitudinale Wellen sich in beiden Medien, an deren Grenze die Reflexion erfolgt, mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen müssten; auch dies Resultat ist un-

zulässig. Weiter aber ergiebt sich für die bei der Reflexion eintretende elliptische Polarisation eines vorher geradlinig polarisirten Strahles aus der Cauchy'schen Theorie eine ganz andere Formel, als die von Jamin unter dem Namen „Cauchy'sche Formel“ experimentell geprüfte. Gegen die letzte optische Arbeit von Cauchy endlich wird bemerkt, dass schon die zu Grunde gelegte Annahme, wonach sich zwei Aethermolecüle umgekehrt proportional der vierten Potenz der Entfernung abstossen, sehr wenig wahrscheinlich, dass aber die weitere Folgerung, wonach im leeren Raume die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der violetten Strahlen die der rothen übertreffen soll, ganz unannehmbar ist.

Wn.

F. Mathieu. De la polarisation elliptique par réflexion sur les corps transparents, pour une incidence voisine de l'angle de polarisation. Résal J. (3) VII. 219-238.

Von den verschiedenen Reflexionstheorieen hält Herr Mathieu die Neumann'sche für die allein annehmbare, weil deren Grundvorstellungen am einwurffreisten seien. Doch sei, um die Jamin'schen Beobachtungen über die elliptische Polarisation eines unter dem Polarisationswinkel reflectirten Strahles zu erklären, eine Modification jener Theorie nöthig, darin bestehend, dass bei dem Vorgang der Reflexion ein kleiner Verlust an lebendiger Kraft durch Absorption oder Diffusion stattfinde. Auf Grund der so modificirten Neumann'schen Vorstellungen entwickelt Herr Mathieu die Theorie der Reflexion an der Grenze zweier isotroper Medien folgendermassen:

Es seien für Licht, dessen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene gerichtet sind,

$$\sin\frac{2\pi t}{T},\quad v\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\alpha}{\lambda}\right),\quad u\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\beta}{\lambda'}\right)$$

die Geschwindigkeitscomponenten der einfallenden, reflectirten und gebrochenen Welle an der Grenzfläche. Dann ist nach Neumann 1) die Summe der beiden ersten Componenten gleich der

dritten; 2) die lebendige Kraft, die in einem gewissen rechtwinkligen Parallelepipedon enthalten ist, dessen eine Kante dem einfallenden Strahle parallel ist, ist gleich der Summe der lebendigen Kräfte, die in entsprechenden zur reflectirten und gebrochenen Welle gehörigen Parallelepipeden enthalten sind. (Bei der Bildung des Ausdrucks für die lebendige Kraft ist zu beachten, dass die Dichtigkeit des Aethers in beiden Medien dieselbe ist.) Dividirt man die zweite der so erhaltenen Gleichungen durch die erste, so erhält man nach Neumann, unter i den Einfalls-, unter r den Brechungswinkel verstanden, die Gleichung

$$(2a)\qquad \sin i.\cos i.\left[\sin\frac{2\pi t}{T} - v\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right] = u\sin r.\cos r.\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\beta}{\lambda'}\right).$$

An Stelle dieser Gleichung (2a) setzt Herr Mathieu, da bei der Reflexion lebendige Kraft verloren geht, die folgende:

$$(3)\qquad \sin i.\cos i.\left[\sin\frac{2\pi t}{T} - v\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right] = u\sin r.\cos r.\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{\beta}{\lambda'}\right) + B\sin\frac{2\pi t}{T} + C\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Die verloren gegangene lebendige Kraft muss, wenn das Parallelepipedon die Kantenlänge λ längs des einfallenden Strahles hat, stets positiv sein. Daraus folgt durch eine längere Entwickelung, die wir hier übergehen, dass für alle Werte von i

$$B\sin 2i - B^2 - C^2 > 0$$

sein muss. Daher müssen B und C die Form haben:

$$B = k\sin 2i,\quad C = m\sin 2i.$$

k und m sind grade Functionen von $\sin i$, die aber stets sehr klein sind, und k ist stets positiv.

Aus den Gleichungen (1) und (3) ergeben sich nun leicht für v und α die Ausdrücke

$$v^2 = \frac{(\sin 2i - \sin 2r - 2B)^2 + 4C^2}{(\sin 2i + \sin 2r)^2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\alpha}{\lambda} = \frac{-2C}{\sin 2i - \sin 2r - 2B},$$

und ähnliche für u, β. Nach der ursprünglichen Neumann'schen Theorie, wo $B = 0$, $C = 0$, ist stets $\alpha = 0$ und für den Polarisationswinkel $\left(i + r = \frac{\pi}{2}\right)$ wird $v = 0$. Nach der modificirten Theorie tritt an Stelle des Polarisationswinkels derjenige Winkel i_1, für den

$$\sin 2i - \sin 2r - 2B = 0$$

ist; (derselbe ist wegen der Kleinheit von B dem Polarisationswinkel sehr nahe). Für diesen Winkel i_1 wird v nicht gleich 0. Ferner ist α für alle Einfallswinkel sehr klein, nur für den Winkel i_1 ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Wir haben ausführlich den Gang der Ableitung und die Resultate für Licht, das senkrecht zur Einfallsebene schwingt, (also nach Neumann senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist) mitgeteilt. Analoge Betrachtungen werden dann auch für Licht, dessen Schwingungen in der Einfallsebene stattfinden, durchgeführt. Daraus ergiebt sich weiter für die Reflexion eines unter einem beliebigen Azimuth polarisirten Strahles Folgendes: Ist, wie oben, α die Phasenverzögerung der Componente senkrecht zur Einfallsebene, α' die Phasenverzögerung der Componente in der Einfallsebene, so ist $\alpha' - \alpha$ stets sehr nahe gleich 0 ausser in unmittelbarer Nähe des Polarisationswinkels, wo sich $\alpha' - \alpha$ sehr schnell dem Werte $\frac{\pi}{2}$ nähert. Diese, sowie die oben erwähnte Folgerung stimmen, was den Gang der Erscheinung im Allgemeinen betrifft, mit den Jamin'schen Beobachtungen überein. Zum Schluss wird an mehreren Beispielen gezeigt, dass bei passender Wahl der kleinen Grössen k, m die neuen Formeln im Stande sind, auch numerisch die Jamin'schen Beobachtungen darzustellen. Wn.

E. Lommel. Theorie der Drehung der Polarisationsebene. Wiedemann Ann. (2) XIV. 523-534.

Der Verfasser zeigt, welche Glieder den Gleichungen einer früher von ihm entwickelten Theorie (cf. F. d. M. X. 1878. p. 692)

hinzuzufügen sind, damit diese Theorie die magnetische und die natürliche Drehung der Polarisationsebene darzustellen im Stande ist. Er denkt sich zu dem Zwecke durch eine zur Wellennormale parallele magnetisirende Kraft Molecularströme inducirt oder vorhandene Molecularströme gerichtet. Diese der Wellenebene (diese wird zur xy-Ebene genommen) parallelen Stromkreise bewirken, dass der nach der x-Axe gerichtete moleculare Widerstand nicht blos von der x-Componente, sondern auch von der y-Componente der Geschwindigkeit abhängig wird. Die Form des Widerstandes, welcher der Bewegung der Körperteilchen entgegenwirkt, ist

$$(1) \qquad -2km\,\frac{d(x'-x)}{dt} - 2\delta m\,\frac{d(y'-y)}{dt},$$

wo 2δ ein von der Stärke der Molecularströme abhängiger Coefficient ist. Bildet die Richtung der magnetisirenden Kraft mit der Fortpflanzungsrichtung der Welle den Winkel α, so ist nur $\delta \cos\alpha$ an Stelle von δ zu setzen. Der obige Ausdruck 1) tritt an die Stelle des einfacheren

$$-2km\,\frac{d(x'-x)}{dt}$$

in der Gleichung für die x-Componente der Schwingung der Körperteilchen, während die Gleichungen für die Bewegung der Aetherteilchen genau dieselben bleiben wie in der früheren Theorie. Für die modificirten Gleichungen werden in bekannter Weise particuläre Lösungen gesucht. Diese ergeben für die Bewegung der Aetherteilchen zwei entgegengesetzt kreisförmig polarisirte Strahlen, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen und infolge verschiedener Absorption ungleiche Amplituden haben. Verschwindet die Absorption, so sind die Amplituden gleich; nach Durchlaufung eines gewissen Weges z setzen sich dann die beiden kreisförmigen Bewegungen zu einer geradlinigen Schwingung zusammen. Die durch Durchlaufung des Weges z entstandene Drehung der Schwingungsebene wird durch einen Ausdruck der Form

$$\Delta = z\delta \cos\alpha \left\{ \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} + \frac{c}{\lambda^6} + \cdots \right\}$$

dargestellt. Damit ist die magnetische Drehung der Polarisationsebene erklärt. Zur Erklärung der natürlichen Drehung dieser Ebene werden dieselben Gleichungen benutzt, nur dass $\alpha = 0$ angenommen wird. Die Berechtigung für die Einführung des modificirten Widerstandes wird hier aus der Annahme eines schraubenförmigen Baues der Molecüle hergeleitet.

Wn.

E. Lommel. Ueber das Dispersionsgesetz. Wiedemann Ann. (2) XIII. 353-360.

Die in einer früheren Arbeit des Verfassers (cf. F. d. M. X. 1878. p. 692) abgeleitete Dispersionsformel wird hier unter Einführung gewisser vereinfachender Annahmen weiter umgeformt. Ist das Absorptionsvermögen verschwindend klein und betrachtet man auch eine vom Reibungswiderstand der Molecülе abhängige Grösse als klein, so nimmt die Dispersionsformel in erster Annäherung die einfache Gestalt an:

$$(1) \qquad n^2-1 = \frac{a}{1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}},$$

in der nur zwei Constante, a und λ_0, vorkommen. Als zweite Näherung ergiebt sich die vierconstantige Formel

$$(2) \qquad n^2-1 = \frac{a+b\lambda^2+\frac{c}{\lambda^2}}{1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}},$$

in der b und c kleine Grössen sind. Mit gewissen Vernachlässigungen erhält man hieraus die von Ketteler aufgestellte Formel

$$n^2-1 = \frac{A}{\lambda^2-B}+\frac{C}{\lambda^2-D},$$

während die ebenfalls von Ketteler angegebene Formel

$$n^2 = \alpha\lambda^2+a+\frac{b}{\lambda^2}+\frac{c}{\lambda^4}$$

schon in der oben citirten früheren Arbeit von Herrn Lommel

abgeleitet ist. Daraus ergiebt sich, dass die hier aufgestellte Dispersionsformel (2) ebensogut wie die Ketteler'sche Formel mit der Erfahrung übereinstimmt. Wn.

E. Ketteler. Einige Anwendungen des Dispersionsgesetzes auf durchsichtige, halbdurchsichtige und undurchsichtige Mittel. Wiedemann Ann. (2) XII. 363-380.

E. Ketteler. Experimentaluntersuchung über den Zusammenhang zwischen Refraction und Absorption des Lichtes. Wiedemann Ann. (2) XII. 481-519.

In der ersten Arbeit werden die Dispersionsformeln, welche der Verfasser in mehreren früheren Arbeiten abgeleitet hatte, (cfr. F. d. M. XII. 1880. p. 759, Formel IV.) durch Einführung neuer Constanten statt der ursprünglichen, sowie unter gewissen Vernachlässigungen umgeformt und dadurch in verschiedene Formen gebracht, die eine directe Vergleichung mit den Beobachtungen ermöglichen. Der Abhandlung ist eine Polemik angefügt, die sich gegen die Anhänger der älteren optischen Theorien wendet. Wenn auch Manches, was Herr Ketteler hier anführt, seine Berechtigung hat, so enthalten doch alle neueren Theorien, ganz besonders die des Herrn Ketteler selbst, so viele angreifbare Punkte, dass keine derselben in ihrer jetzigen Form allgemeine Annahme finden dürfte. In Bezug auf die Begründung der Grundgleichungen verdienen die älteren Theorien gewiss den Vorzug.

In der zweiten Arbeit sucht der Verfasser die Richtigkeit des von ihm aufgestellten Dispersionsgesetzes experimentell zu erweisen. Wenn man diesen Nachweis auch als gelungen ansieht, so kann man dem Gesetze selbst doch nur die Bedeutung einer empirischen Formel beilegen.

Wn.



ELER. Constructionen zur anomalen Dispersion. . XVII. 225-232.

Abdruck aus Pogg. Ann. (2) XI. 210-217, siehe F. d. M. XII. 1880. p. 760. O.

A. Kundt. Ueber die Doppelbrechung des Lichtes in bewegten reibenden Flüssigkeiten. Wiedemann Ann. (2) XIII. 110-131.

Die wesentlich experimentelle Arbeit untersucht, ob in reibenden Flüssigkeiten allgemein mit den uns zu Gebote stehenden Mitteln Doppelbrechung erzeugt werden kann. Für die Theorie der Versuche werden die Resultate einer Arbeit von Stokes über die stationäre Bewegung einer reibenden incompressiblen Flüssigkeit zwischen zwei unendlich langen concentrischen Cylindern benutzt. Zum Schluss giebt der Verfasser einige allgemeine Erörterungen über die Beziehungen zwischen Reibungscoefficienten, elastischen Eigenschaften und Doppelbrechung der Flüssigkeiten. Wn.

O. Böklen. Die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Pr. Reutlingen.

Eine eingehende Behandlung der Fresnel'schen Wellenfläche auf Grund der seit 1827 über dieselbe erschienenen literarischen Arbeiten. Alle wichtigen geometrischen und für das optische Verhalten zweiaxiger Krystalle bedeutsamen Eigenschaften dieser Fläche werden dargelegt und ihre Beziehung zu den mannichfachen Hülfsflächen erörtert, welche von den Forschern im Verfolg ihres Studiums mit der Wellenfläche in Verbindung gesetzt sind. Ein ausführliches Verzeichnis der bis in die Neuzeit über diesen Gegenstand erschienenen Abhandlungen nebst einer kurzen Charakterisirung ihres wesentlichen Inhalts ist beigefügt. Die Schrift empfiehlt sich allen denen, welche sich eingehend über das Wesen dieser interessanten Fläche und der mit ihr zusammenhängenden Hülfsflächen unterrichten wollen.

Schn.

G. Basso. Dimostrazione di una proprietà geometrica dei raggi rifratti straordinari nei mezzi birifrangenti uniassi. Torino, Atti XVI. 208-211.

Wird ein Lichtstrahl an einer Fläche eines einaxigen Krystalls gebrochen, die der optischen Axe parallel ist, so ist der Winkel, welchen die Refractionsebene des gebrochenen ausserordentlichen Strahls mit der Einfallsebene bildet, von dem Einfallswinkel unabhängig; dagegen hängt dieser Winkel ab von der Lage der optischen Axe in der brechenden Fläche.

Wn.

Bauer. Ueber eine Methode, die Brechungscoefficienten einaxiger Krystalle zu bestimmen, und über die Brechungscoefficienten des Brucits. Berl. Monatsber. 1881 958-981.

Die Theorie der Farbenringe, welche entstehen, wenn polarisirtes Licht durch eine senkrecht zur Axe geschnittene Platte eines einaxigen Krystalls hindurchgeht, wird in bekannter Art für den Fall entwickelt, dass das einfallende Licht beliebig gegen die Axe geneigt ist. Die resultirende Formel wird benutzt, um aus den angulären Durchmessern der dunklen Ringe die Differenz der Quadrate der Elasticitätsaxen zu berechnen.

Wn.

E. Mallard. Sur la théorie de la polarisation rotatoire. C. R. XCII. 1155-1158.

Schichtet man auf irgend eine Weise doppeltbrechende Krystallplatten über einander und lässt auf diese Combination einen geradlinig polarisirten Lichtstrahl fallen, so wird dieser [illegible]n Durchgang elliptisch polarisirt, und die Axen der Ellipsen [illegible]n ihre Lage und ihr Grössenverhältnis beim Durchgang [illegible] jede einzelne Platte. Die Formeln für diese Aenderung [illegible]n ohne Ableitung mitgeteilt. Dass man auf die genannte

Erscheinung eine Theorie der Drehung der Polarisationsebene begründen kann, ist nicht neu (cf. F. d. M. VIII. 1876. p. 657).

Wn.

CROULLEBOIS. Sur la double réfraction elliptique et les trois systèmes de franges. C. R. XCII. 297-299.

CROULLEBOIS. Sur la réalité d'une équivalence cinématique en optique ondulatoire. C. R. XCIII. 53-55.

Die erste Arbeit verfolgt den Zweck, experimentell das Vorhandensein der beiden elliptisch polarisirten Strahlen nachzuweisen, in die ein gegen die Axe geneigter Strahl im Quarz zerlegt wird. Dabei wird die Interferenz von elliptisch polarisirten Strahlen benutzt. In der zweiten Arbeit wird der Gang eines Strahles in einem Doppelprisma aus Quarz in bekannter Art verfolgt, ohne dass auch hier etwas theoretisch Neues zur Sprache käme.

Wn.

A. MOLLO. Sulla diffrazione dei reticoli. Batt. G. XIX. 131-135.

Die Intensitätsformel für die Frauenhofer'schen Beugungserscheinungen wird hier unter der Annahme abgeleitet, dass sowohl die Spaltöffnungen, als die Gitterstäbe beliebige Breiten haben; aus der so erhaltenen allgemeinen Formel ergeben sich dann leicht die gewöhnlich benutzten speciellen Formeln für gleiche Breite der Gitterstäbe oder gleiche Breite der Oeffnungen.

Wn.

A. CORNU. Sur la condition d'achromatisme dans les phénomènes d'interférence. C. R. XCIII. 809-815.

Die gewöhnliche Definition des centralen Streifens einer Interferenzerscheinung als des Streifens, in dem die Phasendifferenz der interferirenden Strahlen für alle Farben gleich Null

ist, ist nicht in allen Fällen zutreffend. Die allgemeinste Form für diese Phasendifferenz ist nämlich

$$F(\lambda)+C\cdot\frac{u}{\lambda},$$

wo u der Abstand des betrachteten Punktes vom Mittelpunkte des Gesichtsfeldes, λ die Wellenlänge, C eine von λ unabhängige Constante ist. Den ersten Teil der Wegdifferenz $F(\lambda)$ kann man sich in folgender Weise entstanden denken: Die interferirenden Strahlen mögen von zwei (reellen oder fictiven) Oeffnungen ausgehen und schon durch die vor diesen Oeffnungen liegenden Wege die Phasendifferenz $F(\lambda)$ erlangt haben, während der zweite Teil erst von der Wegdifferenz zwischen jenen Oeffnungen und dem Interferenzorte u entsteht. Bei den einfachsten Interferenzerscheinungen ist $F(\lambda)=0$, und aus diesem Falle ist die Definition des centralen Streifens hergenommen. Ist $F(\lambda)$ aber nicht mehr gleich 0, so bedarf es einer neuen Definition. Diese stellt Herr Cornu in dem vorliegenden Aufsatz auf: In einem System von Interferenzstreifen, die im nicht homogenen Licht (aber mit continuirlichem Spectrum) entstehen, existirt stets ein nahezu achromatischer Streifen, welcher die Rolle des centralen Streifens spielt. Man erhält die Lage desselben, indem man u aus der Gleichung

$$F'(\lambda)-\frac{Cu}{\lambda^2}=0$$

bestimmt und für λ den Wert setzt, der sich auf den intensivsten Strahl des Spectrums bezieht. Ist nämlich diese Bedingung, die aussagt, dass die Wegdifferenz ein Maximum oder Minimum ist, für den intensivsten Strahl erfüllt, so ist sie auch für die benachbarten Strahlen erfüllt, und höchstens die äussersten, wenig intensiven Farben können eine geringe Färbung geben.

Von der erweiterten Definition wird auf eine specielle Interferenzerscheinung Anwendung gemacht. Wn.

L. Sohncke und A. Wangerin. Neue Untersuchungen über die Newton'schen Ringe. Wiedemann Ann. (2) XII. 1-40, 201-249.

Von den beiden Teilen, in welche die Arbeit zerfällt, ist der erste rein experimentelle von dem ersten der beiden Verfasser, der zweite theoretische von dem zweiten Verfasser bearbeitet. Der erste Teil enthält eine Reihe von Beobachtungen der Newton'schen Ringe, in denen der Ort bestimmt wird, auf dem man das Beobachtungsinstrument einstellen muss, um irgend einen Punkt eines der dunklen Ringe möglichst scharf zu sehen. Die so für die verschiedenen Ringpunkte ermittelten Orte bilden keine horizontale Ebene, sondern eine gewisse andere Fläche, die Interferenzfläche, deren Lage durch sorgfältige Messungen mittels eines Mikroskops ermittelt wird.

Der Erklärung dieser früher nicht bekannten Tatsache ist der theoretische Teil der Arbeit gewidmet. Man muss zu dem Zwecke die bisherige Theorie der Newton'schen Ringe dahin erweitern, dass man das auffallende Licht nicht mehr als von einem Punkte herrührend ansieht, sondern auf die Ausdehnung der Lichtquelle Rücksicht nimmt. Hat man es (wenn man zunächst von wiederholten Reflexionen im Innern der Lamelle absieht) bei der früheren Theorie mit einem Paare interferirender Strahlen zu tun, so gehen jetzt durch jeden Punkt des Raumes unzählig viele solcher Paare; es interferiren aber nur zwei solche Strahlen mit einander, die von demselben Punkte der Lichtquelle ausgegangen sind. Im Allgemeinen wird nun durch das Zusammenwirken aller jener Paare die Interferenzerscheinung undeutlich; andererseits ist es unmöglich, die Forderung zu erfüllen, dass alle durch einen Punkt gehende Paare in diesem Punkte gleichzeitig ein Maximum oder Minimum der Intensität ergeben. Der Verfasser bestimmt daher den Punkt des Raumes, in dem die Interferenzerscheinung am deutlichsten erscheint, nach folgendem Princip. Da zwei interferirende Strahlen einen kleinen Winkel mit einander bilden, so gelangen längs der Axe zwei Strahlen in das Beobachtungsinstrument, und zwar zwei solche, die verschiedenen Paaren angehören. Diese beiden Paare werden als Hauptpaare bezeichnet. Wenn nun beide Hauptpaare in einem Punkte genau dieselbe Wegdifferenz besitzen, so ist in diesem Punkte die Interferenz deutlicher, als dort, wo jene Forderung

nicht erfüllt ist. Dies Princip, das zwar hypothetisch ist, sich aber durch naturgemässe Betrachtungen aus den Symmetrieverhältnissen ergiebt, bildet die Grundlage der Rechnung. Der Verfasser denkt die Ringe im einfarbigen reflectirten Lichte entstanden an einer Lamelle, die dadurch gebildet ist, dass eine planparallele Glasplatte auf einer Kugelfläche (Linse) aufliegt; und zwar sei die Dicke der Platte klein gegen den Kugelradius. Er betrachtet nun zunächst eine einzelne ebene Welle, die zuerst in die planparallele Platte hineingebrochen, dann teils an der Oberfläche der Lamelle, teils im Innern derselben reflectirt, endlich aus der planparallelen Platte wieder in Luft hineingebrochen wird. Durch irgend einen Punkt P des Raumes gehen nun zwei von der betrachteten ebenen Welle herrührende Strahlen (nötigenfalls rückwärts verlängert). Die Wegdifferenz, welche beide in P besitzen, wird dann vermittels einer längeren Rechnung ausgedrückt durch die Coordinaten von P, die Richtungscosinus der einfallenden Wellennormale, den Kugelradius r und die Dicke der planparallelen Platte. Dabei wird, da die Coordinaten von P stets kleine Grössen gegen r sind, nach Potenzen des Quotienten dieser Grössen entwickelt und die Glieder vierter Ordnung vernachlässigt. Wendet man den so ermittelten Ausdruck der Wegdifferenz auf diejenigen einfallenden Wellen an, aus denen die oben erwähnten Hauptpaare entstehen, benutzt dann obiges Princip, so findet man, dass für jeden Punkt eines dunklen Ringes zwei Gleichungen zu erfüllen sind: die erste derselben ist im Wesentlichen die der bisherigen Theorie; die zweite giebt an, wie weit von der Lamelle derjenige Punkt entfernt ist, auf den man einstellen muss, um irgend einen Ringpunkt möglichst deutlich zu sehen. Die Discussion dieser Gleichungen, von denen noch gezeigt wird, dass sie sich durch Berücksichtigung der wiederholten Reflexionen innerhalb der Lamelle nicht ändern, liefert nun folgende Resultate:

(1) Steht die Axe des Beobachtungsinstruments senkrecht [zur Ebene] der planparallelen Platte, so liegen die Interferenzorte in der [Nä]he der Lamelle. (2) Für einen andern Neigungswinkel ϑ [...] dagegen bildet jeder einzelne Ring eine Curve doppel-

ter Krümmung, die auf einem schiefen Kreiscylinder liegt, dessen Seite der Axe parallel ist. Alle Ringe ferner liegen auf einer gewissen geradlinigen Fläche dritter Ordnung. Die mit Hülfe dieser Fläche berechneten Interferenzorte stimmen mit den beobachteten überein. 3) In der centralen (d. i. durch den Berührungspunkt der Kugel und der Glasplatte gelegten) Einfallsebene bilden die Interferenzorte eine Gerade, die „Hauptgerade", welche zum Lichte hin ansteigt und gegen die Horizontale unter einem Winkel w geneigt ist, so dass

$$\operatorname{tg} w = \frac{\sin \vartheta . \cos \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta}.$$

Der Winkel w ist unabhängig vom Kugelradius, sowie von der Dicke und dem Brechungsexponenten der planparallelen Platte. Die auf der Hauptgeraden gelegenen Ringdurchmesser haben denselben Mittelpunkt O_1. 4) In der Richtung senkrecht zur centralen Einfallsebene bilden die Interferenzorte eine horizontale Gerade, die „Quergerade", welche aber die Hauptgerade nicht schneidet. Alle auf der Quergeraden liegenden Ringdurchmesser haben denselben Mittelpunkt O_2. Die Linie $O_1 O_2$, welche der Axe parallel ist, ist zugleich die Doppelgerade der oben erwähnten Fläche dritter Ordnung. 5) Während man, um irgend einen Punkt eines dunklen Ringes möglichst deutlich zu sehen, das Beobachtungsinstrument auf einen bestimmten Punkt einstellen muss, ist ein Gleiches für das dunkle Centrum nicht nötig. Auf welchen Punkt der Linie $O_1 O_2$ man auch einstellen mag, die Intensität ist stets ein Minimum. 6) Die neben den Hauptpaaren in das Beobachtungsinstrument gelangenden Strahlenpaare verursachen ausserhalb der centralen Einfallsebene eine Undeutlichkeit der Interferenzerscheinung, namentlich in der Quergeraden.

In einem Zusatze wird nach denselben Principien, wie bei den Newton'schen Ringen, die Theorie der an einem keilförmigen Blättchen entstehenden Interferenzstreifen behandelt.

Wn.

W. Feussner. Ueber die Interferenzerscheinungen dünner Blättchen mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der Newton'schen Binge. Wiedemann Ann. (2) XIV. 545-571.

Der Verfasser stellt eine Theorie der Interferenzstreifen, welche an einem keilförmigen Blättchen entstehen, auf und berücksichtigt dabei zum ersten Male (ein Teil der vorliegenden Arbeit ist zuerst 1880 in den Marburger Sitzungsberichten veröffentlicht vor Erscheinen der im vorigen Referate besprochenen Arbeit) den Einfluss der Ausdehnung der Lichtquelle. Er betrachtet dabei nicht, wie es vom Referenten geschehen (cf. das vorhergehende Referat), den Vorgang in einem Punkte, auf den das Beobachtungsinstrument eingestellt ist, sondern verfolgt noch den Weg der Strahlen durch die Linse des Auges oder des Beobachtungsinstruments. Das erscheint dem Referenten als eine unnötige Complication. So lange es sich nur um Glieder erster Ordnung der Linsenöffnung handelt (und nur solche kommen hier in Betracht), entstehen durch die Linse keine neuen Wegunterschiede; es ist daher überflüssig, noch den Weg der Strahlen durch die Linse zu verfolgen. Ausserdem dürfte, wenn, wie bei den Newton'schen Ringen, ausserhalb der Lamelle noch Brechungen hinzutreten, die Rechnung nach der Methode des Herrn Feussner nicht mehr durchführbar sein.

Die Frage, wann durch das Zusammenwirken aller interferirenden Strahlenpaare die grösste Deutlichkeit zu Stande kommt, wird so erledigt: In der Formel für die Wegdifferenz zweier interferirender Strahlen kommt als Hauptglied ein Ausdruck vor, der, gleich einer Constanten gesetzt, eine gewisse Gerade in der Ebene des mit der Linse verbundenen Diaphragmas bestimmt. Lässt man die Gerade durch Variiren der Constante den ganzen von den betreffenden Strahlen im Diaphragma eingenommenen Raum durchlaufen, so variirt die Intensität, die das betrachtete Strahlenpaar hervorbringt. Damit e Erscheinung möglichst deutlich sei, muss jene Variation mög-
st gering, also die Wegdifferenzen für die äussersten Lagen

der oben genannten Linie möglichst wenig verschieden sein. Durch diese Betrachtungen ergiebt sich eine Formel für den Ort, auf den man das Beobachtungsinstrument einstellen muss, um die Interferenzstreifen möglichst deutlich zu sehen. Nach dieser Formel müssen die Streifen ihren Ort im Raum zu ändern scheinen, wenn man näher an das Blättchen herangeht. Ein weiteres Resultat des Verfassers bezieht sich auf die Richtung der gleichzeitig im Beobachtungsinstrument erscheinenden Streifen. Dieselben erleiden eine Drehung, wenn man sich dem Blättchen nähert oder von ihm entfernt.

Ausser der Mitteilung der oben besprochenen Resultate enthält die Arbeit des Herrn Feussner eine Polemik gegen die im vorhergehenden Referate besprochene Arbeit. Herr Feussner hält das Princip, nach dem in jener Arbeit von dem Referenten das Zusammenwirken der unendlich vielen Paare interferirender Strahlen bestimmt ist, für eine willkürliche und falsche Annahme, ohne indessen für diese Behauptung etwas Stichhaltiges beizubringen. Dass die Feussner'sche Formel für die Drehung der Streifen eines keilförmigen Blättchens durch einige wenige Beobachtungen bestätigt ist, während die Theorie des Referenten keine solche Drehung ergiebt, ist kein Beweis. Denn während Herr Feussner die Richtung der gleichzeitig im Fernrohr erscheinenden Streifen bestimmt, hat der Referent seiner Theorie die Vorstellung zu Grunde gelegt, dass das Beobachtungsinstrument successive auf verschiedene Punkte eines Streifens eingestellt wird und die so im Raume ermittelten Orte verbunden werden. Die beiden Formeln für die Richtung der Streifen haben also eine ganz verschiedene Bedeutung. In einer später zu besprechenden Arbeit ist diese Differenz ausführlich dargelegt und die Feussner'sche Formel vom Referenten viel einfacher abgeleitet.

Die Anwendung, die Herr Feussner von seiner Theorie auf die Newton'schen Ringe macht, ist ganz zu verwerfen. Denn aus den Feussner'schen Formeln ergiebt sich nur der ideelle Fall, wo die Dicke der planparallelen Platte, die auf der Linse aufliegt, gleich Null ist. Man kann daher aus

jenen Formeln auf die wirklichen Erscheinungen keinen Schluss ziehen. Wn.

A. Kiel. Berechnung der Lichtmenge, die von einem gegebenen leuchtenden Punkt auf ein gegebenes Ellipsoid fällt. Hoppe Arch. LXVII. 131-159.

Der Optik gehört nur die Einkleidung der Aufgabe an. Dieselbe kommt nämlich darauf hinaus, den Flächeninhalt einer sphärischen Ellipse zu berechnen. Diese Curve wird aus einer um den leuchtenden Punkt mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel durch den Tangentenkegel ausgeschnitten, der von dem genannten Punkte an das Ellipsoid zu legen ist. Die Flächenberechnung geschieht auf doppelte Weise, einmal durch directe Ausführung des Doppelintegrals und Reduction der vorkommenden elliptischen Integrale auf die Normalform, sodann durch Berechnung des Umfangs der Polarcurve jener sphärischen Ellipse. Zum Schluss wird an einem numerischen Beispiel die Rechnung vollständig durchgeführt. Wn.

G. Füchtbauer. Bilder sphärischer Spiegel. Carl Rep. XVII. 571-578.

Elementare Constructionen der Bilder an sphärischen Spiegeln, die teilweise Anwendungen der von Reusch und Ferraris angestellten Untersuchungen sind. O.

Thollon. Minimum du pouvoir de résolution d'un prisme. C. R. XCII. 128-130.

Es sei i der Einfallswinkel, r_1 der Austrittswinkel, n der Brechungsexponent eines Prismas; ferner sei für ein constantes i dr_1 der Zuwachs von r_1, wenn n um dn wächst; während δr_1 der Zuwachs von r_1 ist, wenn bei constantem n der Winkel i um di wächst. Dann giebt dr_1 die anguläre Distanz zweier

nahen Frauenhofer'schen Linien an, während δr_1 die anguläre Breite eines bestimmten Streifens ist. Der Verfasser definirt nun das Verhältnis $\frac{dr_1}{\delta r_1}$ als Auflösungsvermögen (pouvoir de résolution) eines Prismas und sucht das Minimum dieses Ausdrucks.

Wn.

B. C. Damien. Recherches sur le pouvoir réfringent des liquides. Ann. de l'Éc. Norm. (2) X. 233-304.

Bei Gelegenheit einer rein experimentellen Untersuchung wird erörtert, welchen Einfluss auf die Brechung des Lichtes in einem mit Flüssigkeit gefüllten Hohlprisma der Umstand ausübt, dass die das Prisma begrenzenden Glasplatten nicht genau planparallel sind.

Wn.

M. Koppe. Construction der Cardinalpunkte eines Linsensystems. Hoppe Arch. LXVI. 405-412.

Aus der collinearen Verwandtschaft von Object und Bild sucht der Verfasser zunächst die Existenz der beiden Paare von Hauptpunkten, der eigentlichen und uneigentlichen (besser negativen) Hauptpunkte abzuleiten. Referent kann die hierzu führenden Schlüsse nicht als streng ansehen. Die daran sich anschliessenden Constructionen enthalten nichts Neues.

Wn.

L. Matthiessen. Zur Integration der Differentialgleichungen in der Dioptrik der continuirlich geschichteten kugelförmigen Krystallinse der Fische. Schlömilch Z. XXVI. 179-200.

Der Verfasser hatte bereits früher (cf. F. d. M. XI. 1879. p. 748) Differentialgleichungen aufgestellt zur Bestimmung der Brennweiten, Hauptpunktdistanzen und Hauptpunktinterstitien eines centrirten Systems brechender sphärischer Flächen von

continuirlich variabler Dichtigkeit, wenn dasselbe von zwei Medien begrenzt ist, welche mit der Trennungsfläche gleiche Brechungsvermögen besitzen. Er hatte dann diese Differentialgleichungen integrirt unter folgender Annahme für die Aenderung des Krümmungsradius und des Brechungsexponenten:

$$r = \frac{b-\eta}{b} r_1, \quad n = 1 + \zeta \frac{2b\eta - \eta^2}{b^2}.$$

Dabei ist r der Krümmungsradius, n der Brechungsexponent einer Fläche in der Entfernung η von der äussersten Fläche, r_1 ist der Radius der äussersten Fläche, für welche $n = 1$ ist; b ist der Abstand der äussersten Fläche vom Kerncentrum der Linse; endlich ist $1 + \zeta$ der Index des Kerncentrums. Bei diesen Annahmen über r und n, die für die Krystallinse aller Wirbeltiere gelten, werden die gesuchten Grössen (Brennweite etc. des aus einer beliebigen Zahl der Flächen bestehenden Systems) algebraische Functionen von η; und daraus ergeben sich physiologisch wichtige Folgerungen.

An diese Resultate seiner früheren Arbeit knüpft nun der Verfasser direct an, indem er zu den schon genannten Annahmen die weitere hinzufügt, dass die Linse kugelförmig, also $b = r_1$ ist, eine Annahme, die bei den Fischen durchweg zutrifft. Er zeigt dann, wie sich die oben erwähnten Differentialgleichungen ohne das umständliche Verfahren der früheren Arbeit direct integriren lassen durch Reihen, die nach Potenzen der kleinen Grösse ζ fortschreiten; dabei wird ζ^3 gegen die Einheit vernachlässigt. Indem in den Resultaten, die für einen beliebigen Teil der brechenden Kugel gelten, die Variable $\eta = 2r_1$ gesetzt wird, ergeben sich die Orte für die Cardinalpunkte der Axenstrahlen der ganzen Linse.

Im zweiten Teile bestimmt der Verfasser die Trajectorie eines beliebigen schief in die Linse einfallenden Lichtstrahls innerhalb derselben. Es wird die Differentialgleichung der Trajectorie für ein beliebiges Gesetz der Abhängigkeit zwischen η und n aufgestellt und dieselbe dann unter der obigen Annahme über n (sowie auch allgemeiner für den Fall, dass an Stelle der zweiten Potenzen von $r_1 - \eta$ höhere Potenzen treten) wieder durch Reihen

integrirt, die nach Potenzen von ζ fortschreiten. Als hauptsächlichstes Resultat der Discussion ergiebt sich, dass Linsen der fraglichen Art sehr nahe aplanatisch sind, auch bei grösserem Gesichtsfelde.

Wn.

FÖRSTER. Ueber die Beziehung zwischen der Vergrösserung der Mikroskope und der Genauigkeit der mikrometrischen Messungen. Hoffmann Z. XII. 167-173, Jordan, Z. f. V. 1880.

Das Original dieser Abhandlung befindet sich in den Protocollen des internationalen Mass- und Gewichts-Comités. Ein Object von 0,001 mm in einer Entfernung von 206 mm liefert ein Netzhautbild von $0{,}073^{\mu}$ ($1^{\mu} = 0{,}001$ mm). Um zwei halbe Linien auf dunklem Grunde getrennt zu sehen, ist eine Minimalbreite des Bildes des Zwischenraumes erforderlich, welche gleich dem mittleren Durchmesser der Netzhautstäbchen ist, $4{,}4^{\mu}$. Bei einer Reihe von Versuchsmessungen im Anschluss an diese physiologischen Daten ergab sich für das Bild der schmalen Linie zwischen Mikrometerfaden und Teilstrich eine Minimalbreite von $2{,}5^{\mu}$, der wahrscheinliche mittlere Einstellungsfehler betrug $0{,}25^{\mu}$, auf der Netzhaut gemessen, so dass eine 26-malige Vergrösserung diesen Fehler am Object auf $0{,}1^{\mu}$ reducirt.

Bei der Einstellung des Teilstriches zwischen zwei Mikrometerfäden, deren Distanz die Strichbreite nur wenig übertrifft, genügt 27-malige Vergrösserung, um den objectiven Fehler auf $0{,}1^{\mu}$ herabzubringen. Ist dagegen der Zwischenraum gross, 2 mal 8, resp. 2 mal 17 Stäbchendicken, so ist dazu 85- bez. 150-fache Vergrösserung erforderlich, wobei zugleich in Folge der ungleichen Verteilung der Stäbchen persönliche Fehler hervortreten. Eine beliebige Steigerung der Vergrösserung wird durch die damit überhandnehmenden Beugungserscheinungen nutzlos.

Bn.

A. Martin. Sur une méthode d'autocollimation directe des objectifs astronomiques et son application à la mesure des indices de réfraction; remarques sur l'emploi du sphéromètre. Ann. de l'Éc. Norm. (2) X. 49-67.

Anschliessend an die dritte von Foucault gegebene Untersuchungsmethode für sphärische Spiegel (Ann. de l'obs. de Paris V.) giebt Verfasser eine solche für Objective.

Von einem leuchtenden Punkte wird ein Strahlenbündel auf die Convexlinse so gesandt, dass die Strahlen aus der zweiten Fläche normal austreten. Derjenige Teil derselben, welcher an der zweiten Fläche reflectirt wird, vereinigt sich nach nochmaliger Brechung an der ersten Fläche wieder an seinen Ausgangspunkten. Durch seitliche Verschiebung des leuchtenden Punktes verschiebt sich der Vereinigungspunkt leicht so weit, dass man das Auge unmittelbar an denselben bringen kann. Eine vollkommene Linse erscheint dann als gleichmässig leuchtende Fläche; jede Ungleichheit im Glase (wie in der Kugelgestalt der Fläche) zeichnet sich durch Lichter und Schatten aus. Zugleich ergiebt eine sorgfältige Messung der Radien sowie des Collimationsabstandes eine sehr genaue Bestimmung für den Brechungsindex. Nach beendigter Untersuchung des Kronglases wird die Flintlinse mit demselben vereinigt und die Untersuchung in derselben Weise an der Combination wiederholt. Bn.

A. Kerber. Die Höhe der Erdatmosphäre. Wiedemann Ann. (3) XIV. 117-128.

Verfasser sucht die Aufgabe auf Grund der Refraction zu lösen, indem er zunächst (für Strahlen geringer Zenitdistanz) die Cardinalpunkte des von den verschiedenen Luftschichten gebildeten centrirten Systems aufsucht. Die Knotenpunkte fallen in den Erdmittelpunkt, die Brennweiten ergeben beide über 22 Mill. km, die Hauptpunkte fallen zusammen in einen Punkt der Atmosphäre, 96,3 km von der Erdoberfläche. Aus der zweiten Tatsache ergiebt sich, dass nur der Mond divergente Strahlen in's

Auge des Beobachters sendet, während alle übrigen Himmelskörper convergente Strahlenbündel liefern. Aus der Lage der Hauptpunkte ergiebt sich als Näherung eine Höhe von 192,6 km, welche die aus den Dämmerungsbogen abgeleitete von 76 km weit übertrifft.

Aus der Lage der Symmetriepunkte (für welche Anfangs- und Endrichtung des Strahles gleiche Winkel mit der Axe bilden) ergiebt sich hernach eine zweite Bestimmung von ca. 189,0 km. In der Schlussbemerkung stellt Verfasser eine neue Entwickelung der Differentialgleichung der sphärischen Refraction in Aussicht.

Bn.

H. Cox. On the distance of rainbows. Mess. (2) XI. 52-55.

Mit Hülfe elementarer geometrischer Optik betrachtet der Verfasser die Wirkung der Entfernung der Regentropfen vom Auge auf die Höhe des Regenbogens. Glr. (O.).

Capitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

R. Clausius. Ueber einige Bemerkungen des Herrn C. Neumann in Bezug auf Elektrodynamik. Wiedemann Ann. (2) XII. 639-643.

Im XVII. Bande p. 400-434 von Clebsch Ann. (s. F. d. M. XII. 1880. p. 777) hat C. Neumann eine Abhandlung aus dem Jahre 1868 veröffentlicht, in welcher der Gedanke ausgeführt wird, dass das Potential elektrostatischer Kräfte sich mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzt. C. Neumann hat dieser Abhandlung einige Bemerkungen hinzugefügt, denen gegenüber Clausius sich zu der Erklärung veranlasst sieht, dass er seine damalige Kritik der oben genannten Abhandlung (Pogg. Ann. CXXXV., s. F. d. M.

I. 1868. p. 374) auch jetzt noch aufrecht erhält. Der Rest des Aufsatzes enthält die Besprechung einer Prioritätsreclamation von C. Neumann. Ok.

H. Lorberg. Bemerkung zu dem Aufsatze von Riecke: „Ueber die elektrischen Elementargesetze“. Wiedemann Ann. (2) XII. 115-121.

Der Verfasser bestreitet eine Reihe von Folgerungen Riecke's aus dem Princip der Erhaltung der Energie, (vergl. F. d. M. XII. 1880. 785), indem er darauf hinweist, dass Riecke, im Anschluss an C. Neumann, ein Princip zu Grunde legt, welches von der gewöhnlichen Auffassung des Princips der Energie abweicht.
Ok.

J. Fröhlich. Clausius' Gesetz und die Bewegung der Erde im Raume. Wiedemann Ann. (2) XII. 121-126.

Fortsetzung der früher (F. d. M. XII. 1880. 777—779) besprochenen Discussion über das Clausius'sche Elementargesetz. Der Verfasser hält seine ursprüngliche Ansicht aufrecht, dass die elektrodynamischen Wechselwirkungen von den relativen Geschwindigkeiten der Elektricitätsmengen in Bezug auf die Erde abhängig sein müssen. Ok.

E. Budde. Das Clausius'sche Gesetz und die Bewegung der Erde im Raume. II. Wiedemann Ann. (2) XII. 644-647.

Das Vorliegende ist der zweite Teil der Arbeit in Wiedemann Ann. (2) X. 553-560 (s. F. d. M. XII. 1880. 777-779). Auf Herrn J. Fröhlich's neuere Arbeit (Wiedemann Ann. XII. 121, siehe das vorstehende Referat) giebt der Verfasser eine vorläufige Erwiderung. Es erscheint Budde selbstverständlich, dass Clausius in seiner Theorie unter „absoluten Geschwindigkeiten“ nichts Anderes versteht, als „Geschwindigkeiten relativ zu dem kraftübertragenden Medium“. Wenn man mit ponderablen Elektricitäts-

trägern in Luft arbeitet, ist die Annahme nicht unbedingt auszuschliessen, dass jenes Medium relativ zur Erde eine bedeutende Geschwindigkeit besitzt. Die Correctur von Fröhlich, das fingirte Elektricitätsquantum f mit dem Zusatzfactor $\frac{1}{1-ku^2}$ zu versehen, ist richtig, aber ohne Bedeutung; denn der Factor ist constant, da u als constant vorausgesetzt wird. Budde hat nicht sagen wollen, dass die freie Ladung $-f$ im Leiter ruhe, denn sie kann auch stationär bewegt sein. Die Kirchhoff'sche Stromconstruction ist im vorliegenden Falle nicht ohne jede Abänderung beizubehalten. Daher bedarf es erst einer gründlichen Untersuchung über den gewöhnlichen stationären Strom im ruhenden galvanischen Kreise und über den Einfluss, welchen die elektrodynamischen Grundgesetze auf die theoretische Construction desselben haben, ehe man die von Fröhlich angeregten feineren Fragen mit Erfolg untersuchen kann. Rs.

P. le Cordier. Recherches sur les lois fondamentales de l'électrodynamique. C. R. XCIII. 1055-1057.

Kurzer Auszug des Verfassers aus einer Abhandlung, welche derselbe der Akademie überreicht hat. Aus demselben ist nur soviel zu entnehmen, dass er die Grundlagen des Ampère'schen Gesetzes mit möglichster Vermeidung von Hypothesen geprüft hat. Einzelheiten entziehen sich bei der Kürze und Unklarheit der Notiz vollständig der Beurteilung.

Ok.

H. Résal. Recherches sur l'électrodynamique. Résal J. (3) VII. 129-147.

Der Verfasser hat schon im Jahre 1859 einen Teil dieser Untersuchungen in einer wenig bekannten Zeitschrift veröffentlicht. Dieselben betreffen die Ableitung des Ampère'schen Grundgesetzes mit Hilfe derselben Voraussetzungen, welche Ampère selbst aufgestellt hat, und unterscheiden sich von der gewöhn-

lichen Entwickelung Ampère's nur in einigen Einzelheiten der Rechnung. Ok.

J. Delsaux. Sur quelques propriétés des solénoïdes soumis à l'action d'un courant angulaire. Brux. S. Sc. V B. 184-228.

Vom didactischen Standpunkte zeigt die Arbeit, dass man auch in den besten Lehrbüchern nicht immer genau vom Angriffspunkte der Kräfte spricht, die von Strömen auf Solenoide oder Magnete ausgeübt werden. Der Verfasser hat selbst einen solchen Fehler in einer früheren Arbeit (s. F. d. M. XII. 1880. p. 779) gemacht. Er nimmt daher die ganze Frage wieder auf und zeigt, dass, sobald es sich um unbegrenzte Ströme handelt, die Wirkung auf ein Solenoid dieselbe ist, ob man von dem Gesetz von Ampère oder von dem von Grassmann und Clausius ausgeht. Nur bei einem begrenzten nicht geschlossenen Strome würden sich Unterschiede zeigen, je nachdem das eine oder das andere Gesetz richtig wäre. Mn. (O.).

N. Umow. Ableitung der elektrodynamischen Inductionsgesetze. Wiedemann Ann. (2) XIII. 185-191.

Schon im Jahre 1871 hat Stefan (Wien. Ber. (2) LXIV.) die Grundgesetze der Induction aus dem Princip der Erhaltung der Energie abgeleitet. Der Verfasser findet in der Entwickelung desselben eine Reihe nicht genügend begründeter Schlüsse und giebt eine etwas ausführlichere Darstellung. Ok.

M. Brillouin. Intégration des équations différentielles auxquelles conduit l'étude des phénomènes d'induction, dans les circuits dérivés. Ann. d. l'Éc. Norm. (2) X. 9-49.

In der Einleitung seiner Abhandlung spricht der Verfasser [illegible] Meinung aus, dass das allgemeine Problem der Verteilung [illegible]derlicher Ströme in verzweigten Leitersystemen bisher noch

nicht behandelt worden wäre. Hierbei befindet er sich in einem Irrtum, der von einer sehr mangelhaften Kenntnis der einschlagenden Literatur zeugt. Das betreffende Problem ist wohl zuerst ganz allgemein von Helmholtz (Pogg. Ann. LXXXIII.) im Jahre 1851 gestellt und gelöst worden. Die Ausführungen des Verfassers unterscheiden sich daher im Princip, abgesehen von einigem mathematischen Beiwerk, gar nicht von der ersten Bearbeitung. Im ersten Teil der vorliegenden Abhandlung wird die Strombildung in n verschiedenen Stromkreisen besprochen, welche durch gegenseitige Induction auf einander wirken. Die Berechnung der veränderlichen Stromstärken führt auf ein System von n linearen Differentialgleichungen mit n abhängigen Veränderlichen. Die Lösungen sind sämmtlich von der Form

$$i_p = \frac{E_p}{R_p} + \sum_{q=1}^{q=n} A_q \cdot e^{\alpha_q t}.$$

Hierin ist α_q eine der n Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades. Im zweiten Teil wird das eigentliche Problem der Stromverzweigung bei beliebiger Wechselwirkung der Zweige durch Induction behandelt. Die Fundamentalgleichungen setzt der Verfasser nach den Kirchhoff'schen Sätzen an. Die Stromstärken der einzelnen Zweige lassen sich durch eine ähnliche Formel darstellen. Auch hier handelt es sich zunächst um die Lösung einer Gleichung

$$F(\alpha) = 0,$$

welche in der Form einer Determinante auftritt. Die weiteren Entwickelungen des Verfassers bezwecken hauptsächlich, die Factoren der Potenzen von α zu ermitteln. Es folgen dann Anwendungen auf eine Anzahl einfacherer Fälle von Stromverzweigung, mit besonderer Berücksichtigung des Grades der Gleichung α, speciell eine Zusammenstellung derjenigen Combinationen, bei welchen diese Gleichung vom zweiten, dritten oder vierten Grade ist.

Ok.

H. Helmholtz. Ueber die auf das Innere magnetisch oder diëlektrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte.
Berl. Monatsber. 1881. 191-213; Wiedemann Ann. (2) XIII. 385-406.

Zahlreiche Versuche neuerer Zeit (besonders von Quincke) haben den Beweis geliefert, dass in Isolatoren, auf welche elektrische Kräfte wirken, Spannungen entstehen, welche eine Dehnung senkrecht zu den elektrischen Kraftlinien hervorzubringen bestrebt sind. Diese Spannungen lassen sich ohne besondere Annahmen über die innere Constitution diëlektrischer Medien erklären, wenn man von denselben Vorstellungen über ihre Polarisirbarkeit ausgeht, wie Poisson bei seiner Theorie der magnetischen Induction, und das Gesetz von der Constanz der Energie als gültig ansieht.

Hiernach liegen der diëlektrischen Verteilung die folgenden Gleichungen zu Grunde:

$$\lambda = -\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mu = -\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \nu = -\vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

In denselben sind λ, μ, ν die diëlektrischen Momente im Punkte x, y, z nach der Richtung der drei Axen, φ das Potential der freien Elektricität. Ferner gilt für die Raumdichtigkeit $\mathfrak{e}$ der freien Elektricität die Gleichung:

$$\mathfrak{e} = -\frac{1}{4\pi} \Delta\varphi = \varepsilon - \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z},$$

und für die Flächendichtigkeit $\mathfrak{E}$ an der Grenze zweier verschiedener Medien:

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial N_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial N_2}\right\}$$
$$= e - (\lambda_1 - \lambda_2)\cos a_1 - (\mu_1 - \mu_2)\cos b_1 - (\nu_1 - \nu_2)\cos c_1.$$

Die übrigen Bezeichnungen sind leicht verständlich; ε und e bedeuten Raumdichtigkeit und Flächendichtigkeit bei nicht vorhandener Polarisation.

Um die auf das Innere der Körper wirkenden ponderomotorischen Kräfte zu bestimmen, ist der Ausdruck für die Energie [zu] bilden. Unter den verschiedenen Formen desselben zeichnet [sich] die folgende, welche der Verfasser als Normalform bezeich-

net, dadurch aus, dass ihre Variation bei Veränderung der einzelnen in Betracht kommenden Grössen mit Rücksicht auf die oben aufgestellten Gleichungen verschwindet. Der betreffende Ausdruck lautet:

$$\mathfrak{W} = \iiint \Big\{ \varphi.\varepsilon + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2\vartheta}(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - \frac{1}{8\pi}\Big[\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big)^2\Big]\Big\} dx\,dy\,dz + \int \varphi e dw.$$

Mit Benutzung der oben gegebenen Gleichungen kann man hierfür auch schreiben:

$$\mathfrak{W} = \iiint \Big\{ \varphi.\varepsilon - \frac{1 + 4\pi\vartheta}{8\pi} \Big[\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big)^2\Big]\Big\} dx.dy.dz.$$

Eine Reihe von Betrachtungen über diese Ausdrücke, ihre Bedeutung bei magnetisirbaren Medien, sowie bei Medien, welche die Elektricität leiten, wollen wir mit Hinweis auf die Originalabhandlung übergehen und uns zur Hauptfrage, der Ableitung der ponderomotorischen Kräfte auf die diëlektrischen Medien, wenden, wobei letztere nicht mehr als starr, sondern als elastisch deformirbar anzusehen sind. Bezeichnet man die Verschiebungscomponenten des Punktes x, y, z mit ξ, η, ζ, die ponderomotorischen Kräfte mit X, Y, Z, so sind dieselben aus der Gleichung:

$$\delta\mathfrak{W} + \iiint \big[X.\xi + Y.\eta + Z.\zeta\big]\, dx.dy.dz = 0$$

abzuleiten. Hierbei sind ϑ und ε als veränderlich anzusehen. Für ihre Variationen bestehen ausserdem Bedingungsgleichungen nach Art der Gleichung der Continuität. Das System der Componenten X, Y, Z lässt sich auf dieselbe Form bringen, welche man gewöhnlich den Componenten des elastischen Drucks giebt. Dann ist:

$$A_x = \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2}[\lambda^2-\mu^2-\nu^2]+\frac{\theta}{2\vartheta^2}(\lambda^2+\mu^2+\nu^2),$$
$$B_y = \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2}[-\lambda^2+\mu^2-\nu^2]+\frac{\theta}{2\vartheta^2}(\lambda^2+\mu^2+\nu^2),$$
$$C_z = \frac{1+4\pi\vartheta}{8\pi\vartheta^2}[-\lambda^2-\mu^2+\nu^2]+\frac{\theta}{2\vartheta^2}(\lambda^2+\mu^2+\nu^2);$$
$$A_y = B_x = \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2}\cdot\lambda\mu,$$
$$B_z = C_y = \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2}\cdot\mu\nu,$$
$$C_x = A_z = \frac{1+4\pi\vartheta}{4\pi\vartheta^2}\cdot\lambda\nu.$$

Zum Schluss giebt der Verfasser für die Componenten X, Y, Z noch eine andere Ausdrucksform, aus welcher hervorgeht, dass die beiden Anschauungen, nämlich diejenige, welche fernewirkende Kräfte annimmt, und die Faraday-Maxwell'sche, nach welcher überhaupt nur Polarisation der Medien existirt, neben einander bestehen können. Ok.

G. v. d. Mensbrugghe. Remarques sur les phénomènes électriques qui accompagnent les variations d'énergie potentielle du mercure. Belg. Bull. (3) II.

Weitere Folgerungen aus den thermodynamischen Principien des Verfassers. Mn. (O.).

G. Lippmann. Sur le principe de la conservation de l'électricité ou second principe des phénomènes électriques. C. R. XCII. 1049-1053.

G. Lippmann. Sur le principe de la conservation de l'électricité. C. R. XCII. 1149-1152.

Bei allen der Elektricität zugeschriebenen Erscheinungen zeigt sich, dass stets nur eine räumliche Trennung gleicher positiver und negativer Mengen stattfindet, dass aber ein Verlust der

einen oder anderen Menge nicht vorkommt. Der Verfasser nennt diese Tatsache das Princip von der Erhaltung der Elektricität. Verbindet man dasselbe mit dem Princip der Erhaltung der Energie, so kann man ähnliche Betrachtungen über elektrische Zustandsänderungen anstellen, wie in der mechanischen Wärmetheorie über calorische Erscheinungen. Der Verfasser bespricht ausführlicher eine Anwendung auf die diëlektrischen Eigenschaften der Isolatoren, besonders der Gase und leitet daraus eine contrahirende Wirkung einer elektrischen Ladung auf das sie umgebende Gas ab. Weitere Anwendungen finden sich in der ausführlichen Abhandlung, von der hier nur ein kurzer Auszug vorliegt. Ok.

G. Lippmann. Sur le choix de l'unité de force dans les mesures électriques absolues. C. R. XCII. 183-186.

Der Verfasser wirft die Frage auf, ob es zweckmässiger ist, die absoluten Einheiten auf eine Krafteinheit zu beziehen, wie bisher meist geschieht, oder auf eine Gewichtseinheit. Was speciell die in der Elektricität vorkommenden Einheiten betrifft, so sind die Einheiten des Widerstandes und der Capacität von der gewählten Krafteinheit unabhängig. Auch der Uebergang vom elektromagnetischen zum elektrostatischen System erfolgt bekanntlich durch Multiplication mit Potenzen einer Geschwindigkeit. Dagegen hängen die Einheiten des Potentials und der Stromstärke von der Krafteinheit ab. Der Verfasser schlägt daher vor, dieselben nur auf eine Gewichtseinheit zu beziehen. Ok.

E. Kowalski. Sur les systèmes coordonnés d'unités électriques. Bord. Mém. (2) IV. 417-443.

Elementare Ableitung der verschiedenen Systeme elektrischer Einheiten mit einigen Anwendungen und Beispielen. Ok.

A. Kurz. Geschichtliche Entwickelung der mathematischen Elektricitätslehre und Bedeutung des Potentials für die letztere. Hoppe Arch. LXVII. [illegible].

Reproducirende Darstellung der Grundprincipien der Elektrostatik und Elektrodynamik, sowie der Kirchhoff'schen Ableitung des Ohm'schen Gesetzes aus dem elektrostatischen Grundgesetz. Daneben finden sich einige historische Notizen, die jedoch lückenhaft und wenig eingehend sind. Neues giebt der Verfasser in keiner Beziehung, ebenso wenig Vollständiges. Wn.

L. Levy. Sur la possibilité de l'équilibre électrique. C. R. XCIII. [illegible].

Wenn einer beliebigen Zahl (n) von gegenseitig isolirten Leitern (S_1 bis S_n) die Elektricitätsmengen E_1 bis E_n mitgeteilt worden sind, so besteht eine gewisse Anordnung der freien Elektricität auf den Oberflächen der Leiter, und diese ist nur auf eine Art möglich. Die Behandlung dieses Problems führt auf ein System von n linearen Gleichungen von der Form

$$c_1 u_{n1} + c_2 u_{n2} + \cdots + c_n u_{nn} = -4\pi E_n.$$

Damit die Lösungen dieses Systems einen einzigen bestimmten Wert haben, ist es notwendig, dass die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Aus der Bedeutung der Grössen u lässt sich zeigen, dass 1) die Elemente der Diagonale u_{11} bis u_{nn} negativ sind, 2) alle übrigen Elemente positiv, 3) die Summe der Elemente einer Horizontalreihe negativ ist. Der Verfasser beweist nun den Satz, dass eine Determinante, welche diese Eigenschaften besitzt, einen Wert hat, welcher durch

$$\Delta_n = (-1)^n Q$$

ausgedrückt werden kann, wo Q eine positive Zahl bedeutet. Also verschwindet die in Frage kommende Determinante nicht,

und es ist damit bewiesen, dass das Influenzproblem nur eine Lösung zulässt. Ok.

F. G. Mehler. Zur Theorie der Verteilung der Elektricität in leitenden Körpern. Klein Ann. XVIII. 469-507.

Abdruck des Elbinger Programms 1879. (F. d. M. XI. 752-753). Ok.

F. G. Mehler. Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsverteilung. Klein Ann. XVIII. 161-194.

C. Neumann. Ueber die Mehler'schen Kugelfunctionen und deren Anwendung auf elektrostatische Probleme. Klein Ann. XVIII. 195-236.

Siehe Abschn. VII. Cap. 2. p. 399.

G. Leonhardt. Ueber die Verteilung der Elektricität auf einem durch Rotation zweier Kreisbogen um die gemeinschaftliche Sehne entstehenden Körper. Diss. Halle.

Der Verfasser benutzt eine von C. Neumann in seinen Vorlesungen gegebene Methode, nach welcher das Potential auf einem Rotationskörper berechnet werden kann, welcher durch Drehung eines Kreisbogens um seine Sehne entsteht, wenn die Dichtigkeit auf demselben gegeben ist. Bei derselben werden dipolare Coordinaten benutzt und das Potential wird durch Kegelfunctionen ausgedrückt. In ganz ähnlicher Weise lässt sich dasselbe auch in dem von dem Verfasser behandelten Fall berechnen. Die noch unbestimmten Constanten werden dann durch die Bedingung bestimmt, dass das Potential auf der Oberfläche der reciproken Entfernung von einem festen Punkte gleich sein soll und daraus die Dichtigkeit berechnet. Hiermit ist also die sogenannte

Green'sche Function bestimmt. Es folgen dann noch Vergleichungen der Summenformeln in dipolaren Coordinaten mit den entsprechenden Formeln in Polarcoordinaten. Ok.

H. ZIMMERMANN. Ueber die Verteilung der statischen Elektricität auf einem Conductor, welcher die Gestalt einer durch Rotation entstandenen Fresnel'schen Elasticitätsoberfläche hat. Diss. Göttingen.

Bekanntlich entsteht die Fresnel'sche Elasticitätsfläche durch Abbildung eines Ellipsoids nach der Methode der reciproken Radienvectoren. Nach derselben Methode, in ihrer Verwendung bei der Elektrostatik kann die Verteilung der freien Elektricität auf der einen Fläche berechnet werden, wenn das Problem der Influenz einer Masse in Bezug auf die abgebildete Fläche gelöst ist, und umgekehrt. Der Verfasser geht daher von der F. Neumann'schen Lösung des Influenzproblems für das Ellipsoid aus und leitet daraus die Dichtigkeit für die Fresnel'sche Fläche für den Fall ab, dass derselben eine gewisse Elektricitätsmenge mitgeteilt worden ist. Im zweiten Teil wird dann in ähnlicher Weise das Problem der elektrischen Verteilung für den Fall einer ausserhalb gelegenen influenzirenden Masse gelöst.

Ok.

W. URBAŃSKI. Ueber die Art der Verteilung der Elektricität auf zwei isolirten kugelförmigen Leitern. Par. Denkschr. 1881. (Polnisch).

Dn.

W. URBAŃSKI. Ueber die Art der Verteilung der Elektricität auf einem freien ellipsoidalen Leiter und über die Wirkung des letzteren auf einen äusseren Punkt. Par. Denkschr. 1881. (Polnisch).

Dn.

A. Mollo. Sopra un teorema di elettricità statica. Batt. G. XIX. 373-379.

Beweis des Satzes: „Die Resultante der Anziehung eines elektrisirten Ellipsoides auf einen äusseren Punkt steht senkrecht auf der Tangentialebene in dem angezogenen Punkt an das homofocale Ellipsoid.“ O.

W. D. Niven. On the electrical capacity of a conductor bounded by two spherical surfaces cutting at any angle. Lond., M. S., Proc. XII. 27-36.

In Maxwell's Lehrbuch ist das im Titel genannte Problem für den Fall behandelt, dass sich die beiden Kugeln unter einem Winkel schneiden, welcher gleich $\frac{\pi}{n}$ ist, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Der Verfasser sucht dasselbe auch für den Fall zu lösen, dass die oben angegebene Bedingung nicht erfüllt ist. Dazu bedient er sich auch, wie Maxwell, der Methoden der elektrischen Bilder und der Abbildung nach reciproken Radienvectoren, gelangt aber dann zur Discussion einer Functionalgleichung:

$$f(\vartheta)-f(\vartheta+2\gamma)=\tfrac{1}{2}U(\vartheta+\varkappa)^{-1}.$$

Hierfür ergiebt sich als Lösung:

$$f(\vartheta)=\tfrac{1}{4}\frac{U}{\gamma}\int_0^1\frac{t^{\frac{\vartheta+\varkappa}{2\gamma}-1}}{1-t}\,dt.$$

Mit Hülfe dieses Ausdrucks lassen sich die auf dem Conductor befindlichen Elektricitätsmengen berechnen, wenn das Potential den constanten Wert U hat. Es folgen dann Anwendungen auf eine Reihe bemerkenswerter Fälle, indem der Conductor durch specielle Annahmen in eine volle Kugelschale, in zwei einander berührende Kugeln, in ein Stück einer Kugelschale u. s. w. übergeführt werden kann. Ok.

N. M. Ferrers. On the distribution of electricity on a bowl. Quart. J. XVIII. 97-109.

W. Thomson hat schon vor längerer Zeit das Problem gelöst, die Dichtigkeit der freien Elektricität auf einer Kugelcalotte anzugeben. Der Verfasser behandelt dieselbe Aufgabe in der folgenden Weise. Es wird zunächst eine Reihe entwickelt, welche für einen Punkt der belegten Calotte mit Thomson's Ausdrucke übereinstimmt, für den Rest der Kugelfläche aber verschwindet. Die Reihe schreitet nach Kugelfunctionen fort. Aus derselben wird der Ausdruck für das Potential der freien Elektricität entnommen. Die für dasselbe sich ergebenden Reihen lassen sich in einfache Ausdrücke von geschlossener Form umändern. Auf diese Weise wird das Problem vollständig und in der gewöhnlich üblichen Weise (durch Berechnung des Potentials der freien Elektricität) gelöst. Ok.

H. R. Hertz. Ueber die Verteilung der Elektricität auf der Oberfläche belegter Leiter. Wiedemann Ann. (2) XIII. 266-276.

Werden isolirte geladene Leiter gegen einander bewegt, so verändern sich die elektrischen Belegungen derselben, welche unter der Einwirkung der gegenseitigen Influenz hervorgebracht werden. Während der Bewegung müssen dieselben andere Werte haben, als wenn man die Leiter in einem bestimmten Augenblick im Ruhezustand annimmt. Der Verfasser berechnet die Veränderungen, welche in der Verteilung durch die Bewegung hervorgebracht werden, auf Grund der bekannten Fundamentalsätze der Potentialtheorie. Er zeigt, dass man das Potential der freien Elektricität in eine Reihe nach Potenzen des specifischen Widerstandes k entwickeln kann, wobei das erste Reihenglied dem Ruhezustande entspricht, die höheren Glieder aber aus dem ersten, resp. den vorhergehenden abgeleitet werden können. Die Theorie wird auf einen Rotationskörper angewandt, welcher um seine Axe unter der Einwirkung von Scheidungskräften rotirt. Einen experimentell bemerkbaren Einfluss kann die Bewegung nur aus-

üben, wenn die Leitungsfähigkeit sehr klein ist, wie z. B. bei gewissen Glassorten. Ok.

E. Riecke. Ueber die von einer Influenzmaschine zweiter Art gelieferte Elektricitätsmenge und ihre Abhängigkeit von der Feuchtigkeit. Gött. N. 1881. 22-41.

Die vorliegende Arbeit ist ausschliesslich experimentell. Der von der Influenzmaschine gelieferte Strom wird durch eine Tangentenbussole geleitet und die Ablenkung unter verschiedenen Umständen (bei verschiedener Umdrehungszahl, bei wechselnder Feuchtigkeit und Temperatur der Luft) gemessen. Die gelieferte Elektricitätsmenge ist von dem Wassergehalt der Luft abhängig und nimmt mit demselben ab. Ok.

H. Herwig. Ueber die Veränderlichkeit der Capacität von Condensatoren mit starrem Isolator. Wiedemann Ann. (2) XIII. 164-184.

Der Verfasser hat experimentell die Ladungsströme untersucht, welche in den ersten Augenblicken nach Verbindung einer constanten Kette mit einem Condensator entstehen. Die Leitung wurde dabei durch einen besonderen Apparat geschlossen und nach einem beliebig zu regulirenden Zeitintervall wieder geöffnet. Man kann aus diesen Versuchen die Capacität des Condensators berechnen. Dieselbe ergab sich als abhängig von der Dauer des Ladungsstromes und zwar in der Weise, dass sie mit wachsender Dauer abnahm, ein Minimum erreichte und dann wieder erheblich zunahm. Der Verfasser sucht dieses Resultat durch die Annahme zu erklären, dass die Capacität eines Condensators eine, übrigens ziemlich complicirte Function der Zeit ist, indem er dabei von der Vorstellung ausgeht, dass sich der Drehung der Molecüle der isolirenden Schicht unter dem Einfluss der elektrischen Kräfte Reibungshindernisse entgegensetzen.

Ok.

W. M. Hicks. On functional images in ellipses.
Quart. J. XVII. 327-352.

Da die singulären Punkte für die Eigenschaften der Functionen bestimmend sind, so hält es der Verfasser für besonders wichtig für hydrodynamische, elektrische und ähnliche Probleme die Bilder singulärer Punkte in Bezug auf verschiedene Flächen zu berechnen. Dieser Grundgedanke wird hier für den Fall durchgeführt, dass die Functionen nur von zwei Variabeln abhängen, und dass die Fläche aus einem unendlich langen elliptischen Cylinder, resp. einer Ellipse besteht. Es wird zu dem Zweck der Logarithmus der Entfernung zweier Punkte durch eine Reihe ausgedrückt, welche von den elliptischen Coordinaten der beiden Punkte abhängt. Hiervon werden verschiedene Anwendungen gemacht.

Ok.

A. G. Greenhill. Solutions by means of elliptic functions of some problems in the conduction of electricity and of heat in plane figures. Quart. J. XVII. 284-292.

Man denke sich eine Ebene durch zwei Schaaren von Parallelen der x- und y-Axe in Rechtecke geteilt und in den Ecken derselben, in verschiedenen Anordnungen abwechselnd teils positive, teils negative punktförmige Elektroden von gleicher Stärke 2π angebracht. So mögen z. B. alle Punkte, deren Coordinaten $2ma$ und $2nb$ sind, positive Elektroden, dagegen die Punkte $2ma$ $(2n+1)b$ negative Elektroden haben. Bezeichnet man mit φ das Potential, mit ψ die Strömungsfunction, so ist für eine Elektrode:

$$\varphi + i\psi = \log(x+iy-a-ib).$$

Für das eben erwähnte System ist dann:

$$\varphi_1 + i\psi_1 = \log \prod_{m=-\infty}^{m=+\infty} \prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{x+iy-2ma-2nib}{x+iy-2ma-(2n+1)ib}$$
$$= \log sn(\xi + i\eta),$$

wo

$$\xi = K\frac{x}{a}, \quad \eta = K'\frac{y}{b}$$

gesetzt wird.

Mit Benutzung bekannter Lehrsätze über die elliptischen Functionen können φ_1 und ψ_1 einzeln angegeben werden. Der Verfasser transformirt in ähnlicher Weise die Ausdrücke für drei andere Anordnungen von Elektroden.

Mit Hilfe der auf diese Weise gewonnenen Potential- und Strömungsfunctionen lässt sich eine Anzahl bemerkenswerter Probleme lösen, z. B. die Temperaturverteilung in einer rechteckigen dünnen Platte, deren Kanten auf constanten Temperaturen erhalten werden, die Strömung der Elektricität in einem gleichseitigen Dreieck, von dem zwei Ecken Elektroden sind, u. s. w.

In ähnlicher Weise transformirt der Verfasser die Functionen, welche einer Anzahl von Elektroden entsprechen, die symmetrisch auf einem Kreis angebracht sind. Auch hier wie in den vorhin erwähnten Problemen lassen sich die Lösungen durch elliptische Functionen ausdrücken. Ok.

C. Niven. On the induction of electric currents in infinite plates and spherical shells. Lond., Phil. Trans. CLXXII. 307-353.

Der Verfasser bezieht sich auf eine Arbeit von Clerk Maxwell in den Proc. der Royal Society XX. (1872), in der derselbe eine Untersuchung über die Induction von Strömen in einer unendlichen Platte von gleichförmiger Leitungsfähigkeit giebt, und auf Arbeiten von Felici (Tortolini Ann. 1853-1854) und Jochmann (Crelle 1862. Pogg. Ann. 1864). Er bemerkt, dass Helmholtz in einer Abhandlung über die Bewegungsgleichungen der Elektricität (Borchardt J. LXXII. u. LXXVIII., siehe F. d. M. II. 1870. p. 800; VI. 1874. p. 681) eine Analyse der Bedingungen gegeben hat, welche in einem Problem, das die Bewegung von Elektricität betrachtet, erfüllt werden müssen; dass er sich aber nicht mit einem speciellen Fall des Problems von inducirten Strömen beschäftigt hat, weshalb Maxwell's Arbeit die einzige ist, in welcher die vollständige Lösung eines Inductionsproblems veröffentlicht ist. Der Verfasser adoptirt Maxwell's Theorie und erläutert den Unterschied derselben von der der

deutschen Schriftsteller. Er stellt dann auf Grundlage dieser Theorie die allgemeinen Bewegungsgleichungen auf und wendet sie an auf den Fall einer unendlichen Platte von endlicher Dicke, einer unendlich dünnen Platte, u. s. w. Cly. (O.).

W. D. NIVEN. On the potential due to an electric current in an elliptic circuit. Mess. (2) X. 136-141.

Der Verfasser stellt den Ausdruck für das Potential eines elliptischen Stromes in einer Form auf, welche die vollständigen elliptischen Integrale erster und dritter Gattung enthält. Der Vorteil dieser Form besteht darin, dass sie für alle Punkte ausserhalb des Stromes gilt. Er untersucht sodann verschiedene Entwickelungen, welche nahe dem Anfangspunkt und in mehr vom Anfangspunkt entfernten Gegenden Geltung haben und sich für numerische Rechnungen empfehlen. Glr. (O.).

O. ZIMMERMANN. Das logarithmische Potential einer gleichseitig dreieckigen Platte. Diss. Jena.

Siehe Abschn. X. Cap. 5. p. 729.

H. F. WEBER. Beziehungen zwischen Wärmeleitung und elektrischem Leitungsvermögen. Carl Rep. XVII. 124-143.

Abdruck aus Berl. Monatsber. 1880. 457-478 etc., siehe F. d. M. XII. 1880. p. 793-794. O.

G. GUGLIELMO. Sull' uso dell' elettrometro nello studio compiuto delle coppie voltaiche. Torino, Atti XVI. 337-346.

Experimentaluntersuchung der elektromotorischen Kraft und des inneren Widerstandes einiger galvanischer Ketten mit Hülfe des Elektrometers, wobei einige einfache Rechnungen über Stromverzweigung benutzt werden. Ok.

E. Bernardi. Le sperienze del Rijke sulle extra correnti. Ven. Ist. Att. (5) VII. 151-189.

Im Jahre 1857 hatte Rijke die Behauptung (Pogg. Ann. CII.) ausgesprochen, dass der Schliessungsextrastrom grösser ist als der Oeffnungsstrom. Die vorliegende Abhandlung ist der Widerlegung dieser Behauptung gewidmet. Die vorkommenden Berechnungen beziehen sich auf den Verlauf von Inductionsströmen in verzweigten Leitersystemen und auf ihre Wirkung auf Galvanometer und Elektrodynamometer. Ok.

H. Helmholtz. Ueber galvanische Polarisation des Quecksilbers und darauf bezügliche neue Versuche des Herrn Arthur König. Berl. Monatsber. 1881. 945-958.

Nach einer von Helmholtz angegebenen Methode wurde die Oberflächenspannung von Quecksilber durch A. König untersucht, während dasselbe in verschiedenen Flüssigkeiten sich befand und auf verschiedene Werte eines galvanischen Potentials gebracht worden war. In den meisten Fällen zeigte die Oberflächenspannung für ein bestimmtes Potential einen Maximalwert. An diese Versuche knüpft Helmholtz einige theoretische Bemerkungen. Geht ein galvanischer Strom aus einem Metall in die zersetzbare Flüssigkeit, so findet an dieser Stelle ein Sprung des galvanischen Potentials statt, welchen man durch Anhäufung einer elektrischen Doppelschicht an dieser Stelle erklären kann. Zur Veränderung derselben ist eine gewisse Arbeit dW erforderlich. Dieselbe besteht aus der Arbeit der Capillarspannungen, welche bei Veränderung der Grenzfläche in Betracht kommen, und aus der Arbeit, welche bei Vermehrung der Elektricitätsmengen verbraucht wird. Es ist daher:

$$dW = [T + \varepsilon(p_m - p_f - k_m + k_f)]\,d\omega + \omega[p_m - p_f - k_m + k_f]\,d\varepsilon.$$

Hierin bedeuten T die Kraft, mit welcher die Spannung auf jede Längeneinheit der Begrenzung wirkt, ferner ω die Grösse der Berührungsfläche, ε die elektrische Dichtigkeit der Doppelschicht, p_m und p_f die Werte des elektrischen Potentials im Metall und

in der Flüssigkeit. W kann als Function von ω und ε angesehen werden; dann ist, wenn dW ein vollständiges Differential ist:

$$\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = 0,$$

wo $P = p_m - p_f$ gesetzt ist, oder schliesslich

$$\frac{\partial T}{\partial P} = -\varepsilon.$$

Hieraus folgt, dass ε für einen gewissen Grenzwert von T gleich 0 sein muss. Diese Beziehung giebt Veranlassung zu einer Reihe von Folgerungen von mehr physikalischem Interesse.

Ok.

E. Reynier. Sur le rendement des piles secondaires.
C. R. XCII. 1093-1096.

Der Verfasser berechnet die bei der Ladung eines Accumulators verbrauchte und die bei der Entladung gewonnene Arbeit. Letztere denkt er sich auf Erwärmung (elektrisches Licht) verwendet. Das Verhältnis beider Grössen findet er gleich dem Verhältnis $\frac{E_1}{E_0}$, wo E_0 die elektromotorische Kraft der ladenden Kette, E_1 der Potentialunterschied an den Enden des erwärmten Leiters bei der Entladung ist. Dass derselbe hierbei die im Ladungs- und Entladungsstrome fliessenden Gesammtelektricitätsmengen gleich setzt, ist jedenfalls nicht allgemein richtig und daher die ganze Entwickelung nicht ohne Bedenken.

Ok.

A. Guébhard. Sur quelques cas nouveaux de figures équipotentielles, réalisées électro-chimiquement.
C. R. XCIII. 403-406.

In den F. d. M. XII. 1880. 796 ist die experimentelle Methode des Verfassers beschrieben worden. Gegen die Behauptung des-*n, dass die auf den Metallplatten erzeugten isochromatischen

Curven einfach identisch sind mit den Curven gleichen Potentials, welche entstehen würden, wenn man der Metallplatte direct (ohne dazwischen liegende Flüssigkeit) Elektricität zu-, resp. abführt, ist inzwischen von verschiedenen Seiten protestirt worden. Der Verfasser wendet sich zunächst gegen H. Meyer (Inauguraldissertation: Ueber stationäre Strömung in leitenden Flüssigkeiten). Seine Entgegnung besteht aber nur in der Mitteilung einiger neuer und merkwürdiger Curvensysteme, welche er experimentell hervorgebracht hat. Weitere Gründe für die in Frage stehende Uebereinstimmung der beiden Curvensysteme konnte Referent in der vorstehenden Mitteilung nicht finden.

Ok.

Olearski. Ueber elektrische Oscillationen. Krak. Denkschr. 1881. (Polnisch).

Dn.

D. J. Korteweg und V. A. Julius. Ueber das Grössenverhältnis der elektrischen Ausdehnung bei Glas und Kautschuk. Wien. Ber. LXXXIII. 29-36, Wiedemann Ann. (2) XII. 647-654.

Die Volumenänderung bei zweckmässig präparirten weissen vulcanisirten Kautschukröhren wurde proportional dem Quadrate der Schlagweite und umgekehrt proportional dem Quadrate der Wanddicke gefunden. Sie war dieselbe, mochte man die innere Belegung positiv oder negativ laden. Die Elasticitätscoefficienten wurden gleichfalls bestimmt. Hinzugefügt sind die von Quincke erhaltenen Werte beider Grössen für Flintglas (aus Wiedemann Ann. (2) X. 197 und 514). Es zeigt sich, dass die Volumenänderungen bei Glas und Kautschuk ungefähr im umgekehrten Verhältnis der Elasticitätscoefficienten stehen. Dieses Resultat entspricht der von Korteweg gegebenen Theorie (Wiedemann Ann. (2) IX. 48-61, s. F. d. M. 1880. XII. 788-789), welcher die Annahme zu Grunde lag, dass bei der elektrischen Ausdehnung keine

anderen, als die längst bekannten elektrischen und elastischen Kräfte auftreten. Rs.

O. Frölich. Versuche mit dynamo-elektrischen Maschinen und elektrischer Kraftübertragung und theoretische Folgerungen aus denselben. Elektrot. Z. II. 134-141, 170-175.

Bei dem Betrieb einer dynamoëlektrischen Maschine kann man zwei Perioden unterscheiden: die Zeit des Angehens, während welcher der ursprünglich schwache Magnetismus der Elektromagnete bis zu seiner grössten Stärke anwächst, und den darauffolgenden Zustand des dynamoëlektrischen Gleichgewichts, bei welchem Magnetismus und Stromstärke gewisse den in Betracht kommenden Umständen entsprechende Grenzwerte angenommen haben. Für den letzten Fall gilt die Gleichung

$$i = \frac{nMv}{w}.$$

In derselben bedeuten i die Stromstärke, v die Tourenzahl, w den Gesammtwiderstand und M den „wirksamen Magnetismus“. Letzterer ist als Function der Stromstärke anzusehen und kann zunächst durch die Formel

$$M = \frac{i}{a+bi}$$

ausgedrückt werden. Die späteren Versuche zeigen aber, dass hieran wegen der Wirkung der Ströme in den Ankerdrähten noch eine Correction anzubringen ist. Wird durch eine Maschine eine zweite getrieben, von der hier gleiche Construction vorausgesetzt wird, so wird die Umdrehung der letzteren kleiner sein, als diejenigen der ersteren. Unterscheidet man die auf die Maschinen bezüglichen Grössen durch die Indices (1) und (2), so gelten für die Kraftübertragung die folgenden Gleichungen:

$$E_1 = nMv_1, \quad E_2 = nMv_2, \quad i = \frac{E_1 - E_2}{w} = M\frac{v_1 - v_2}{w},$$

$$A_1 = cE_1 i, \quad A_2 = cE_2 i, \quad A_1 - A_2 = cwi^2,$$

$$N = \frac{A_2}{A_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{E_2}{E_1}.$$

Zum Verständnis der Gleichungen ist noch nachzutragen, dass E die elektromotorischen Kräfte, A_1 und A_2 die aufzuwendende und die übertragene Arbeit und N den Nutzeffect bedeuten. Diese Formeln stimmen nicht genau mit den Beobachtungen überein. Die Ursache hiervon liegt hauptsächlich darin, dass die wirksamen Magnetismen der beiden Maschinen zu setzen sind:

$$M_1 = M(1-\eta v_1), \quad M_2 = M(1+\eta v_2).$$

Das hieraus sich ergebende etwas complicirtere Gleichungssystem entspricht den Ergebnissen der angestellten Versuche vollständig.

Ok.

M. Lévy. Sur le rendement et la limite de l'opération du transport de la force par l'électricité. C. R. XCIII. 709-711.

M. Lévy. Application numérique de la théorie du rendement maximum de deux machines dynamo-électriques employées au transport de la force. C. R. XCIII. 842-845.

Bezeichnet man mit T_m die zur Bewegung der treibenden Maschine aufgewandte Arbeit, mit T_u die durch die getriebene Maschine gewonnene Arbeit, so ist, wenn die elektromotorischen Kräfte der Maschinen E und E' sind, und die Stromstärke J:

$$T_m = EJ, \quad T_u = E'J.$$

Ferner ist nach dem Ohm'schen Gesetz, wenn S den Gesammtwiderstand des Stromkreises bedeutet:

$$SJ = (E-E').$$

Diese Gleichungen geben

$$J = \frac{E-\sqrt{E^2-4ST_u}}{2S}, \quad E' = \frac{E+\sqrt{E^2-4ST_u}}{2},$$

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{E'}{E} = \frac{1+\sqrt{1-\frac{4ST_u}{E^2}}}{2}.$$

Damit J einen reellen Wert behält, muss

$$S < \frac{E^2}{4T_u}$$

sein. Die primäre elektromotorische Kraft E kann nicht über eine gewisse Grenze (E_0) gesteigert werden, da sonst die Isolation der Leitungen leidet. Der Gesammtwiderstand S kann also nicht grösser genommen werden, als $\frac{E_0^2}{4T_u}$. Sind die beiden Maschinen Dynamo-Maschinen, so kann man setzen

$$E = \varphi(J).n_0\sqrt{a_0 b_0},\quad E' = \psi(J).n'_0\sqrt{a'_0 b'_0}.$$

Hier sind n_0 und n'_0 die Umdrehungszahlen der beiden Maschinen, a_0, b_0 etc. die Widerstände der Umwindungen der Eisenkerne und Ringe in den beiden Maschinen, $\varphi(J)$ und $\psi(J)$ Functionen der Stromstärke, welche für schwache Ströme proportional mit J sind. Ist endlich der äussere Widerstand der Leitung R, so ist

$$S = a_0 + b_0 + a'_0 + b'_0 + R.$$

Mit Hülfe der aufgestellten Gleichungen kann man die Grössen J, E', n_0, n'_0 und endlich $\frac{T_u}{T_m}$, das Verhältnis der gewonnenen zur aufgewandten Arbeit, berechnen.

In der zweiten Notiz werden diese Rechnungen auf ein Zahlenbeispiel angewandt, welches auf einer Reihe numerischer Angaben von M. Deprez beruht. Ok.

W. Thomson. Sur les résistances relatives que l'on doit donner, dans les machines dynamo-électriques, aux bobines actives, aux électro-aimants inducteurs et au circuit intérieur. C. R. XCIII. 474-479.

Für eine gewöhnliche Maschine (mit unverzweigtem Schliessungskreis) findet der Verfasser für das Verhältnis (r) der nutzbaren Arbeit zu der in Wärme verwandelten, also verlorenen Arbeit den folgenden Ausdruck:

$$r = \frac{J\sqrt{RR'}.v}{(R+R')KK'}.$$

Hier bezeichnen v die Rotationsgeschwindigkeit der Maschine, R und R' die Widerstände des Elektromagneten und der inducirten Spirale; K und K' sind Constanten, während J von dem

Magnetismus des Elektromagneten abhängt. Setzt man fest, dass $R+R' = S$ einen constanten Wert hat, so erreicht das Verhältnis $\frac{r}{v}$ ein Maximum, wenn $R = R'$ ist. Hierbei wurde auch J constant angenommen. Ist dies nicht der Fall, so ist R' etwas grösser als R zu nehmen.

Bezeichnet man mit E den Widerstand des äusseren Stromkreises, so ergiebt sich angenähert, wenn das oben definirte Verhältnis r etwas grösser als die Einheit ist,

$$E = \sqrt{RR'}, \quad r = 1+2\sqrt{e},$$

wo

$$e = \sqrt{\frac{R'}{R}}.$$

Diese Betrachtungen beziehen sich auch auf Maschinen mit abgeleitetem Kreise. Ok.

M. Deprez. Sur un mode de représentation graphique des phénomènes mis en jeu dans les machines dynamo-électriques. C. R. XCII. 1152-1155.

M. Deprez. Distribution de l'énergie par l'électricité. C. R. XCIII. 892-895, 952-955.

Zur Berechnung der Stromstärke einer dynamo-elektrischen Maschine unter den verschiedensten Umständen hat der Verfasser das folgende Verfahren ersonnen. Man leite einen constanten Strom durch die inducirenden Magnete und bestimme den Potentialunterschied des Inductionsstromes bei bestimmter Rotationsgeschwindigkeit und nach Unterbrechung der Verbindung des Inductionskreises und der Windungen der Elektromagnete. Die für verschiedene Stromstärken gemessene Potentialdifferenz kann in Form einer Curve aufgetragen werden, bei welcher die Intensitäten Abscissen, die Ordinaten Potentialunterschiede sind. Verfasser bezeichnet dieselbe als charakteristische Curve. Wird dann nach der Gleichung des Ohm'schen Gesetzes $\frac{J}{E} = \frac{\omega}{R}$ gesetzt, wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Maschine, R der

Widerstand ist, so erhält man für ein gegebenes ω und R die zusammengehörenden Werte, indem man durch den Anfangspunkt eine Gerade zieht, welche mit der Abscissenaxe einen Winkel bildet, dessen Tangente gleich $\frac{\omega}{R}$ ist. Der Schnittpunkt derselben mit der charakteristischen Curve giebt die hierzu gehörenden Werte von J und E. Weitere Anwendungen, welche der Verfasser hiervon macht, haben nur ein technisches Interesse.

Ok.

J. Joubert. Études sur les machines magnéto-électriques. Ann. de l'Ec. Norm. (2) X. 131-174.

Die Untersuchung betrifft eine Wechselstrom-Maschine von Siemens und ist wesentlich experimentell. Es zeigt sich dabei, dass sowohl die elektromotorischen Kräfte, als auch die Stromstärken durch Sinusfunctionen der Zeit dargestellt werden können. Die Abhängigkeit der Stromstärke von der elektromotorischen Kraft, dem Widerstand etc. lässt sich in diesem Fall leicht theoretisch verfolgen. Bei der Aufstellung der Gleichung des Ohm'schen Gesetzes ist dabei auf die Selbstinduction des Kreises Rücksicht zu nehmen. Bezeichnet man mit U das Inductionspotential des Kreises auf sich selbst, durch R den Leitungswiderstand, so ist, wenn die periodische elektromotorische Kraft

$$E = E_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad i = \frac{E_0}{\left(R^2 + \frac{4\pi^2 U^2}{T^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \varphi\right),$$

$$\operatorname{tg} 2\pi\varphi = \frac{2\pi U}{TR}.$$

Diese Ausdrücke stimmen mit den Versuchen überein.

Ok.

F. Neumann. Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus. Leipzig. Teubner. 1881.

Diese im Sommersemester 1857 in Königsberg gehaltene Vorlesung ist nach den Heften von Lothar Meyer und O. E. Meyer

durch C. Neumann herausgegeben worden. Sie enthält in klarer und eleganter mathematischer Ausführung die wesentlichsten Probleme des Magnetismus, besonders die Theorie der magnetischen Induction unter dem Einfluss constanter und veränderlicher magnetisirender Kräfte. Für den letzteren Fall wird nach Poisson angenommen, dass die Veränderungen der magnetischen Zustände eine, wenn auch nur kurze Zeit beanspruchen. Die allgemeine Theorie wird auf die Kugel und das Ellipsoid angewandt. Zum Schluss wird gezeigt, dass allgemein das Problem der magnetischen Induction auf die Bestimmung einer gewissen Function führt, der charakteristischen Function, welche bei der magnetischen Induction dieselbe Rolle spielt, wie die Green'sche Function bei dem analogen elektrischen Problem. Ok.

E. Warburg. Magnetische Untersuchungen. I. Ueber einige Wirkungen der Coërcitivkraft. Wiedemann Ann. (2) XIII. 141-164.

Wird ein Eisenstab magnetisirt und gleichzeitig magnetisirende Kraft und magnetisches Moment desselben gemessen, so ist letzteres nicht allein eine Function der Kraft, sondern auch abhängig von den vorangegangenen magnetischen Zuständen. Folgen grössere auf kleinere Kräfte, so sind die entsprechenden magnetischen Momente kleiner als in dem umgekehrten Fall. Lässt man in dieser Weise einen Eisenstab eine continuirliche Folge von Veränderungen durchlaufen, indem man ihn anfänglich schwachen, dann immer stärkeren Kräften aussetzt und darauf wieder abnehmende Kräfte folgen lässt und zeichnet die Curven der entsprechenden magnetischen Momente als Functionen der Kräfte, so umschliesst die Curve der auf- und absteigenden Kräfte einen Flächenraum.

An diese Erscheinung, welche der Verfasser eingehend experimentell untersucht hat, hat derselbe eine Reihe interessanter theoretischer Betrachtungen geknüpft.

Zunächst lässt sich beweisen, dass der erwähnte Flächenraum ein Mass für die bei dem Magnetisiren geleistete Arbeit

ist. Es ist dies ein specieller Fall des folgenden allgemeinen Satzes: „Wirken auf eine Eisenmasse Kräfte, deren Componenten X, Y, Z sind, sind die magnetischen Momente der Eisenmasse m_x, m_y, m_z, so ist die bei einer continuirlichen Veränderung der Kraft geleistete Arbeit

$$A = -\int (m_x dX + m_y dY + m_z dZ).\text{“}$$

Diese Arbeit wird bei dem oben beschriebenenen Kreisprocess in Wärme verwandelt. Daraus lässt sich die Temperaturerhöhung berechnen, welche die Eisenmasse in Folge dessen erfahren müsste.

Ferner wird die beschriebene Erscheinung benutzt, um die Tatsache zu erklären, dass eine Magnetnadel, welche über einer Eisenscheibe schwingt, eine viel grössere Dämpfung erfährt, als bei der schlechten Leitungsfähigkeit der Scheibe zu erwarten ist. Diese Erscheinung wurde bisher durch die Annahme erklärt, dass die Entstehung des Magnetismus eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt. Jedenfalls wirkt aber auch die Coercitivkraft in der beschriebenen Weise mit. Ok.

F. Himstedt. Ueber die Dämpfung schwingender Magnete durch Eisenplatten. Wiedemann Ann. (2) XIV. 483-510.

In dieser Abhandlung wird die von Warburg (s. das obige Referat) gegebene Erklärung der Dämpfung von Eisenplatten durch Versuche geprüft. Der Verfasser giebt zunächst Schwingungsversuche, bei denen das logarithmische Decrement gemessen wird. Dasselbe ist (entgegengesetzt der Dämpfung durch Inductionsströme) unabhängig von der Schwingungsdauer. Sodann folgen statische Versuche, bei welchen die Gleichgewichtslagen des Magnetstabes über einer Eisenplatte beobachtet werden, wenn derselbe durch Verstellen des Torsionskreises abgelenkt wird. Die Ablenkungen fallen verschieden aus, wenn man von kleineren zu grösseren Winkeln oder umgekehrt übergeht. Aus diesen Versuchen lässt sich mit Hülfe einfacher Rechnungen nachweisen, dass die Coercitivkraft hinreicht, den grösseren Teil der Dämpfung von Eisenplatten zu bewirken. Ok.

A. WASSMUTH. Ueber die Magnetisirbarkeit des Eisens bei hohen Temperaturen. Wien. Ber. LXXXIII. 332-345.

Der Verfasser hat in einer Experimentaluntersuchung gefunden, dass der temporäre Magnetismus zunächst mit der Temperaturerhöhung wächst, bei grösserer Erhöhung aber abnimmt. Diese Erscheinung erklärt derselbe durch die Annahme, dass durch Temperaturerhöhung die Coercitivkraft verringert, gleichzeitig aber auch die magnetischen Momente der einzelnen Molecularmagnete verkleinert werden. Hieraus leitet der Verfasser durch einfache Rechnung eine Formel für die temporären Momente als Functionen von Kraft und Temperatur ab, welche mit seinen Versuchen übereinstimmen.

Ok.

F. AUERBACH. Magnetische Untersuchungen. I. Ueber den temporären Magnetismus. Wiedemann Ann. (2) XI. 353-394. II. Ueber die magnetische Nachwirkung. Wiedemann Ann. (2) XIV. 308-331.

Die erste Abhandlung enthält ausser einer allgemeinen Einleitung in die Lehre von der Induction von Magnetismus in Eisen und anderen magnetischen Metallen die Mitteilung von Versuchen über die magnetischen Momente von Metallpulvern. In der zweiten Abhandlung wird auf Grund von Versuchen die Erscheinung besprochen, dass der magnetische Zustand einer Eisenmasse nicht allein von den augenblicklich wirkenden Kräften abhängt, sondern auch von den Kräften, welche zuvor gewirkt haben. Diese Tatsache bezeichnet der Verfasser als magnetische Nachwirkung. Die Erklärung derselben aus der Theorie drehbarer Molecularmagnete wird für eine weitere Abhandlung vorbehalten.

Ok.

E. RIECKE. Beiträge zur Lehre vom inducirten Magnetismus. Wiedemann Ann. (2) XIII. 465-506.

Der Verfasser giebt zunächst einen oder eigentlich zwei Wege an, um die magnetische Verteilung in einer Eisenmasse unter dem Einfluss äusserer Kräfte zu berechnen. Dieselben beruhen auf dem zuerst von Beer bei elektrischen Problemen benutzten Princip der Superposition der Verteilungen. Es wird dabei zuerst die Oberflächenbelegung berechnet, welche der magnetischen Verteilung entspricht, welche ohne Rücksicht auf die Wechselwirkung der erregten Magnetismen eintreten würde. Dann wird die weitere Verteilung durch die erste Oberflächenbelegung berechnet, u. s. f. Hierbei denkt sich der Verfasser den Eisenkörper in Einzelfasern zerlegt, welche von Kraftlinien begrenzt sind. Man kann dann noch in zwei verschiedenen Weisen das Problem behandeln, wenn man sich die Fasern wieder in Elemente zerlegt denkt, bei welchen entweder die Längsdimension gross ist gegen den Querschnitt, oder umgekehrt.

In beiden Fällen erhält man für das inducirte Potential Reihen, von denen wenigstens die nach der zweiten Methode gewonnene stets convergent ist. Die allgemeine Entwickelung wird dann auf die Verteilung des Magnetismus in einem Ellipsoid und in einem Cylinder bei constanten Kräften angewandt. Der folgende Abschnitt enthält eine Discussion früherer Versuche des Verfassers. Zum Schluss wird das System derjenigen galvanischen Ströme berechnet, welche die Wirkung der inducirten Eisenmasse nach aussen ersetzen können. Hiervon wird dann noch eine Anwendung auf den Erdmagnetismus gemacht.

Ok.

E. Bouty. Équations fondamentales du magnétisme induit. Almeida J. 1881. 284-294.

A. G. Greenhill. Sur le magnétisme induit d'un ellipsoïde creux. Almeida J. 1881. 294-303.

W. Siemens. Beiträge zur Theorie des Elektromagnetismus. Berl. Monatsber. 1881. 679-719; Wiedemann Ann. (2) XIV. 635-656.

Obgleich in der vorliegenden Abhandlung, abgesehen von einer kurzen Rechnung, keine mathematischen Ausführungen vorkommen, so kann dieselbe dennoch der Beachtung der Mathematiker dringend empfohlen werden. Zunächst sind in derselben Versuche beschrieben, welche dartun, dass eine magnetische Verteilung in einer Eisenmasse durch parallele Kräfte einer bestimmten Richtung geschwächt wird, wenn neue Kräfte senkrecht zu der ersten Richtung wirken. Diese Versuche sprechen entscheidend für die Annahme drehbarer Molecularmagnete. Der Verfasser führt dann weiter aus, dass auch diese Theorie einer Modification bedarf. Nach seiner Auffassung besteht jedes Eisenmolecül aus einem Paar von kleinen Magneten, welche im unmagnetischen Zustand nach Art astatischer Nadeln zusammenhängen. Die Magnetisirung bewirkt dann eine Drehung derselben in entgegengesetztem Sinne. Diese Anschauung dürfte in der Tat geeignet sein, manche noch dunkle Punkte in der Theorie der Magnetisirung aufzulösen. Die weiteren Versuche zu ihrer Unterstützung müssen wir hier übergehen. Ok.

E. Riecke. Ueber die Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem homogenen magnetischen Felde und das negative elektrische Glimmlicht. Wiedemann Ann. (2) XII. 191-194; Gött. N. 1881. 17-22.

Der Verfasser geht von der Wirkung aus, welche ein Magnetpol auf ein Stromelement ausübt und überträgt dieselbe auf die Wirkung eines Elektricitätsteilchens, welches mit einer Geschwindigkeit sich bewegt, deren Componenten den Stromcomponenten proportional sind. Kann sich die elektrische Menge e, welche mit einer schweren Masse ε fest verbunden sei, frei bewegen, so gelten für dasselbe die Differentialgleichungen

$$\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\sqrt{2}}{c} e \left\{ \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dz}{dt} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dy}{dt} \right\},$$

u. s. w.; (die beiden anderen Gleichungen kann man leicht durch cyklische Vertauschung erhalten). Hier bedeutet P das Potential der magnetischen Massen. Ist das Kraftfeld homogen:

$$P = -Ax - By - Cz,$$

so lassen sich die Bewegungsgleichungen leicht lösen. Die Bahncurve ist eine Schraubenlinie, deren Axe mit der Richtung der Kraftlinien zusammenfällt. Ok.

L. Boltzmann. Entwickelung einiger zur Bestimmung der Diamagnetisirungszahl nützlicher Formeln. Wien. Ber. LXXXIII. 576-588.

Dieselben betreffen die herausstossende Wirkung einer Spirale mit vielen Windungen auf einen diamagnetischen Cylinder in der Axe der Spirale und das Drehungsmoment einer Spirale auf einen nahe ihrem Ende befindlichen und nahe coaxialen Cylinder. Die complicirten Rechnungen haben den Zweck, die Anwendbarkeit gewisser einfacherer Ausdrücke nachzuweisen, welche Ettingshausen (Wien. Ber. LXXX. 1879) bei seinen Versuchen über Diamagnetismus angewandt hat. Ok.

J. Schuhmeister. Bestimmung magnetischer und diamagnetischer Constanten von Flüssigkeiten und Gasen in absolutem Masse. Wien. Ber. LXXXIII. 45-63

Der Verfasser wendet zwei verschiedene Methoden an. Bei der ersten wird der zu untersuchende Körper (in Cylinderform) an einem Faden aufgehängt und in einem Magnetfeld von grosser Intensität in Schwingungen versetzt. Bei der zweiten wird der Körper an einer Drehwage befestigt und die Anziehung eines starken Magnetpols auf denselben gemessen. In beiden Fällen musste, um die Beobachtungen auf absolutes Mass zu reduciren, die Intensität des Magnetfeldes ausgemessen werden. Dies geschah durch Bewegung einer kleinen Dratrolle in demselben und Bestimmung der dadurch inducirten Ströme. Hierbei handelte es sich um die Berechnung des elektromagnetischen Poten-

tials der Spirale in einem Magnetfeld. Der Verfasser benutzt eine von Stefan entwickelte Formel für ein Potential, welches um eine Axe symmetrisch ist. Ist diese Axe die x-Axe, ist ferner das Potential auf derselben von der Form

$$U = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots,$$

so kann das Potential für einen Punkt im Raum durch die Reihe

$$V = U - \frac{\varrho^2}{2^2}\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{\varrho^4}{2^2.4^2}\frac{d^4U}{dx^4} - \frac{\varrho^6}{2^2.4^2.6^2}\frac{d^6U}{dx^6} + \cdots$$

dargestellt werden, wobei ϱ die Entfernung des Punktes von der x-Axe ist. Die Berechnung des Potentials einer Spirale in einem solchen Feld wird dann sehr einfach.

Weitere Rechnungen beziehen sich auf das Drehungsmoment der magnetischen Kräfte auf einen an der Drehwage befestigten Körper. Die diamagnetischen Constanten der Flüssigkeiten nehmen ab mit steigender magnetisirender Kraft, während dieselben für Sauerstoff mit derselben wachsen. Ok.

E. Riecke. Messung der vom Erdmagnetismus auf einen drehbaren linearen Stromleiter ausgeübten Kraft. Wiedemann Ann. (2) XII. 194-204; Gött. N. 1881. 41-55.

Wird ein geradliniger Stromleiter in horizontaler Lage an seinem einen Ende befestigt, so wirkt auf denselben die Verticalcomponente des Erdmagnetismus in der Weise, dass sie denselben um seinen festen Endpunkt in einer horizontalen Ebene zu drehen strebt. Nach dem Biot-Savart'schen Gesetze ist die Grösse des Drehungsmoments

$$\frac{1}{2} Vil^2,$$

wo V die Verticalcomponente, l die Länge des Leiters bedeuten.

Diese Beziehung wurde von dem Verfasser experimentell geprüft, indem eine Kupferscheibe an einem Drat aufgehängt war, durch welchen derselben ein elektrischer Strom zugeführt wurde. Die Scheibe tauchte in eine Kupfervitriollösung, durch welche der Strom vom Rand der Scheibe aus seinen Weg weiter nahm. Jeder Radius der Scheibe kann daher als Stromleiter der

oben beschriebenen Art angesehen werden. Obgleich die Ablenkungen nur klein waren, stimmten sie doch mit den dafür berechneten Werten im Ganzen überein. Ok.

K. SCHERING. Beobachtungen im magnetischen Observatorium. Gött. N. 1881. 133-176.

Die Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus wurde von dem Verfasser nach den von Gauss gegebenen Regeln für eine Reihe von Tagen des Jahres 1880 bestimmt. Dieselbe nimmt zu. Es liegen darüber Bestimmungen von 1834 an vor. Gauss fand sie gleich 1,7748. 1880 war dieselbe auf 1,863 gewachsen.

Ok.

Capitel 4.

Wärmelehre.

R. CLAUSIUS. Ueber die theoretische Bestimmung des Dampfdruckes und der Volumina des Dampfes und der Flüssigkeit. Wiedemann Ann. (2) XIV. 279-290, 692-704.

R. CLAUSIUS. Sur une détermination générale de la tension et du volume des vapeurs saturées. C. R. XCIII. 619-625.

1) Die Versuche von Andrews mit Kohlensäure konnte der Verfasser durch die Formel

$$(1)\quad p = R\frac{T}{v-\alpha} - \frac{c}{T(v-\beta)^2}$$

darstellen. Diese Gleichung genügte aber nicht für andere Stoffe, z. B. für Wasserdampf. Im letzten Gliede muss für $\frac{c}{T}$ eine allgemeinere Temperaturfunction genommen werden.

Gleichung (1) wird ersetzt durch

$$(2) \qquad \frac{p}{RT} = \frac{1}{v-\alpha} - \frac{27(\alpha+\beta)}{8\vartheta(v+\beta)^2}.$$

ϑ ist eine unbestimmt gelassene Temperaturfunction, welche für $T = 0$ ebenfalls gleich Null ist und für die kritische Temperatur den Wert 1 hat. Gleichung (2) wird auf den Verdampfungsprocess angewendet. Der Druck des gesättigten Dampfes sei P, das Volumen desselben s und das Volumen der unter demselben Drucke stehenden Flüssigkeit σ. Berücksichtigt man, dass die bei der Verdampfung geleistete äussere Arbeit gleich derjenigen sein muss, welche man bei derselben Volumenzunahme erhalten würde, wenn der Druck sich nach der theoretischen Isotherme (J. Thomson'sche Curve) und der ihr entsprechenden Formel änderte, und setzt man

$$\Pi = \frac{P}{RT}, \quad \gamma = \alpha+\beta, \quad w = \sigma-\alpha, \quad W = s-\alpha,$$

so hat man die Gleichungen

$$\Pi = \frac{1}{w} - \frac{27\gamma}{8\vartheta(w+\gamma)^2}, \quad \Pi = \frac{1}{W} - \frac{27\gamma}{8\vartheta(W+\gamma)^2},$$

$$\Pi(W-w) = \log\frac{W}{w} - \frac{27\gamma}{8\vartheta}\left(\frac{1}{w+\gamma} - \frac{1}{W+\gamma}\right).$$

Aus diesen drei Gleichungen muss man die Werte von Π, w, W für jeden Wert von ϑ bestimmen. Ist ϑ als Function von T bekannt, so kennt man jene Werte auch für jeden Wert von T. Statt dessen bestimmt der Verfasser, wie es Planck (siehe pag. 811) getan hat, alle vier Grössen Π, w, W, ϑ als Functionen einer zweckmässig zu wählenden Veränderlichen λ. Als diese nimmt er $\log\frac{W}{w}$. Für w, W, Π, ϑ werden Functionen von λ gewonnen, in welchen λ auch als Exponentialgrösse vorkommt. Wenn man die einzelnen Factoren jener Functionen in Reihen entwickelt und

$$\gamma\left(2 + \frac{3}{2.5}\lambda^2 + \frac{17}{2^3.5^2.7}\lambda^4 + \cdots\right) = M,$$

$$\gamma\left(1 + \frac{1}{3.5}\lambda^2 + \frac{1}{3.5^2.7}\lambda^2 + \cdots\right) = N$$

[illegible]

[illegible] Zeichen [illegible]

$$\vartheta = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_1}.$$

Darauf teilt der Verfasser eine Tabelle mit, in welcher für die um ein Hundertel fortschreitenden Werte von ϑ für $\vartheta = 0{,}20$ bis $\vartheta = 1$ die entsprechenden Werte von $\frac{\Pi}{\Pi_1}$, $\frac{W}{W_1}$, $\frac{w}{w_1}$ enthalten sind. Nach vielfachen Vergleichungen erscheint dem Verfasser als geeignetste Form für die Temperaturfunction

$$\frac{\Theta_1}{\Theta} = \frac{a}{T^n} - b.$$

wo a, b, c constante Grössen sind, welche für verschiedene Stoffe verschiedene Werte haben.

Für die Kohlensäure behält der Verfasser seine früher aufgestellte Formel bei, bis genauere Versuche vorliegen, d. h. er setzt

$$\frac{\Theta_c}{\Theta} = \frac{a}{T^2} \quad \text{oder } \Theta = \text{const. } T^2.$$

Für den Aether liegen Beobachtungen von Regnault und Sajotschewsky vor. Aus drei der Bestimmungen wurde gefunden

$$a = 2665, \quad b = 0{,}76786, \quad n = 1{,}19233.$$

Mit Benutzung dieser Zahlen wurden andere Spannungen berechnet. Die berechneten Werte stimmen mit den beobachteten (abgesehen von einer Ausnahme) gut überein. Für die andern Constanten werden die Werte gefunden:

$$\gamma = 0{,}0017352, \quad \alpha = 0{,}0010876, \quad \beta = 0{,}0006476,$$

und sodann s und σ für die Temperaturen -20° bis 180° von 20° zu 20°, sowie für die Temperatur 190°. Gleichung (4) kann für den Aether auch in die Form gebracht werden

$$\frac{p}{RT} = \frac{1}{v-\alpha} - \frac{AT^{-n} - B}{(v+\beta)^2};$$

dann ist

$$A = 15{,}607, \quad B = 0{,}0044968.$$

Aus den Regnault'schen Spannungsbeobachtungen in Bezug auf das Wasser findet der Verfasser

$$a = 5210, \quad b = 0{,}85, \quad n = 1{,}24;$$
$$\gamma = 0{,}002569, \quad \alpha = 0{,}000754, \quad \beta = 0{,}001815,$$

oder

$$A = 45{,}17, \quad B = 0{,}00737.$$

2) ist ein Auszug aus der unter 1) besprochenen Arbeit.

Rs.

J. Stefan. Ueber die Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken. Wien. Ber. LXXXIII. 943-954; Wien. Anz. 1881. 104-105.

Nach der Abhandlung „Versuche über die Verdampfung“ (Wien. Ber. LXVIII. 385-423) ist

$$v = -\frac{k}{P-p}\frac{dp}{dx}.$$

Diese Formel bildet die Grundgleichung für die mathematische Behandlung der stationären Verdampfungsprocesse überhaupt. Wenn P innerhalb des zu betrachtenden Raumes constant ist, d. h. wenn von der Wirkung äusserer Kräfte, wie der Schwere, abgesehen wird, hat man es mit denselben Gleichungen zu tun, welche auch in der Theorie der Wärmeleitung und der Elektrostatik vorkommen. Man kann die Lösung elektrostatischer Aufgaben zur Berechnung von Verdampfungsprocessen verwenden, falls ausser den Grundgleichungen auch die Grenzbedingungen übereinstimmen. Maxwell hat bei der Entwickelung der Theorie eines im freien Raume befindlichen Psychrometers zuerst die Analogie zwischen den Gleichungen der Elektrostatik und jenen der Diffusionstheorie angewendet, dabei jedoch statt obiger Gleichung die Formel

$$v = -\frac{k}{P}\frac{dp}{dx}$$

benutzt. Nach diesen Vorbemerkungen wird die Aufgabe gelöst: „In einer unendlichen Ebene, welche keinen Dampf aussendet, auch keinen absorbirt oder durchlässt, befindet sich eine Vertiefung, welche mit einer Flüssigkeit derart gefüllt ist, dass das Niveau der Flüssigkeit mit dieser Ebene zusammenfällt. Die Flüssigkeit verdampft in die oberhalb der Ebene befindliche unbegrenzte Luft. Es soll die Dampfmenge berechnet werden, welche in der Zeiteinheit aus der Flüssigkeit in die Atmosphäre übergeht, vorausgesetzt, dass die Verdampfung im stationären Zustande sich befindet.“ Das elektrostatische Analogon zu dieser Aufgabe ist die Bestimmung der Verteilung der Elektricität auf einer unendlich dünnen leitenden Platte im Zustande des Gleichgewichts. Als Verdampfungsmenge wird gefunden

$$V = 2\pi k C \log\frac{P-p_0}{P-p_1},$$

wo C die elektrische Capacität der entsprechenden Platte be-

deutet; für eine kreisförmige Platte ist $C = \frac{2a}{\pi}$. Für ein kreisförmiges Becken ist die Verdampfungsmenge also nicht, wie gewöhnlich angenommen wird, dem Flächeninhalte des Beckens, sondern dem Radius desselben proportional. Die Verdampfung aus einer Fläche, deren Begrenzung keine sehr langgestreckte Ellipse ist, unterscheidet sich nur wenig von der aus einer kreisförmig begrenzten Fläche; für lang gestreckte Ellipsen ist sie grösser. Die Verdampfung kann nicht nur für die ganze kreisförmig oder elliptisch begrenzte Oberfläche, sondern für jeden einzelnen Teil derselben berechnet werden, denn in beiden Fällen ist das Gesetz bekannt, nach welchem die Elektricität auf der entsprechenden Platte im Gleichgewichtszustande verteilt ist. Bei dieser Berechnung wird gefunden, dass die feste Umgrenzung der Flüssigkeit sich in der Form eines Hyperboloids über das Niveau der Flüssigkeit erheben kann, ohne die Verdampfung aus der Fläche zu stören. Rs.

Biehringer. Ueber eine Erweiterung des Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzes. Schlömilch Z. XXVI. 377-383.

Ein Gas habe bei derselben Temperatur und den Drucken p und p' die Volumina v und v' und die Dichtigkeiten d und d'. Nach dem Boyle'schen Gesetze ist $p:p' = v':v$, $p:p' = d:d'$, folglich $d:d' = v':v$. Es bezeichne q das absolute Gewicht des Gases; dann wird gesetzt $d = \frac{q}{v}$ und $d' = \frac{q}{v'}$. Hierzu nimmt der Verfasser den Satz: „Bei gleicher Dichtigkeit und Temperatur verhalten sich die Drucke zweier Gasarten umgekehrt wie ihre specifischen Gewichte (s und s'); also $p:p' = s':s$."

Zwei Gasarten (1 und 2) seien durch s, v, p, q bez. d und durch s', v', p', q' bez. d' charakterisirt, ihre Temperaturen sollen gleich sein. Das Mittelglied bilde eine dritte Gasmenge (3), für welche man s, d', p'' hat. Der Verfasser erhält

durch Uebergang von 1 zu 3 $p:p'' = d:d''$ oder $p'' = p \cdot \frac{d''}{d}$,

" " " 3 " 2 $p':p'' = s:s'$ " $p'' = p' \cdot \frac{s'}{s}$,

folglich

durch " " 1 " 2 $p \cdot \frac{s}{d} = p' \cdot \frac{s'}{d'}$,

oder

$$(1) \quad ps \cdot \frac{v}{q} = p's' \cdot \frac{v'}{q'}.$$

Für atmosphärische Luft bei 0° berechnet der Verfasser

$$p's' \cdot \frac{v'}{q'} = 11522000 = C.$$

Mit Hülfe der Gleichung

$$(2) \quad ps \cdot \frac{v}{q} = C$$

kann jede der vier links stehenden Grössen für die Temperatur 0° berechnet werden, wenn die drei anderen gegeben sind. Indem man gewisse dieser Grössen gleich 1 setzt, gelingt es, für C physikalische Deutungen zu erhalten. Da $\frac{q}{pv}$ die Dichtigkeit beim Drucke 1 ist, folgt aus Gleichung (1): Die Dichtigkeiten zweier Gase verhalten sich bei gleichem Druck und gleicher Temperatur wie ihre specifischen Gewichte. Besitzen die Gasarten 1) und 2) die Temperaturen t und t' statt der Temperatur 0°, so ist

$$\frac{psv}{q(1+at)} = C = \frac{p's'v'}{q'(1+at')}.$$

In dieser Gleichung sind die beiden Sätze enthalten: 1) „Gase, deren Dichtigkeiten den specifischen Gewichten proportional sind, üben bei gleicher Temperatur gleiche Drucke aus.“ 2) „Gase mit gleichen Dichtigkeiten üben bei gleichen Temperaturen Drucke aus, welche den specifischen Gewichten umgekehrt proportional sind.“ Man kann statt der Dichtigkeit das absolute Gewicht [1] das Volumen der Gase einführen und erhält dann andere ulirungen der Sätze. Rs.

Gouilly. Sur la fonction qui exprime l'état gazeux et sur la fonction λ, telle que $\frac{dQ}{\lambda}$ est une différentielle exacte. C. R. XCIII. 1134-1137.

Als Zustandsgleichung für Gase hatte der Verfasser in einer früheren Mitteilung die Gleichung

$$(p+m')(v+m'')+mT=0$$

gegeben. Die Temperatur wird definirt durch die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{v-v_0}{v_0(T-T_0)}=\frac{v_{100}-v_0}{v_0\cdot 100}=\alpha.$$

Wenn dQ die Wärmemenge bezeichnet, die notwendig ist, um einen Körper vom Zustande (T, p, v) in den Zustand $(T+dT, p+dp, v+dv)$ überzuführen, und, wenn man die innere Wärmemenge mit U bezeichnet, so ist

$$dQ=dU+Apdv.$$

p und T sind unabhängige Variable, $\frac{dQ}{\lambda}$ soll ein vollständiges Differential sein. Experimente von Regnault sprechen für den Satz: „Die specifischen Wärmen bei constantem Drucke und bei constantem Volumen sind von der Temperatur und dem Drucke unabhängig.“ Durch Benutzung desselben gewinnt man die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{\frac{dv}{dT}}{\frac{d\lambda}{dT}}=k,$$

wo k eine willkürliche Function des Druckes ist. Nach Gleichung (1) ist $\frac{dv}{dT}=\alpha v_0$, folglich hat man

$$\frac{d\lambda}{dT}=\frac{1}{k}\alpha v_0.$$

„Das zweite Glied muss sich auf eine Constante reduciren, weil nach dem Theorem von Carnot λ nur von der Temperatur abhängt; ist k' diese Constante, k'' eine andere, so hat man

$$\lambda=k'T+k''.“$$

Bei anderer zweckmässiger Messung der Temperatur wird $\lambda = T$. Indem man dies in den Gleichungen berücksichtigt, welche sich bei der Herleitung von Gleichung (2) ergaben, gelangt man zu der zuerst erwähnten Formel. Um die Richtigkeit derselben darzutun, führt der Verfasser Resultate von Regnault an, welche dieser für Kohlensäure bekam. Rs.

M. Planck. Die Theorie des Sättigungsgesetzes.

Wiedemann Ann. (2) XIII. 535-543.

Der Verfasser hatte in seiner Schrift: „Gleichgewichtszustände isotroper Körper." (München, Th. Ackermann, 1880.) den Satz aufgestellt: „In jeder Isotherme ist die (zur Abscissenaxe parallele) Gerade, welche den Druck des gesättigten Dampfes darstellt, so gelegen, dass die beiden von ihr und der Isotherme abgegrenzten Flächenräume einander gleich sind." (s. Clausius, Wiedemann Ann. (2) IX. 356 ff. und F. d. M. XII. 1880. 831) P sei der Druck einer homogenen Dampf- oder Flüssigkeitsmasse. Derselbe ist eine stetige und eindeutige Function der absoluten Temperatur T und des Volumens der Masseneinheit v. Die specifischen Volumina des gesättigten Dampfes und der gesättigten Flüssigkeit seien v_1 und v_2, während T die gemeinsame Temperatur ist. Die Gleichungen für das Gesetz der Sättigung sind dann

$$(1) \qquad P_1 = P_2, \quad \int_{v_2}^{v_1} P dv = P_1(v_1 - v_2).$$

Die Bedingungen für den kritischen Zustand erhält man dadurch, dass man v_1 und v_2 zusammenfallen lässt. Zur Bestimmung von T, v, P im kritischen Zustande bekommt man daher

$$\frac{dP}{dv} = 0, \qquad \frac{d^2P}{dv^2} = 0.$$

Indem der Verfasser dies auf Kohlensäure anwendet, giebt er der von Clausius gegebenen Zustandsgleichung

$$P = R\,\frac{T}{v - \alpha} - \frac{c}{T(v+\beta)^2}$$

den Vorzug vor der van der Waals'schen. Aus den Gleichungen

(1) und der Zustandsgleichung werden drei von einander unabhängige Gleichungen zwischen den vier Veränderlichen T, P, v_1, v_2 gewonnen. Statt eine dieser vier Grössen als unabhängige Variable zu nehmen, wählt der Verfasser als neue Variable eine Grösse φ, welche vorläufig noch mit einer anderen Grösse r vereinigt wird. Er setzt

$$v_1 - \alpha = r \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad v_2 - \alpha = r \sin^2 \frac{\varphi}{2}:$$

Nachdem r bestimmt ist, hat man v_1 und v_2, sowie T und P als Functionen von φ allein. Der Bereich des Sättigungsgesetzes wird vollständig durchlaufen, wenn man φ von 0^0 bis 90^0 wachsen lässt, und v_1 auf den dampfförmigen, v_2 auf den flüssigen Zustand bezieht. $\varphi = 0$ giebt die Bedingungen des gesättigten Zustandes für die absolute Temperatur 0:

$$r = \infty, \quad v_1 = \infty, \quad v_2 = \alpha, \quad T = 0, \quad P = 0.$$

Für $\varphi = 90^0$ erhält man die Bedingungen für den kritischen Zustand:

$$r = 4(\alpha+\beta), \quad v_1 = v_2 = 3\alpha+2\beta,$$

$$T^2 = \frac{8c}{27R(\alpha+\beta)}, \quad P^2 = \frac{cR}{216(\alpha+\beta)^3}.$$

„Würde man φ noch weiter wachsen lassen, so würde nichts wesentlich Neues erhalten werden. Es ist also in der Tat ein reelles Wertsystem der betrachteten Grössen nur möglich für Temperaturen und Drucke, die unterhalb des kritischen Punktes gelegen sind.“ Der Verfasser hat für die um fünf Grad fortschreitenden Werte von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90$ Grad die zugehörigen Werte von T, P, v_1, v_2 und der Verdampfungswärme λ berechnet, wobei er für die Constanten der Zustandsgleichung die von Clausius gegebenen Werte (F. d. M. 1880. XII. 831) benutzte.

Rs.

G. A. Hirn. Recherches expérimentales et analytiques sur la relation qui existe entre la résistance des gaz au mouvement des corps et leur température. Con-

séquences physiques et philosophiques qui découlent de ces expériences. Belg. Mém. XLIII. Paris. Gauthier-Villars. Colmar. Barth. 4°.

MELSENS, F. FOLIE et G. v. d. MENSBRUGGHE. Rapports sur ce mémoire. Belg. Bull. (3) II. 225-257.

Der Zweck der Arbeit des Herrn Hirn ist, in physikalischer Hinsicht zu untersuchen, ob der Widerstand, den die Gase bewegten Körpern leisten, unter sonst gleichen Umständen von der Temperatur abhängig oder unabhängig ist, in philosophischer, ob das, was man heut „Kinetische Theorie der Gase" nennt, richtig ist oder verworfen werden muss.

Die Versuche sind auf zwei verschiedene Arten gemacht worden, nämlich erstens mit Gasen, deren Volumen und folglich deren Dichtigkeit völlig constant erhalten wurde, während der Druck variirte, zweitens mit Gasen, deren Druck constant erhalten wurde und bei denen also Volumen und Dichtigkeit variirten.

Zu den Versuchen mit veränderlicher Dichtigkeit wurden Mühlräder von grossen Dimensionen benutzt, deren Flügel entweder fest, und wie der Radius des Rades gerichtet waren, oder beweglich und so geleitet, dass sie sich immer parallel blieben. Im Gegensatz zu dem, was bisher geschehen, konnten die Versuche unbegrenzt verlängert werden, so dass Geschwindigkeit und Widerstand so genau, wie man es wünschte, gemessen werden konnten.

Bei den beiden Versuchen mit constanter Dichtigkeit wurden Pendel mit (verhältnismässig) grossen Oberflächen benutzt, die man in einem luftdichten Gefässe, das auf bekannter Temperatur erhalten wurde, oscilliren liess. Das Pendel erhielt bekannte und, so lange als es nötig schien, fortgesetzte Impulse. Der Widerstand des Gases wurde nach der Amplitude des Oscillationswinkels bestimmt. Benutzt wurde Luft, Kohlensäure und Wasserstoff. Die Resultate beider Versuche stehen in völlig genügender Uebereinstimmung und haben ergeben, dass, unter sonst gleichen Verhältnissen der Widerstand eines Gases gegen einen bewegten Körper einzig abhängt von der Dichtigkeit und nicht von der

Temperatur. In anderer und allgemeinerer Form also, dass man hat

$$\varrho = AS^{\alpha} V^{\beta} J.$$

Bei den Versuchen ergab sich für Luft $\beta = 2$, $\alpha = 1{,}095$. Letzterer Wert ist fast derselbe, den Borda gefunden hatte. Der Widerstand für eine ebene Fläche, oder besser gesagt, für eine dünne und ebene Platte von einem Quadratmeter Grösse wurde gefunden gleich $0^k{,}1357$ in der Luft bei 0^0 und $0^m{,}76$ oder für eine Dichtigkeit von 1,2932 und eine Geschwindigkeit von einem Meter in der Secunde. Man hat also die empirische Gleichung

$$\varrho = 0{,}1357 . S^{1,1} . V^2 1{,}2932 \frac{P}{0{,}76} \cdot \frac{1}{1 + 0{,}003665 t}$$
$$= 0{,}2309 \cdot \frac{S^{1,1} . V^2 . P}{1 + 0{,}003665 t}$$

für den Ausdruck des Widerstandes, der auf eine Platte von der Oberfläche S ausgeübt wird, die sich mit einer Geschwindigkeit V in Luft vom Druck P und der Temperatur t fortbewegt.

In der kinetischen Gastheorie betrachtet man die Temperatur und den Druck dieser Körper als ausschliesslich hervorgebracht von der Bewegung materieller, vollkommen elastisch gedachter Atome und ihrer Stösse gegen die Wände der Reservoire, in denen sie enthalten sind, oder gegen die Oberflächen der festen und flüssigen Körper, die in die Gase getaucht sind. Es lässt sich leicht analytisch nachweisen, dass der Widerstand, den ein Körper in einem Mittel erfahren würde, das auf diese Weise aus geradlinig (oder anders) bewegten Atomen zusammengesetzt ist, eine Function der eigenen Geschwindigkeit der Atome und also der Temperatur sein würde. Wenn es also gelingt, experimentell zu zeigen, dass der Widerstand nicht eine Function der Temperatur ist, so wird man genötigt sein, die so gefasste kinetische Gastheorie zu verwerfen. Dies ist in der Tat der Schluss, den Herr Hirn in seiner Arbeit zieht.

Im letzten Teil der Arbeit ist die Betrachtungsweise des Verfassers allgemeiner und mehr philosophisch. Er versucht zu zeigen, dass die Lehre, die es unternimmt, die Existenz der Kraft als eines specifischen Elementes des Universums wegzu-

deuten und die Gesammtheit aller Erscheinungen auf Bewegungen der Atome der Materie zurückzuführen, einen groben Fehler begeht und deshalb definitiv von der Naturphilosophie verworfen werden muss.

Die Einwürfe, die (in geringer Zahl übrigens, so weit der Verfasser weiss) gegen den experimentellen Teil gemacht sind, bestehen darin, dass der Verfasser in zu engen Grenzen mit Temperaturen und Geschwindigkeiten operirt hat, um daraus einen entscheidenden Schluss ziehen zu können. Die Berechtigung dieses Einwandes erkennt Herr Hirn an. Er hat seitdem eine neue Reihe von Versuchen angestellt, deren Methode von der früheren ganz verschieden ist, und hat dabei nicht mehr mit Geschwindigkeiten von 30 bis 40 Metern, sondern von 300 bis 600 Metern, und mit Temperaturen, die nicht mehr zwischen 0° und 60°, sondern zwischen 0° und 250° variiren, operirt. Die Resultate sind dieselben wie vorher, nämlich, dass zwischen Widerstand und Temperatur keine Relation besteht.

Mn. (O.).

P. M. Heringa. Beschouwingen over de toepassing der wiskunde op de natuurkunde. Nieuw Arch. VII. 1-32.

Im ersten Teile dieser Abhandlung wird untersucht, wie man sich gegenwärtig den gasförmigen und flüssigen Zustand vorstellt, besonders mit Rücksicht auf die theoretischen Untersuchungen von van der Waals, welche der Verfasser bekämpft. Vor allen Dingen wendet sich der Verfasser gegen die bekannte Clausius'sche Formel:

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 = -\frac{1}{2}(Xx + Yy + Zz),$$

die er für unrichtig hält, weil die rechte Seite von dem Coordinaten-System abhängt, während dies bei der linken Seite nicht der Fall ist.

Ebenso legt er Verwahrung ein gegen die Form, unter welcher man gewöhnlich die lebendige Kraft einer Gasmenge giebt, nämlich:

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} N \text{ mal Volumen,}$$

worin N den normalen Druck bedeutet. Weiter bestreitet der Verfasser die Resultate, welche van der Waals erhielt, als er von obigen Formeln für den Uebergang aus dem flüssigen in den gasförmigen Zustand ausging.

Im zweiten Teile bespricht Verfasser die Abhandlung Isenkrahe's über das Rätsel von der Schwerkraft und entwickelt die Bedenken, welche er gegen diese Theorie hat. Er sucht eine neue Erklärung der Schwerkraft zu geben und behandelt dazu nach einander die folgenden Fragen: 1) Wie müssen wir uns den Stoff denken? 2) Wie stossen die Stoffteilchen? 3) Giebt es verschiedene Arten von Stoff? 4) Wie können Atome existiren? 5) Sind die Atome eines Grundstoffes gleich, und kann ein Atom eines Grundstoffes in ein Atom eines anderen Grundstoffes übergehen? 6) Wie können wir die Anziehung zwischen den Stoffteilchen erklären? 7) Welchen Einfluss hat es auf das Anziehungsgesetz, wenn die Stoffteilchen in sehr grosse Nähe kommen? 8) Wie können wir mittels der vorstehenden Betrachtungen das Gesetz von der Erhaltung der Energie erklären? Am Schluss seiner Betrachtungen spricht der Verfasser den Wunsch aus, den einen oder anderen Leser überzeugt zu haben, dass man auf dem eingeschlagenen Wege tiefer in das Wesen der Natur eindringen könne. G.

J. D. VAN DER WAALS. Bijdrage tot de kennis van de wet den overeenstemmende toestanden. Amst. Verh., XXI. 1-10.

Diese Abhandlung des bekannten Physikers ist ein neuer Beitrag zu seiner Theorie der Flüssigkeiten und Gase und beschäftigt sich mit den übereinstimmenden Zuständen. Früher hat er hieraus eine Regel abgeleitet für die Dichtigkeit der verschiedenen Flüssigkeiten in übereinstimmenden Zuständen. Aus dieser Regel wird dann die Dichtigkeit des Diäthylamin bestimmt und ein Wert gefunden, welcher nicht viel von der des

Aethers verschieden ist. Die Abhandlung enthält diesmal keine theoretischen Erörterungen. G.

H. Kamerlingh Onnes. Algemeene theorie der vloeistoffen. Amst. Verh. XXI. Drei Abhandlungen.

Neue Beiträge zu einer allgemeinen Theorie der Flüssigkeiten im Anschluss an die Untersuchungen von van der Waals.

In der ersten Abhandlung wird gezeigt, dass das allgemeine Flüssigkeitsgesetz, welches van der Waals aufgestellt hat, aus der Voraussetzung abgeleitet werden kann, dass die Molecüle der verschiedenen Stoffe gleichförmige elastische Körper von nicht merklich veränderlichen Dimensionen sind. Dazu wird die Gleichung der Isotherme unter der Annahme gesucht, dass die Molecüle anziehende Kräfte auf einander ausüben, und dass sie ausgedehnt sind. Hierbei wird eine Function eingeführt, welche der Verfasser Stossfunction nennt, und welche von dem Verhältnis des Volumens der Molecüle zu dem Volumen der Flüssigkeit abhängt, dabei für alle Flüssigkeiten mit gleichförmigen Molecülen die nämliche ist. Aus der erhaltenen allgemeinen Gleichung der Isothermen werden einige Folgerungen gezogen und die kritischen Grössen (Temperatur, Volumen und Druck) bestimmt, endlich auch das allgemeine Flüssigkeitsgesetz aufgestellt.

In der ersten Fortsetzung wird aus dieser Theorie das Gesetz der übereinstimmenden Dampfspannungen abgeleitet. Es ergiebt sich dasselbe Gesetz, welches aus dem Kriterium von Maxwell und Clausius gefunden wird.

In der zweiten Fortsetzung wird gezeigt, dass unter der Voraussetzung, dass bei den Gasen, wenn bei ihrem Uebergang in den flüssigen Zustand physische Vereinigungen der Molecüle angenommen werden, das allgemeine Gesetz der übereinstimmenden Zustände gelten bleibt. Unter der Annahme, dass die Kräfte, welche von den Punkten ausgehen, im umgekehrten Verhältnis einer Potenz des Abstandes wirken, folgt das allgemeine Flüssigkeitsgesetz wieder aus dem Princip der Gleichförmigkeit der

Bewegung; hieraus werden die Beziehungen zwischen den Capillaritätsconstanten, Reibungs-Coefficienten und Wärmeleitungs-Coefficienten abgeleitet. G.

H. A. Lorentz. Ueber die Anwendung des Satzes vom Virial in der kinetischen Theorie der Gase.

Wiedemann Ann. (2) XII. 127-136, 660-661.

Van der Waals erhielt eine Zustandsgleichung zwischen p, v, t, indem er den äusseren Druck und die Molecularanziehung bei der Berechnung des Virials berücksichtigte und den Einfluss der Moleculargrösse sich anderweitig verschaffte. Maxwell machte darauf aufmerksam, dass dieser Einfluss auch bestimmt werden könne, indem man bei Berechnung des Virials die abstossenden Kräfte beachtet, welche die Teilchen während der Zusammenstösse auf einander ausüben. Dadurch erhielt Maxwell jedoch ein Resultat, welches der Gleichung von van der Waals nicht entsprach. Der Verfasser weist nach, dass bei nicht zu grossen Dichtigkeiten des betrachteten Stoffes die Berücksichtigung des Virials der abstossenden Kräfte zu der von van der Waals mit b bezeichneten Correction führt. Das Virial der abstossenden Kräfte wird sowohl für ein Gas, als auch für eine Mischung zweier Gase berechnet. Im letzteren Falle ist die mit b zu bezeichnende Grösse nicht mehr das vierfache Molecularvolumen. Wenn man in der Gleichung des Virials die zwischen den Molecülen tätigen anziehenden Kräfte berücksichtigt, gelangt man zu der van der Waals'schen Zustandsgleichung nur unter der Voraussetzung, dass sich innerhalb der Wirkungssphäre eines Molecüls P noch sehr viele Molecüle befinden, und dass dem Gesetze für die anziehende Wirkung ohne merklichen Fehler durch die Annahme entsprochen wird, die durch die Wirkungssphäre begrenzte Kugel sei homogen mit Materie erfüllt, wie auch die zufällige Anordnung der Molecüle in der Kugel sein möge, dass also auf P keine Kraft wirkt. Diese Voraussetzung wird nicht immer erfüllt sein.

Im Nachtrage wird durch die Betrachtung zweier ähnlicher Molecülsysteme die Beziehung

$$pv = \frac{1}{3} mN\overline{u^2}\left[1-2f\left(\frac{b}{v}\right)\right]$$

gewonnen. Denkt man sich $f\left(\frac{b}{v}\right)$ nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{b}{v}$ entwickelt, so bekommt man durch Benutzung des Satzes vom Virial den Wert v des ersten Gliedes, $-\frac{1}{2}\frac{b}{v}$.

Rs.

H. A. Lorentz. Les équations du mouvement des gaz et la propagation du son suivant la théorie cinétique des gaz. Arch. Néerl. XVI. 1-46.

Siehe F. d. M. XII. 1880. p. 814.

D. J. Korteweg. Ueber den Einfluss der räumlichen Ausdehnung der Molecüle auf den Druck eines Gases. Wiedemann Ann. (2) XII. 136-146.

Gegen die Bemerkung von Clausius (siehe F. d. M. 1880. XII. 818-819), dass es keinen Nutzen habe, jetzt bereits die mittlere Weglänge der Molecüle genauer zu berechnen, als es seiner Zeit von ihm geschehen ist, wird hervorgehoben, dass der Verfasser und van der Waals in den bezüglichen Arbeiten nicht eine Verbesserung der früheren Angaben über diese Weglänge, sondern eine indirecte Berechnung des Einflusses der räumlichen Ausdehnung der Molecüle auf den Gasdruck erstrebten. Ebenfalls im Arch. Néerl. XII. veröffentlichte der Verfasser eine directe Bestimmung der Druckvermehrung, welche Clausius nicht besprochen hat. Der Inhalt dieser Arbeiten, sowie der einer Arbeit von H. A. Lorentz (Wiedemann Ann. (2) XII. 127-136, s. p. 817) werden skizzirt. Der Verfasser bleibt bei der Ansicht, dass aus der Grösse b der van der Waals'schen Formel mit Sicherheit auf den Wert des Gesammtvolumens der Molecüle geschlossen werden kann. Es bleibt nur die Frage zu erledigen,

ob jene Formel für mässige Gasdrucke als richtig zu betrachten ist, oder ob sie durch eine andere, z. B. durch die von Clausius gegebene, ersetzt werden muss. Die von Clausius für Kohlensäure aufgestellte Gleichung ist in ziemlich guter Uebereinstimmung mit der Thomson'schen und Joule'schen (Phil. Trans. 1854. p. 321 u. 1862. p. 579), aber in bestimmtem Widerspruch mit Regnault'schen Beobachtungen (Mém. de l'Instit. XXI. 1847). Die van der Waals'sche Gleichung entspricht den Versuchen von Regnault, führt dagegen für die von Joule und Thomson beobachtete Erscheinung zu einem Gesetze, welches der Gestalt nach von dem der letzteren abweicht. Das Gesetz liefert für Luft Zahlen, welche mit den erhaltenen auffallend gut übereinstimmen; für Kohlensäure ist eine solche Uebereinstimmung nicht vorhanden. Der Verfasser hat die von Amagat gemessenen Ausdehnungscoefficienten der Kohlensäure bei atmosphärischem Drucke nach beiden Zustandsgleichungen berechnet. Die Formel von van der Waals giebt den Beobachtungen entsprechendere Werte, als die von Clausius. Rs.

L. Boltzmann. Zur Theorie der Gasreibung. II. Teil. Wien. Ber. LXXXIV. 40-135.

In dieser Fortsetzung der vorjährigen Mitteilung (Wien. Ber. 1880. 117-158, siehe F. d. M. XII. 819-821) wird zunächst bewiesen, dass bisher bei Berechnung der Reibungsconstanten Grössen von der Ordnung der ausschlaggebenden vernachlässigt wurden. Zur Berechnung des Reibungscoefficienten giebt es keinen anderen Weg, als den der Bestimmung einer gewissen Function, über welche bereits in der ersten Mitteilung gesprochen wurde; denn auch die Maxwell-Meyer'sche Methode führt zu derselben jene Function enthaltenden Gleichung, sobald alle Glieder derselben Grössenordnung gleichmässig berücksichtigt werden. Der Verfasser will für jene Function verschiedene Reihenentwickelungen geben; so lange deren Convergenz nicht bewiesen ist, bleibt allerdings für diese Art der Bestimmung des Reibungscoefficienten eine gewisse Unsicherheit bestehen.

Die Function $\psi(x)$ ist zu bestimmen aus der Gleichung

$$(1) \quad v^2 e^{v^2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r^3 dr \int_0^\pi \gamma e^{-2vr\gamma} dG \int_0^{\frac{\pi}{2}} s\sigma dS \int_0^{2\pi} \Psi dO = 0,$$

wo

$$\Psi = 2J\psi(v'^2) - J_0\psi(v_1^2) - 2v^2\psi(v^2)$$

ist. Der Reibungscoefficient ist

$$\mu = \frac{4p}{15\pi\delta^2\sqrt{h}} \int_0^\infty v^6 e^{-v^2} \psi(v^2)\, dv.$$

Dabei ist δ der Durchmesser eines Molecüls und h eine Constante, deren Wert dadurch bestimmt ist, dass das mittlere Geschwindigkeitsquadrat den Wert $\frac{2}{3}h$ hat.

Der zweite Summand in Gleichung (1) wird für den Fall $\psi(x) = x^p$ mit U_p bezeichnet. Diese Grösse wird unter Anwendung des Polynomialsatzes entwickelt, und darauf wird U_p successive für $p = 0, 1, 2$ u. s. w. berechnet. Die erhaltenen Formeln können dazu dienen, $\psi(x)$ in eine nach Potenzen von x oder xe^{-x} fortschreitende Reihe zu entwickeln. Setzt man im ersten Falle $\psi(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} c_p x^p$, so verwandelt sich Gleichung (1) in

$$v^2 e^{v^2} + \sum_{p=0}^{p=\infty} c_p U_p = 0.$$

Statt der relativen Geschwindigkeiten werden die Geschwindigkeiten beider Molecüle vor dem Stosse und deren Winkel als Integrationsvariabeln eingeführt. Die erhaltenen Gleichungen gestatten dann, die Grenze zu bestimmen, welcher sich die Function ψ für sehr grosse Werte von v nähert. Endlich wird (auf Seite 79-135) bei Benutzung der früheren Integrationsvariabeln ψ für sehr kleine Argumentwerte berechnet. Rs.

L. Boltzmann. Ueber einige das Wärmegleichgewicht betreffende Sätze. Wien. Ber. LXXXIV. 136-145.

1) In der Abhandlung: „Ueber die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der

Wahrscheinlichkeitsrechnung, respective den Sätzen über das Wärmegleichgewicht (Wien. Ber. LXXVI.) berechnete der Verfasser den algebraischen Ausdruck für eine gewisse Permutationszahl, welche für die wahrscheinlichste Zustandsverteilung unter Gasmolecülen den grössten Wert annimmt, und unabhängig davon den algebraischen Ausdruck für die Zustandswahrscheinlichkeit. Beide Ausdrücke fielen identisch aus. Jetzt wird gezeigt, wie der Grund dieser Identität mit Hülfe bereits entwickelter Sätze eingesehen werden kann.

2) Der Verfasser hatte in der Arbeit „Weitere Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmetheorie" (Wien. Ber. LXXVIII.) die Wahrscheinlichkeit W_a, dass die n Molecüle eine gegebene auf die einzelnen Molecüle beliebig verteilte lebendige Kraft besitzen, für $a = 2$ berechnet, d. h. für Molecüle, welche sich in einer Ebene bewegen. Jetzt werden die Werte für W_a berechnet, wenn a eine beliebige ganze Zahl (im Speciellen $a = 2, 4, 6, a$) bedeutet. Die Entwickelungen sind analog jenen, durch welche Serret in seiner Algebra die Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung gewinnt. Es wird bemerkt, dass die für ein grades a erhaltene Formel auch für ein ungrades gilt. Die Durchführung der Rechnung bietet keine Schwierigkeit; dagegen dürfte der Beweis der Convergenz der betreffenden Entwickelung und die Zulässigkeit einer Vernachlässigung schwierig sein. Der Wert von W_3, wie er aus der allgemeinen Formel für $a = 3$ folgt, wird noch hingeschrieben. Rs.

G. Lemoine. Théorie de la dissociation: influence de la pression. C. R. XCIII. 265-268.

Die in den letzten Jahren veröffentlichten Experimente über chemische Statik veranlassen den Verfasser, seine 1871 gegebene Theorie (Théorie des réactions simples limitées par l'action inverse, et applications à la transformation du phosphore. C. R. LXXIII. 990-995) zu vervollständigen. Er beschränkt sich auf homogene Systeme. Die Clausius'schen Entwickelungen bezüglich der Constitution der Gase werden auf die Chemie angewendet, wie dies

bereits 1873 von Joulin (in seinen Recherches sur les doubles décompositions salines, Note B. Ann.de Chim. et Phys. (4) XXX. 284-287) geschah. Zwei Gase mögen das Bestreben haben, sich zu gleichem Volumen zu vereinigen. N und N' seien die Zahlen der freien Molecüle der Volumeneinheit, v und v' die Geschwindigkeiten dieser Molecüle ($v' < v$), λ und λ' die intermolecularen Entfernungen in den beiden Gasen; dann ist nach Joulin

$$N\lambda^3 = N'\lambda'^3 = 1.$$

Wenn dy die Zahl der Molecüle der in der Zeit dt gebildeten Verbindung und K eine Constante ist, hat man

$$\frac{dy}{dt} = KNN',$$

falls λ viel grösser, als der Radius der Wirkungssphäre ist, d. h. falls der Druck gering ist. Für starke Drucke schlägt der Verfasser die Exponentialformel vor

$$\frac{dy}{dt} = KN^\beta N'^\beta.$$

Indem der Verfasser diese Gleichung benutzt, macht er einige Bemerkungen über die Dissociation homogener Systeme, wobei besonders der Einfluss des Druckes auf die Dissociation nach der Theorie und nach dem Experiment berücksichtigt wird.

Rs.

A. Ritter. Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Weltkörper.

Wiedemann Ann. (2) X. 130-143, XI. 332-344, XII. 445-465, XIII 360-377, XIV. 610-634.

Diese theoretischen Betrachtungen sind die Fortsetzung derjenigen, über welche in F. d. M. XI. 1879. 781 berichtet wurde. Die wirkliche Höhe einer aus condensirbaren Gasen bestehenden Atmosphäre wird stets beträchtlich grösser sein, als die aus der Voraussetzung des idealen Gaszustandes berechnete Höhe. Die Oberflächentemperatur eines Weltkörpers wird einen gewissen Wert (die Dispersionstemperatur) nicht überschreiten dürfen, wenn die Existenz einer im Gleichgewichtszustande befindlichen

Atmosphäre nicht unmöglich werden soll, insofern bei höherer Temperatur für jede, wenn auch noch so grosse endliche Höhe der Atmosphäre die Expansionsbewegung derselben sich noch immer weiter fortsetzen würde. Für eine reine Wasserstoffatmosphäre wird berechnet bei der Erde die absolute Temperatur 4404,4 und für den isolirt im Raume ruhenden Mond 188,2, d. h. —84,8° C. Wäre die Atmosphäre dagegen aus reinem gesättigten Wasserdampf gebildet, so müsste die Oberflächentemperatur beim Monde niedriger als —50° C. sein.

Die allgemeine Differentialgleichung der Zustandslinie eines gasförmigen Weltkörpers hat die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + m^2y^n = 0.$$

Die Integration wird ausgeführt für den Fall eines Weltkörpers, dessen ganze Masse sich im gasförmigen Aggregatzustande befindet, wobei gefunden wird: „Ein adiabatischer Gleichgewichtszustand des gasförmigen Weltkörpers kann überhaupt nur dann existiren, wenn das Verhältnis der beiden specifischen Wärmen des Gases grösser als $\frac{6}{5}$ ist.“ Wenn diese Grösse zwischen den Grenzwerten $\frac{5}{3}$ und $\frac{4}{3}$ oder zwischen $\frac{4}{3}$ und $\frac{6}{5}$ liegt, ist der adiabatische Gleichgewichtszustand ein indifferenter oder ein labiler Gleichgewichtszustand.

Ferner werden Betrachtungen angestellt über die Maximalgeschwindigkeit im interstellaren Raume, über die Wärmeentwickelung beimZusammenstoss von Weltkörpern, und Hypothesen mitgeteilt über die Entstehung der Sonne, der Fixsterne und Nebelflecke.

Die pulsirenden Bewegungen einer Gaskugel in Folge der wechselweise überwiegenden Einflüsse der Gravitation und der inneren Wärme werden nochmals untersucht, weil der Verfasser glaubt, dass sie zur Erklärung des Lichtwechsels veränderlicher Sterne verwertet werden könnten. Folgende Sätze werden erhalten: „Die innere Wärme einer im Gleichgewichtszustande befindlichen Gaskugel ist proportional dem Potentialwerte, also

umgekehrt proportional der ersten Potenz des Halbmessers. Die innere Wärme der pulsirenden Gaskugel ändert sich dagegen umgekehrt proportional dem Quadrate des Halbmessers. Während die lebendige Kraft der pulsirenden Bewegung allmählich in Wärme sich umwandelt, und in Folge dessen die Schwingungsamplitude allmälich bis auf Null abnimmt, bleibt die Schwingungsdauer unverändert.“ Dies widerspricht einer Folgerung bei der früheren entsprechenden Untersuchung; es war damals von falscher Voraussetzung ausgegangen.

Bei der Betrachtung einer Atmosphäre von überhitztem Wasserdampfe wird u. A. gefunden, dass die Höhe der Wasserdampf-Atmosphäre nicht nur von der Temperatur, sondern auch von der Dichtigkeit der untersten Schicht abhängt. Das Folgende bezieht sich auf die Dissociation. Bei Benutzung dieser Entwickelungen und der Hypothese, mit der Photosphäre falle das Dissociationsgebiet der Sonnensubstanz zusammen, ergiebt sich anscheinend die Möglichkeit, die an der Sonnenoberfläche bisher beobachteten Erscheinungen ohne Annahme von Condensationsprocessen zu erklären. Rs.

H. Résal. Sur la théorie de la chaleur. C. R. XCII. 157-158.

Ein Elementartetraëder wird betrachtet. Von einem Punkte O eines festen Körpers gehen die drei rechtwinkligen Axen Ox, Oy, Oz aus, ω ist ein durch dx, dy, dz bestimmtes ebenes Element, λ, μ, ν sind die Winkel, welche die Normale dieses Elementes mit den drei Axen bildet. N ist der Wärmestrom durch ω, X, Y, Z sind die Wärmeströme, welche sich auf die zu den Axen Ox, Oy, Oz senkrechten Flächenelemente in O beziehen. In der Zeit dt dringt in das elementare rechtwinklige Tetraëder, dessen Spitze im Punkte O liegt und dessen Basis ω ist, die Wärmemenge $dt\,(X\omega\cos\lambda + Y\omega\cos\mu + Z\omega\cos\nu - N\omega)$ ein. „Diese Wärmemenge würde aber nur dazu dienen, die Temperatur des Volumens, welches von der dritten Ordnung ist, um eine unendlich kleine Grösse zu erheben; sie ist also Null.“ Von O aus trage man auf der Normalen von ω eine Länge ON ab,

welche proportional mit N ist, und bezeichne mit ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes N, dann erhält man Gleichungen, welche zeigen, dass bei Aenderung der Richtung von ω 1) der Ort der Punkte N eine um O beschriebene Kugel ist; 2) für eine gewisse Lage des Elementes ω der Wärmezufluss einen Maximalwert hat, welcher als Hauptstrom bezeichnet sei; 3) der Wärmestrom nach einer anderen Richtung die Projection des Hauptwärmestromes auf diese Gerade ist. Rs.

E. Betti. Sopra la propagazione del calore. Chelini, Coll. Math. 232-240.

Von den Lamé'schen Gleichungen (Leçons sur la théorie analytique de la chaleur pag. 27, 30)

$$(1)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum a_{is} \frac{\partial V}{\partial x_s} = 0,$$

$$(2)\qquad h(V-v) = \sum_i \alpha_i \sum_s a_{is} \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

wird ausgegangen, und es wird angenommen, dass für die Anfangszeit $t = 0$ die Temperatur V_0 durch eine im ganzen Raume S willkürlich gegebene Function

$$V_0 = f(x_1, x_2, x_3)$$

gegeben ist. U sei eine Function der Zeit und der Coordinaten, welche mit ihrer ersten Ableitung nach der Zeit und mit ihrer ersten sowie zweiten Ableitung nach den Coordinaten im ganzen Raume S und in dem Zeitintervall $t = 0$ bis $t = t_1$ endlich und stetig bleibt. Der Verfasser multiplicirt Gleichung (1) mit $UdtdS$ und integrirt in Bezug auf den ganzen Raum S und die Zeit t_1. Die erhaltene Gleichung wird in eine andere (A) übergeführt, indem bestimmt wird: Es sei $t' > t_1$, und U sei so beschaffen, dass

$$(3)\qquad \lim_{t_1=t'} \int_s U ds = 0,$$

wenn ein Raum s den Punkt (x'_1, x'_2, x'_3) nicht enthält,

$$(4)\qquad \lim_{t_1=t'} \int_{s'} U ds' = \omega,$$

wenn ein Raum s' den Punkt (x'_1, x'_2, x'_3) enthält.

In Folge der weiteren Annahme, dass

$$(5) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_s a_{si} \frac{\partial U}{\partial x_s} = 0$$

ist, und V der Gleichung (2) genügt, verwandelt sich Gleichung (A) in

$$\omega V' = \int_S V_0 U_0 dS + \int_0^{t'} dt \int_o \left[hUv - V\left(hU - \sum_i \alpha_i \sum_s a_{si} \frac{\partial U}{\partial x_s}\right)\right] d\sigma.$$

Dabei ist V' der Wert von V im Punkte (x'_1, x'_2, x'_3) zur Zeit $t = t'$ beim Uebergang zur Grenze. Wenn U für σ, die Oberfläche von S, der Gleichung

$$hU = \sum_i \alpha_i \sum_s a_{si} \frac{\partial U}{\partial x_s}$$

genügt, hat man

$$V' = \frac{1}{\omega} \int_S V_0 U_0 dS + \frac{1}{\omega} \int_0^{t'} dt \int_o hUv ds,$$

d. h. V' wird für jeden Punkt im Innern von S durch gegebene Functionen ausgedrückt sein. Wenn die Leitungsfähigkeit in zwei einander entgegengesetzten Richtungen gleich ist, hat man $a_{is} = a_{si}$, und wenn der Körper homogen ist, sind die Coefficienten a_{is} constant. Für diesen Fall genügt den Gleichungen (3), (4), (5) die Function

$$U = \frac{e^{-\frac{\varphi}{4(t'-t)}}}{(t'-t)^{\frac{3}{2}}},$$

indem zur Abkürzung gesetzt ist

$$\varphi = \sum_i \sum_s A_{is} (x_i - x'_i)(x_s - x'_s), \qquad A_{is} = \frac{\partial D}{\partial a_{is}} \frac{1}{D},$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Für $a_{is} = 0$, $a_{ii} = 1$ hat man

$$D = 1, \quad \varphi = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2 = r^2,$$

$$V' = \frac{1}{4\pi} \int_o \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial p} \right) d\sigma.$$

Endlich wird noch der Fall untersucht, wenn der Raum S sich nach allen Richtungen in's Unendliche ausdehnt, die Temperatur und ihre Ableitungen in Bezug auf die ganze Begrenzungsfläche σ Null ist. und für $t = 0$ in einem Raumteile C die Function V einen von Null verschiedenen Wert hat. Für einen isotropen Körper ist $a_{ix} = 0$, $a_{ii} = k = \frac{K}{c\varrho}$, wenn K die Leitungsfähigkeit, c die specifische Wärme und ϱ die Dichtigkeit bedeutet. Folglich ist

$$\varphi = \frac{r^2}{k}, \quad D = k^3, \quad V' = \frac{1}{4\pi k\sqrt{\pi}} \cdot \int_C \frac{V_0 e^{-\frac{r^2}{4kt'}} dS}{\sqrt{4kt'^3}}.$$

Beltrami hat bemerkt (Cim (3) I. 20), dass die Integration von $4\pi k V' dt'$ zwischen den Grenzen 0 und ∞ eine Function giebt, welche der Newton'schen Potentialfunction einer im Raume C mit der Dichtigkeit V_1 zerstreuten Masse gleich ist. Die letzten Betrachtungen beziehen sich auf die physikalische Bedeutung jener Function. Rs.

W. L. Mollison. Note on conduction of heat. Mess. (2) X. 170-174.

Gegenstand der Arbeit ist die Lösung einiger Probleme über die veränderliche Bewegung von Wärme nach den Methoden, die Stokes in seiner Arbeit: „On the critical values of the sums of periodic series" gegeben hat. Die Methode beruht darauf, dass, wenn eine Function nach Sinus oder Cosinus entwickelt ist, ihre Ableitung in eine Form gebracht werden kann, welche erlaubt, die Discontinuitäten der Function kenntlich zu machen. Glr. (O.).

H. Lorberg. Ueber Wärmeleitung in einem System von Cylindern, und über die experimentelle Bestimmung der Leitungsfähigkeit des Wassers. Wiedemann Ann. (2) XIV. 291-308, 426-450.

Angeregt durch die Arbeit des Herrn Weber (siehe F. d. M. 1879. XI. 788-790 und 1880. XII. 841-843) beschäftigt sich der Verfasser mit der Lösung des Problems: n Cylinder von gleichen Radien und verschiedenen Stoffen seien mit ihren Grundflächen auf einander gesetzt. Das ganze System habe eine in allen Punkten gleiche Anfangstemperatur u_0 und werde in einem bestimmten Momente in einen Luftraum versetzt, der mit einer auf einer constanten Temperatur (0°) erhaltenen Hülle umgeben ist, während die untere Grundfläche des untersten Cylinders auf der constanten Temperatur (0) erhalten wird. Die folgenden Annahmen von Weber werden für nicht zulässig erachtet: Die Flüssigkeitslamelle sei so dünn, dass $u = qx$ für $u = A \sin qx e^{-a^2 t}$ gesetzt werden kann; die Platten mögen seitlich eine unendliche Ausdehnung haben. Auch war die Voraussetzung nicht streng erfüllt, dass die untere Seite der Flüssigkeit schon vom Beginn der Beobachtung an die constante Temperatur 0° der Umgebung habe. Hierdurch wird nicht die Theorie, wohl aber die Berechnung der Beobachtungen berührt, worauf am Schluss der Abhandlung näher eingegangen ist. Im Uebrigen sind die Annahmen Weber's beibehalten, auch die, dass die Temperatur an der Berührungsfläche zweier verschiedenartiger Körper sich continuirlich ändert. Nachdem dargelegt ist, warum die letzte Annahme statt der Poisson'schen gemacht wird, folgt die allgemeine Lösung des Problems. Bei der Auflösung der Gleichungen, auf welche die Aufgabe zurückgeführt wurde, wird nur die erste Potenz vom Verhältnis der äussern Leitungsfähigkeit h_i der Seitenfläche eines Cylinders i zur Leitungsfähigkeit k_i desselben Cylinders berücksichtigt, weil diese Grösse klein ist, nämlich für Eisen den Wert 0,000943 und für Kupfer 0,00012 hat. Darauf folgt Anwendung der Rechnungen auf den Fall, dass sich Wasser zwischen zwei Kupferplatten befindet. Die Weber'schen Beobachtungen werden benutzt. Der Verfasser erhält

$$k_0 = 0{,}08317 - 0{,}0046\,h,$$

beziehungsweise

$$= 0{,}08266,$$

während Weber in Folge einer anderen Berechnungsweise seiner

Beobachtungen fand

$$k_0 = 0{,}0768$$

und als Mittel mehrerer Beobachtungsreihen

$$k_0 = 0{,}0745.$$

Ferner bekam der Verfasser

$$k_{18} = 0{,}09108 - 0{,}0046 h,$$

während nach Weber

$$k_{18} = 0{,}0867,$$

oder gleich dem Mittelwert 0,0857 ist. Rs.

C. Christiansen. Einige Versuche über die Wärmeleitung. Wiedemann Ann. (2) XIV. 23-33.

Weber brachte den zu untersuchenden Körper zwischen zwei Kupferplatten; der Verfasser wendet drei in derselben Weise von einander getrennte Kupferplatten an, bringt in jeden der beiden Zwischenräume einen anderen Körper und bestimmt das relative Wärmeleitungsvermögen dieser beiden Körper. Man kann auch beide Zwischenräume mit demselben Stoffe füllen und dann das absolute Leitungsvermögen gewinnen. Das System befindet sich auf einem Messinggefässe, welches von kaltem Wasser durchströmt wird, und auf dem System befindet sich ein zweites Messinggefäss, durch welches warmes Wasser geleitet wird. Nachdem ein stationärer Temperaturzustand eingetreten ist, können die Temperaturen der drei Platten, T_1, T_2, T_3, beobachtet werden. Die Leitungsfähigkeit des Körpers im oberen Zwischenraume sei K_1, die des anderen Körpers K_2, und zwar bez. bei den Temperaturen $\frac{1}{2}(T_1+T_2)$ und $\frac{1}{2}(T_2+T_3)$. Die Grundfläche der Platten sei S, die Dicke e_0, das Leitungsvermögen K_0 und ihre Entfernung von einander bez. e_1 und e_2. Die Abhängigkeit der Leitungsfähigkeit von der Temperatur sei gegeben durch die Function $K = k(1 + \alpha u)$, worin k und α constant sind. Ferner sei die äussere Wärmeleitungsfähigkeit für die Kupferplatten h, die cylindrische Oberfläche bei denselben A, die Temperatur der

Luft T_0. Dann hat man

$$Sk_1 \left(1 + \frac{T_1 + T_2}{2} \alpha_1 \right) \frac{T_1 - T_2}{e_1} - Sk_2 \left(1 + \frac{T_2 + T_3}{2} \alpha_2 \right) \frac{T_2 - T_3}{e_2}$$
$$= hA(T_2 - T_0).$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{e_1}{e_2} \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_2} \left(1 + \frac{Ahe_2}{SK_2} \frac{T_2 - T_0}{T_2 - T_3}\right).$$

Um den Einfluss der Umgebung zu vermindern, muss man die Zwischenschichten so dünn als möglich nehmen und die mittelste Platte beinahe auf der Temperatur der umgebenden Luft, T_0, erhalten.

Bei Versuchen mit Luft in beiden Zwischenräumen war $e_1 = e_2$. Indem der Verfasser in obiger Gleichung ferner $K_1 = K_2 = K$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ und $\frac{1}{2}(T_1 - T_2) + \frac{1}{2}(T_2 - T_3) = s$ setzt, erhält er

$$\delta + \alpha(s^2 + \delta T_2) = \frac{hAe_1}{kS}(T_2 - T_0).$$

Zwischen den aus den Beobachtungen folgenden und den berechneten Werten von δ ist gute Uebereinstimmung vorhanden, wenn man

$$\alpha = 0{,}001504, \quad \frac{hA}{ks} = 0{,}3931 \quad \text{und} \quad \frac{h}{k}\ 1{,}43$$

setzt. Dieser Wert von α ist aber bedeutend kleiner, als der von Winkelmann angegebene (Pogg. Ann. CLVII. 514 u. CLIX. 177). Das Leitungsvermögen der Luft nimmt mit der Temperatur zu.

Ferner wurde der obere Zwischenraum mit Luft, der untere mit Flüssigkeit gefüllt, und zwar mit Wasser, Weingeist, Glycerin, Olivenöl, Citronenöl. Die Verhältnisse der Wärmeleitungsfähigkeit der Luft zu jeder dieser Flüssigkeiten wurden dann erhalten. Zur Controlle wurde eine Bestimmung für Olivenöl und Glycerin gemacht. Die gefundenen relativen Leitungsvermögen dieser Flüssigkeiten entsprechen in genügender Weise den von Weber gefundenen absoluten Leitungsvermögen. Die Versuche des Verfassers sind für die Temperatur nicht corrigirt; dies soll geschehen, wenn das Leitungsvermögen der Luft bei verschiedenen Temperaturen genauer bestimmt ist.

Endlich wurde das Wärmeleitungsvermögen verschiedener fester Körper in Bezug auf das von Luft bestimmt, welche sich stets im oberen Zwischenraume befand. Damit sich zwischen dem zu untersuchenden Körper und den Kupferplatten kein schädlicher Raum bildete, brachte der Verfasser Wasser oder Glycerin dazwischen. Das Leitungsvermögen der Luft sei k, das des untersuchten Körpers xk. Es wurden zwei Versuche gemacht; die zu untersuchende Platte wird das eine Mal trocken, das andere Mal auf beiden Seiten befeuchtet eingelegt. Für Spiegelglas wurde $x = 38{,}3$ und für Marmor $x = 120$ gefunden.

In einer Schlussbemerkung weist der Verfasser darauf hin, dass die beschriebene Methode sich auch zur Messung elektrischer Widerstände eigne, wenn man statt der Temperatur das Potential misst. Wenn es sich um schnelle Messung mehrerer Widerstände handelt, könnte man mehrere Schichten übereinander legen, eine „Leitungssäule“ bauen. Rs.

L. Lorenz. Ueber das Leitungsvermögen der Metalle für Wärme und Elektricität. Wiedemann Ann. (2) XIII. 422-447, 582-606.

Eine Metallstange vom Querschnitt q werde an einem Ende erwärmt und für sie sei das Leitungsvermögen k, die Wärmecapacität c, die Dichtigkeit δ. Ferner seien u_0, u_l, ... u_{nl} die Temperaturen in $(n+1)$ um die Länge l von einander entfernten Punkten, und es werde gesetzt

$$u_0 - u_l - u_{(n-1)l} + u_{nl} = \Delta, \quad u_l + u_{2l} + \cdots + u_{(n-1)l} = \Sigma.$$

Dann ist $kq\Delta$ die vom betrachteten Teile der Stange in jeder Zeiteinheit empfangene Wärmemenge, welche teils zur Erwärmung des Metalles gebraucht (wozu der Betrag $\delta ql \frac{d\Sigma}{dt}$ erforderlich ist), teils an die Umgebung abgegeben wird. Dieser letzte Teil ist eine Function der Temperatur und kann annähernd als eine Function der mittleren Temperatur $\frac{\Sigma}{n-1}$ betrachtet wer-

den, wenn die Temperatur der einzelnen Teile nicht sehr verschieden ist. Man hat daher

$$\frac{kq}{l}\,\Delta = c\delta ql\,\frac{d\Sigma}{dt} + f(\Sigma).$$

Während die Stange an einem Ende erwärmt wird, beobachtet man den zeitlichen Verlauf von Δ und Σ unmittelbar mittels thermoëlektrischer Elemente; wenn man mit der Erwärmung aufhört, wird Δ bald in einen anderen sehr kleinen Wert Δ' übergehen und Σ die früher beobachteten Werte rückwärts durchlaufen. Für diese Beobachtungsreihe erhält man eine der ersten analoge Gleichung und durch Subtraction dieser von der ersten

$$\frac{kq}{l}(\Delta - \Delta') = c\delta ql\left(\frac{d\Sigma}{dt} - \frac{d\Sigma'}{dt}\right),$$

wo $\frac{d\Sigma}{dt} > 0$ und $\frac{d\Sigma'}{dt} < 0$ ist. Aus jeder einzelnen Beobachtungsreihe wird eine Reihe Bestimmungen von $\frac{c\delta l^2}{k}$ hervorgehen. In der Abhandlung ist noch eine genauere Ableitung gegeben, indem von der Differentialgleichung für die Wärmebewegung in einer Stange ausgegangen wird. Die dabei gefundenen Gleichungen werden bei den numerischen Berechnungen benutzt. Untersucht wurden Kupfer, Magnesium, Aluminium, Cadmium, Eisen, Zinn, Blei, Antimon und Wismuth, sowie die Legirungen rotes und gelbes Messing und Neusilber. Der Verfasser bestimmte das elektrische Leitungsvermögen der Metallstangen in absolutem Masse bei 0° und bei 100° nach der früher angegebenen Methode (Pogg. Ann. CXLIX. 251-269, siehe F. d. M. V. 1873. 572). Einige Beobachtungen wurden auch bei der Zimmertemperatur ausgeführt.

Da des Verfassers Resultate von denen des Herrn H. F. Weber abwichen, bestimmte er das Wärmeleitungsvermögen seiner Stangen auch nach der Methode von Forbes: der stationäre Temperaturzustand der am einen Ende erwärmten Stangen und die Erkaltung der zuerst gleichförmig erwärmten Stangen durch die äussere Wärmeleitung wurden beobachtet. Um die von der Oberflächeneinheit in der Zeiteinheit an die Umgebung abgegebene

Wärmemenge kennen zu lernen, wird der Fall untersucht: Eine Platte von der Höhe H und unendlich grosser Breite sei vertical aufgehängt und auf einer constanten Temperatur erhalten. Dann entstehen in der umgebenden kälteren Luft aufwärts gerichtete Strömungen, (die horizontalen Strömungen sollen vernachlässigt werden). Für jene Wärmemenge wird $h\vartheta(1+\eta\vartheta^{\frac{1}{4}})$ gefunden statt des in neuerer Zeit angegebenen Wertes $h\vartheta(1+\beta\vartheta)$, in dem ϑ den Temperaturüberschuss des Körpers über die Temperatur der Umgebung, h und β bez. η von ϑ unabhängige Constanten bedeuten. Wenn die Wärmeabgabe durch Strahlung gegen die durch Leitung nur gering ist, so kann einfacher gesetzt werden

$$-\frac{d\vartheta}{dt} = l\vartheta^{\frac{5}{4}},\quad \text{woraus folgt } t = \frac{4}{l}(\vartheta^{-\frac{1}{4}} - \vartheta_0^{-\frac{1}{4}}).$$

Die letzte Gleichung genügte zur Berechnung der Beobachtungen vollkommen. Für die Differentialgleichung, welche den bei stationären Temperaturen angestellten Versuchen entspricht, kann daher genommen werden

$$\frac{k}{c\delta}\frac{d^2u}{dx^2} = l'u^{\frac{5}{4}},$$

worin, wenn d der Durchmesser und L die Länge der Stange ist, l' durch die Proportion bestimmt wird:

$$l':l = 1:\left(1+\frac{d}{2L}\right).$$

Die Resultate der Controlversuche befinden sich in befriedigender Uebereinstimmung mit den zuerst gewonnenen Resultaten. Dagegen weichen sie von denen ab, welche Tait (Trans. Roy. Soc. of Edinb. 1878. 717) und H. F. Weber (Berl. Ber. 1880. 457-478, siehe F. d. M. XII. 793-794) erhalten haben.

Die Beobachtungen ergeben erstens für die besser leitenden Metalle eine Bestätigung des Gesetzes von Wiedemann und Franz, indem für diese Metalle das Verhältnis der beiden Leitungsvermögen für Wärme und Elektricität sowohl bei 0° als bei 100° nahezu constant ist. Dagegen wächst dieses Verhältnis für die schlechteren Leiter der Metalle stark mit abnehmendem Leitungsvermögen, wodurch anscheinend der Uebergang zu den

nicht-metallischen Leitern vermittelt wird. Zweitens zeigt sich bei allen Metallen (das Eisen ausgenommen), dass das Verhältnis $\frac{k_{100}}{\varkappa_{100}} : \frac{k_0}{\varkappa_0}$ constant und nahezu gleich 1,367 ist. Man wird also für die der absoluten Temperatur T entsprechenden Leitungsvermögen k und $\varkappa$ für Wärme und Elektricität $\frac{k}{\varkappa} = T \cdot \text{Const.}$ haben, ein Gesetz, das sogar noch allgemeiner gültig zu sein scheint als das vorige, indem auch Neusilber, Antimon und Wismuth sich in dieser Beziehung wie die übrigen Metalle verhalten. In sehr auffallender Weise bestätigt sich das Gesetz bei Neusilber und Messing, bei welchen die beiden Leitungsvermögen für Wärme und Elektricität sich mit der Temperatur ganz unregelmässig ändern. Dasselbe gilt in geringerem Grade für das Aluminium.

Theoretische Betrachtungen ergeben, dass $\frac{\bar{k}}{\varkappa} = A\left(\frac{E}{2}\right)^2 \bar{T}$ ist, was den Beobachtungsresultaten entspricht, und „dass wir wahrscheinlicherweise im Inneren eines Körpers ausser den Massenbewegungen elektrische Doppelschichten mit einem der Temperatur proportionalen Potentialunterschied und elektrische Ströme als verschiedene Formen der Energie antreffen werden."

Rs.

E. Lecher. Ueber die spectrale Verteilung der strahlenden Wärme. Wien. Anz. 1881. 193-194.

Ein Referat wird gegeben werden, sobald die Abhandlung selbst vorliegt. Vorläufig genüge der Hinweis auf die vom Verfasser gegebene Inhaltsangabe. Rs.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1.

Geodäsie.

H. Bruns. Bemerkung über die geodätische Linie. Jordan, Z. f. V. 1881. 298-301.

Es wird gezeigt, wie man durch eine kleine Abänderung des Gedankenganges in Gauss' Disquisitiones generales etc. die Minimumseigenschaft der geodätischen Linie aus der Eigenschaft der Schmiegungsebene ohne Anwendung der Variationsrechnung herleiten kann. B.

E. Pucci. Réduction des observations astronomiques et des angles géodésiques d'une surface de niveau à une autre. Astr. Nachr. No. 2363.

Die genannten Reductionen werden unter der Voraussetzung entwickelt, dass die Niveauflächen Rotationsellipsoide mit derselben Axe, demselben Mittelpunkte und derselben Abplattung seien. B.

Ch. M. Schols. Over de aansluiting van een driehoeksnet van lagere orde aan een driehoeksnet van hoogere orde. Amst., Versl. en Mededeel. XVI. 297-349.

Bei der Ausmessung eines Terrains wird dasselbe zuerst durch ein Netz von geraden Linien bedeckt, welche genau aufgenommen werden, und in Beziehung auf welche später die Details abgemessen werden. War auf dem Terrain früher eine grosse Triangulation ausgeführt, so ist es wünschenswert, das Netz für die Detailmessung damit zu verbinden. Eine der Methoden, welche hierbei in Anwendung kommen können, besteht darin, dass man das Netz der niederen Ordnung zu einem selbständigen Dreiecksnetz ausbildet und dies mit dem Netz der höheren Ordnung dadurch verbindet, dass man in jenem zwei, drei oder mehr Punkte von diesem mit aufnimmt. Je grösser die Anzahl von Anschlusspunkten ist, desto complicirter wird die Berechnung; man beschränkt sich deshalb meistens auf den Anschluss dreier Punkte in der Art, dass man die Dreieckspunkte der niederen Ordnung, welche innerhalb des nämlichen Dreiecks der höheren Ordnung liegen, an die drei Winkelpunkte dieses Dreiecks anschliesst. Ueber die Art und Weise dieses Anschlusses wird sodann weiter ausführlich gesprochen und eine neue Methode dafür angegeben. Sie stützt sich auf die Theorie der conformen Abbildung von Oberflächen, wie Gauss dieselbe zuerst in seiner bekannten Abhandlung vollständig entwickelt hat; nach dieser Methode wird ein gegebenes Netz berechnet. Dabei zeigt sich, dass sie genauer ist wie die gebräuchlichere Methode der parallelen Verschiebung. G.

H. J. S. Smith. On a property of a small geodetic triangle on a surface. Brit. Ass. Rep. 1881.

Csy.

C. W. Baur. Verschiebung eines trigonometrischen Netzes. Jordan, Z. f. V. 1881. 402-408.

Der Verfasser entwickelt die Ausdrücke für die Aenderungen der Coordinaten in einem von zwei Fundamentalpunkten aus bestimmten Netze, wenn letztere kleine Aenderungen erfahren.

B.

E. Pucci. Sulla teoria delle basi geodetiche. Batt. G. XIX. 151-156.

Entwickelt den analytischen Ausdruck für den Fehler, welchen man begeht, wenn man bei Basismessungen in der üblichen Weise für die Bogenstücke der geodätischen Linie Bogen von Normalschnitten, resp. von osculirenden Kreisen substituirt.

B.

Fr. W. Rex. Die trigonometrische Punkteinschaltung nach der Methode der kleinsten Quadrate unter Anwendung logarithmischer Differenzen. Jordan, Z. f. V. 1881. 377-386.

Es wird gezeigt, wie man zur Bildung der Coefficienten der Fehlergleichungen die logarithmischen Differenzen, welche bei der Berechnung der Widersprüche vorkommen, unmittelbar benutzen kann. B.

J. Schlesinger. Maximalfehler bei Polygonisirungen und ihre Bedeutung in der Vermessungspraxis. Wien. W. Frick. Centr. f. d. Forstw. 1881.

Von vorwiegend praktischem Interesse; Verfasser entwickelt zur Beurteilung der Genauigkeit von Polygonaufnahmen Vorschriften, bei deren Begründung von dem möglichen Maximalfehler, anstatt von dem zu fürchtenden mittleren Fehler ausgegangen wird. B.

Nell. Schleiermacher's Methode der Winkelausgleichung in einem Dreiecksnetze. Jordan, Z. f. V. 1881. 1-11, 109-121.

Die genannte Methode beruht darauf, dass zunächst durch eine unvollständige Ausgleichung die Widersprüche in den Winkelgleichungen beseitigt werden, wodurch bei der Ausführung der vollständigen Ausgleichung die Anzahl der Normalgleichungen um die Anzahl der Winkelgleichungen vermindert wird. Der

vorliegende Aufsatz entwickelt die dieser Methode entsprechenden Rechnungsvorschriften und erläutert sie an mehreren Beispielen. B.

W. L. Marcy. Determination of a meridian. Anal. VIII. 63-72.

Regeln zur Bestimmung eines Meridians, nebst Tafeln. Jn. (O.).

J. Lüroth. Notiz über die Rectification eines Ellipsenbogens. Jordan, Z. f. V. 1881. 225-226.

Entwickelt man die Länge eines Meridianbogens nach der geographischen oder der reducirten Breite in trigonometrische Reihen, so treten in den Coefficienten dieselben Functionen der Abplattung auf, wie bereits von Herrn Helmert angegeben worden war und in vorliegender Notiz bewiesen wird. B.

L. Jansk. Bz. Groot cirkel zeilen. Nieuw. Arch. VII. 91-101.

In der Nautik sind acht Methoden bekannt, um die Aufgabe des Segelns längs eines grössten Kreises zu lösen. Verfasser giebt hier eine neunte an und dazu eine Tafel für die Berechnungen und Constructionen. Die neue Methode besteht in Folgendem.

Man zieht auf der bekannten Mercator'schen Karte die gerade Loxodrome von dem Ort der Abfahrt zu dem Ort der Ankunft und bestimmt auf bekannte Weise den loxodromischen Cours der Abfahrt. Mit dem Längenunterschied beider Orte und mit der Breite der Fahrt sucht man in der Tafel den Unterschied zwischen dem loxodromischen Cours und dem des grössten Kreises und setzt diesen Winkel an die Loxodrome nach dem nächsten Pol aus; diese Linie ist die Richtung, in welcher man längs des grössten Kreises abfahren muss, welche man bis zu einem fol-

genden Ausgangspunkt behält, um dort wieder dieselbe Methode anzuwenden.

Diese Methode wird durch einige Beispiele erläutert und gezeigt, dass sie genauere Resultate giebt, als die meist angewendete. G.

F. Folie. Sur la cause probable des variations de latidude et du magnétisme terrestre. Belg. Bull. (3) II. 453-458.

Diese Ursache kann vielleicht in Oscillationen der festen Erdrinde um den flüssigen Kern und der Reibung beider aneinander liegen. Mn. (O.).

G. H. Darwin. On the stresses caused in the interior of the earth by weight of continents and mountains. Lond. R. S., Proc. XXXII. 432-435.

Auszug aus einer Arbeit, die in den Phil. Trans. erscheinen wird. Cly. (O.).

Th. Müller. Ueber Erdmassenberechnung. Jordan, Z. f. V. 1881. 137-144.

Der Verfasser behandelt die Sinram'sche Formel für die Berechnung des Prismatoid-Inhalts, bei welcher statt der drei in der gewöhnlichen Formel auftretenden Durchschnitte nur zwei auftreten. B.

G. Ferraris. Sui cannocchiali con objettivo composto di più lenti a distanza le une dalle altre. Torino, Atti. XVI. 45-71.

Veranlasst durch die Eigentümlichkeiten des von Porro für tachymetrische Zwecke construirten anallaktischen Fernrohrs stellt sich der Verfasser die Aufgabe, eine allgemeine Theorie solcher Fernrohrconstructionen abzuleiten. § 1 entwickelt für ein centrirtes Linsensystem die Beziehungen zwischen den Cardinal-

punkten des ganzen Systems und der einzelnen Gruppen, in welche man das System zerlegen kann. § 2 behandelt mit besonderer Rücksicht auf das anallaktische Objectiv für zwei Linsen ausführlich folgende zwei Aufgaben: Gegeben der Abstand zwischen der zweiten Hauptebene der ersten, und der ersten Hauptebene der zweiten Linse, ferner der zweite Brennpunkt des Systems; gesucht eine solche Form des Systems, dass entweder der erste Brennpunkt eine vorgeschriebene Lage, oder die Brennweite einen vorgeschriebenen Wert annimmt. Veranlasst durch die hierbei auftretende Frage nach Constructionen, die auch in Bezug auf die Vergrösserung möglichst vorteilhaft sind, berührt dann Verfasser in § 3 noch den Fall des anallaktischen Objectivs aus mehr als zwei Linsen. B.

Capitel 2.

Astronomie.

A. Hall. Notes on Gauss' Theoria motus. Anal. VIII 83-88.

Erläuternde Notizen zum Gebrauch für Studenten.

Jn. (O.).

Y. Villarceau. Note sur les méthodes de Wronski. C. R. XCII. 815-821.

B.

W. Matzka. Zur christlichen Zeitrechnung und für deren Verbesserung. Prag. Abh. (6) X. No. 5.

Die Arbeit bietet mehr Interesse vom Standpunkte der Chronologie als der Mathematik. Sie giebt in ihrem ersten Teil vereinfachte Vorschriften für Berechnungen der Wochentage zu angegebenen Monatstagen, des Wochenordners des Jahres, des

Datums des Osterfestes (mit Hülfe der mittleren synodischen Mondmonate und mit Hülfe der metonischen neunzehnjährigen Mondcyklen). Daran knüpfen sich im fünften Paragraphen Betrachtungen über Festlegung von Ostern. Im zweiten Teile finden sich Betrachtungen und Vorschläge zu einer Verbesserung der Zeitrechnung. O.

N. Herz. Note zur Lösung des Keppler'schen Problems. Astr. Nachr. No. 2354.

Zur Lösung der Keppler'schen Gleichung wird eine directe Näherungsformel mitgeteilt, welche die sechsten Potenzen der Excentricität berücksichtigt. B.

G. Sidler. Schreiben an den Herausgeber. Astr. Nachr. No. 2361.

Beweis des Satzes von Lehmann-Filhés (cfr. F. d. M. XII. 1880. 861.). B.

A. de Gasparis. Altre serie fra anomalie e raggio vettore nelle ellissi planetarie. Nap., Rend. XX. 260-264.

A. de Gasparis. Alcuni teoremi sulle ellisse istantanea planetarie. Nap., Rend. XIX. 1880. 219-227.

E. Weiss. Ueber die Berechnung der Differentialquotienten des Radiusvectors und der wahren Anomalie nach der Excentricität in stark excentrischen Bahnen. Wien. Anz. 1881. 47.

Mitteilung der betreffenden Ausdrücke ohne Herleitung. B.

O. STONE. On the ratio between sector and triangle in the orbit of a celestial body. Sylv., Am. J. III. 326-329.

Herleitung eines einfachen Näherungswertes für das genannte Verhältnis. B.

CH. HERMITE. Extrait d'une lettre à M. Gyldén. Astr. Nachr. No. 2402.

Auswertung des elliptischen Integrals

$$\int \frac{dn^4 u}{(sn^2 a - sn^2 u)^2}\, du.$$

B.

E. WEISS. Ueber eine neue Methode zur Berechnung der wahren Anomalie in stark excentrischen Bahnen. Wien. Anz. 1881. 119-123.

Vorläufige Mitteilung über ein neues Verfahren zur Lösung der genannten Aufgabe, sowie über ein Mittel, die von Gauss für dieselbe Aufgabe in der Theoria motus gegebene indirecte Methode in eine directe zu verwandeln. Das Verfahren des Verfasser beruht (in der Bezeichnung der Th. motus) auf folgendem Gedankengang: Es werden die Hülfsgrössen V und V_0 durch die Relationen

$$\operatorname{tg}\frac{V}{2} = \sqrt{\frac{3e-1}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v}{2}, \qquad \frac{kt\sqrt{3e-1}}{2q^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{tg}\frac{V_0}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{V_0^3}{2}$$

bestimmt und die Reduction von V_0 auf V durch Reihenentwicklungen dargestellt, deren Coefficienten Potenzen von $1-e$ enthalten. B.

R. RADAU. Travaux concernant le problème des trois corps et la théorie des perturbations. Darb. Bull. (2) V. 270-295.

Siehe Abschn. X. Cap. 4. A. p. 696. O.

A. DE GASPARIS. Sui rapporti delle variazioni simultanee di alcuni elementi di ellisse istantanee nel problema dei tre corpi. Astr. Nachr. No. 2357-2359; Nap., Rend. XIX. 118-132, 166-175; XX. 101-112.

Entwickelt die Ausdrücke für die Differentialquotienten der Parameter, Neigungen, Knotenlängen und grossen Axen in den osculirenden Ellipsen, welche im Dreikörperproblem der relativen Bewegung eines jeden Punktes um jeden der beiden andern entsprechen. B.

A. DE GASPARIS. Sopra una relazione di distanze nel problema dei tre corpi. Nap., Rend. XIX. 13-19.

Siehe F. d. M. XII. 1880. p. 859. O.

F. TISSÉRAND. Sur le développement périodique d'une fonction quelconque des rayons vecteurs de deux planètes. C. R. XCII. 154-157.

Siehe Abschn. V. Cap. 2. p. 196.

A. DE GASPARIS. Sopra una equazione fra le derivate parziali delle distanze inverse di tre pianeti che scambievolmente si attraggono. Rom., Acc. L. Mem. (3) V. 79-80.

B.

A. DE GASPARIS. Sulla variazione del differenziale del quadrato della distanza fra due pianeti, prodotto dalla influenza perturbatrice di un terzo pianeta. Nap., Rend. XIX. 81-84.

F. TISSÉRAND. Sur les déplacements séculaires des plans des orbites de trois planètes. C. R. XCIII. 525-531.

Die Aufgabe führt in der Form, welche ihr Lagrange gegeben (cf. F. d. M. VIII. 1876. 739), auf die Integration des folgenden Systems von Differentialgleichungen:

$$A\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\Theta},\quad A\sin\varphi\,\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi},$$

$$A'\sin\varphi'\,\frac{d\varphi'}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\Theta'},\quad A'\sin\varphi'\,\frac{d\Theta'}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi'},$$

$$A''\sin\varphi''\,\frac{d\varphi''}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\Theta''}\quad A''\sin\varphi''\,\frac{d\Theta''}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi''}.$$

Hierin sind die φ die Neigungen, die Θ die aufsteigenden Knoten der drei Bahnen in Bezug auf eine feste Ebene, die A Constanten, welche von den Massen und den Halbaxen abhängen; endlich ist

$$\Omega = C\cos z + C'\cos z' + C''\cos z'',$$

wo die C von den Massen und den Halbaxen abhängige Constanten und die z die Seiten des von den drei Bahnpolen gebildeten Dreiecks bedeuten. Es wird gezeigt, dass sich die Lösung vollständig mit Hülfe der elliptischen Functionen absolviren lässt. B.

G. W. Hill. Notes on the theories of Jupiter and Saturn. Anal. VIII. 33-40, 89-93.

Es werden nur die wechselseitigen Wirkungen von Sonne, Jupiter und Saturn betrachtet. „Bezeichnet man die Coordinaten der Sonne mit X, Y, Z, so sind die des Jupiters $X+x+kx'$, $Y+y+ky'$, $Z+z+kz'$, die des Saturn $X+x'+kx$, $Y+y'+ky$, $Z+z'+kz$, wo k eine kleine Constante ist, die so zu bestimmen ist, dass die Variabeln x, x'... orthogonal sind.“ Für k findet sich 0,0002197088. Jn. (O.).

A. de Gasparis. Sulla variazione che si produce nel raggio vettore di un pianeta perturbato durante un tempo infinitesimo. Nap., Rend. XIX. 67-70.

A. DE GASPARIS. Ulteriore uso ed estensione della formola pel calcolo delle perturbazioni. Nap., Rend. XIX. 1880. 95-99.

A. DE GASPARIS. Serie per il moto perturbato, compresi i termini fino alle settime potenze del tempo. Nap., Rend. XX. 134-142, 151-159.

G. W. HILL. Note on Hansen's general formulae for perturbations. Sylv., Am. J. IV. 256-259.

Die letzte Form, in der Hansen (Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten; Leipz. Abh. III.) die Störungen ausdrückte, war folgende:

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + \int \left\{ \overline{W} + \frac{h_0}{h} \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \right\} n_0 dt,$$

$$\nu = C - \frac{1}{2} \int \left(\frac{d\overline{W}}{dz} \right) dt.$$

Herr Hill giebt der Gleichung zur Bestimmung des ν die für die Berechnung vorteilhaftere Form:

$$\nu = -\frac{1}{6}(X_0 + PX_1) - \frac{1}{2}\left((1+\nu)^2 \frac{d.\delta\nu}{dt} + \nu^2\right) + \frac{\left((1+\nu)^2 \frac{d\delta z}{dt} + 2\nu + \nu^2\right)^2}{3(1+\nu)^2\left(1 + \frac{d.\delta z}{dt}\right)}.$$

M.

O. CALLANDREAU. Remarques sur le calcul des perturbations relatives d'après la méthode de M. Gyldén. C. R. XCIII. 201-204.

Die Bemerkungen beziehen sich wesentlich auf die rechnerische Praxis. B.

H. Gyldén. Sur l'intégration d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre dont dépend l'évection. C. R. XCIII. 127-131.

Die genannte Differentialgleichung hat die Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(1+\psi_1) = \psi_0,$$

wo die ψ periodische Functionen von t sind. Unter gewissen Voraussetzungen über die Grösse der Coefficienten in den ψ wird die Aufgabe auf die Integration von Gleichungen der Form

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (a_0 + a_1 \cos t)z = P$$

reducirt, wo die a Constanten und P eine bekannte Function von t bedeuten. Durch angemessene Substitutionen wird die Integration dieser Gleichungen auf die Lamé'sche Gleichung zurückgeführt. B.

O. Callandreau. Sur la théorie du mouvement des corps célestes. C. R. XCIII. 779-781.

Herleitung der von Herrn Gyldén für die Variation und Evection aufgestellten Störungsformeln. B.

O. Callandreau. Contribution à l'application des fonctions elliptiques à l'astronomie. Astr. Nachr. No. 2389.

Erläutert an einem numerischen Beispiele die Entwickelung von Störungsausdrücken durch Einführung elliptischer Amplituden als Argumente. B.

A. Donner. Das Argument der Gyldén'schen Theorie der Planetenstörungen. Astr. Nachr. No. 2382.

Verfasser teilt die Substitutionen mit, durch welche Herr Gyldén bei den Störungen der kleinen Planeten den Ausdruck für die Distanz zwischen dem gestörten und dem störenden Kör-

per umformt, um rasch convergente Reihenentwickelungen zu erhalten. B.

H. Gyldén. Sur les inégalités à longues périodes dans les mouvements des corps célestes. C. R. XCII. 1033-1038.

Es wird gezeigt, wie sich die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2V}{du^2} + \alpha^2 \sin V \cos V = X,$$

in der α^2 eine Constante und X eine periodische Function von u bedeutet, unter gewissen Voraussetzungen über die numerischen Beträge von α^2 und X durch passende Approximationen auf die Lamé'sche Gleichung reduciren lässt. Hieran werden Bemerkungen über die Bedeutung der Glieder langer Periode bei Massenbestimmungen geknüpft. B.

A. de Gasparis. Sviluppo in serie della funzione perturbatrice secondo le potenze del tempo. Nap., Rend. XIX. 1880. 20-21.

Entwickelung der Störungsfunction

$$\Omega = \frac{1}{\varrho_{12}} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3}$$

in eine Reihe. O.

O. Backlund. Ableitung von Prof. Gyldén's Differentialgleichungen für die intermediäre Bewegung. Astr. Nachr. No. 2402.

Enthält eine Ableitung der genannten Differentialgleichungen, welche einfacher ist als die von Herrn Gyldén gegebene. B.

H. Gyldén. Ueber die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper. Astr. Nachr. No. 2383.

Vorläufige Mitteilung über neue Störungsformeln, deren wesentlicher Unterschied von den bisherigen darin besteht, dass als erste Approximation nicht eine Keppler'sche Ellipse, sondern eine complicirtere Curve zu Grunde gelegt wird, welche dadurch entsteht, dass bei der ersten Approximation schon gewisse Glieder der Störungsfunction mit hinzugezogen werden.

B.

H. Gyldén. Sur la théorie du mouvement des corps célestes. C. R. XCII. 1262-1265.

Vorläufige Mitteilung über die neuen Störungsformeln des Verfassers, bezüglich deren das Referat nach Erscheinen der angekündigten grösseren Abhandlung zu geben ist. B.

A. d'Abbadie. Les desiderata de l'astronomie. Brux., Ann. S. Sc. V. B. 123-138.

Für die theoretische Astronomie handelt es sich darum, ob die Einführung elliptischer Functionen nicht den Einfluss der Glieder, welche man jetzt in den Reihenentwickelungen vernachlässigt, besser erkennen lassen würde. Für die astronomischen Rechnungen muss die Decimalteilung eingeführt werden, da sie, wie die Erfahrung lehrt, die Rechnungen abkürzt. So hat Herr Airy alle vor ihm gemachten Mondbeobachtungen in Decimalteilung transformirt, bevor er sie reducirte. Die ersten Berechnungen einer Beobachtung müssen ferner sofort und durch den Beobachter selbst gemacht werden, um die groben Beobachtungsfehler entdecken und die aus den Beobachtungen gezogenen oft unerwarteten Folgerungen verificiren zu können. In Folge der Unterlassung dieser Vorsicht hat Lemonnier den Uranus und Lalande den Neptun beobachtet ohne es zu ahnen. Giebt man ein Mittel, so muss man gleichzeitig die grössten Abweichungen geben und den wahrscheinlichen Fehler, vorausgesetzt dass die Zahl der Beobachtungen die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gestattet. Schliesslich macht der Verfasser darauf aufmerksam,

dass es eine Fülle von Beobachtungen giebt, mit denen sich die grossen Observatorien nicht belasten können, und die man doch ohne grosse Kosten machen könnte.

Mn. (O.).

D. Kirkwood. On the limit of planetary stability.
Anal. VIII. 1-3.

Angenäherte numerische Schätzungen der Entfernungen, in welchen die störende Kraft des Centralkörpers gleich ist der Attractionskraft der Planeten für den Fall des Sonnensystems und einiger Planetensysteme. Jn. (O.).

A. Morth. On the determination of the moon's libration.
Month. Not. XLI. 420-431.

In der Methode, welche bei einer Reihe von Untersuchungen über die Libration des Mondes befolgt worden ist, wurde die scheinbare Lage eines Fleckens, bezogen auf den Mittelpunkt der Mondscheibe und den Declinationskreis, hergeleitet aus den gemessenen Entfernungen und Positionswinkeln von Punkten der Mondränder in Beziehung auf den Punkt. Aus diesen scheinbaren Coordinaten wurden dann die selenocentrische Rectascension und Declination hergeleitet und diese in die ekliptische Länge und Breite umgewandelt. Dann wurden die Resultate verglichen mit der selenocentrischen Länge und Breite, die aus angenäherten Werten der selenographischen Coordinaten des Fleckes und der Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik berechnet waren. So ergaben sich Gleichungen, welche die Wirkung der Correctionen aus diesen Werten und Glieder darstellen, welche von der physischen Libration herrühren.

Der Verfasser befolgt einen anderen Weg. Er geht von angenommenen selenographischen Coordinaten des Fleckes über zu seinen scheinbaren Coordinaten, bezogen auf die Mondscheibe und die Richtung der Mondaxe, um die Correctionen dieser Coordinaten zu bestimmen, welche den Messungen am besten genü-

gen, und die Gleichungen zwischen den Correctionen und der Wirkung der Mondlibration auf diese Coordinaten aufzustellen.

Glr. (O.).

H. Gyldén. Beiträge zur Theorie der Librationserscheinungen. Astr. Nachr. No. 2401.

Verfasser behandelt die näherungsweise Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2V}{du^2} + \alpha^2 \sin V \cos V = X,$$

wo X eine bekannte Function von u, α eine Constante bedeutet, unter Reduction derselben auf eine Lamé'sche Gleichung, und bespricht die Bedeutung seiner Resultate für die Theorie der Erscheinungen, welche man kurz als Librationen bezeichnet.

B.

G. B. Airy. Effect on the moon's movement in latitude produced by the slow change of position of the plane of the ecliptic. Month. Not. XLI. 264-271, 375.

J. C. Adams. Note on the inequality in the moon's latitude which is due to the secular change of the planes of the ecliptic. Month. Not. XLI. 385-403.

Die erste theoretische Erläuterung dieser Ungleichheit wurde 1849 von Hansen gegeben. In der vorliegenden Arbeit giebt Herr Adams 1) eine Untersuchung der Ungleichheit in der Mondbreite, welche von der secularen Bewegung der Ekliptikebene herrührt, 2) eine theoretische Erläuterung derselben Ungleichheit, welche er ursprünglich 1859 Herrn Godfray mitgeteilt hatte, und die in seinem Werke: „Elementary treatise on the lunar theory" publicirt worden ist, und 3) eine Note über eine Stelle in der „Mécanique céleste." T. III. p. 185 (1802). Er zeigt, dass der von Laplace gegebene Ausdruck nur einer sehr geringen Umformung bedarf, um für die betreffende Ungleichheit ein

Resultat zu geben, welches mit dem Werte der von Hansen gegebenen Formel identisch ist. Herr Airy giebt einige Ergänzungen zu der Adams'schen Arbeit. Glr. (O.).

M. W. Meyer. Bahnbestimmung der Satelliten des Saturn, Enceladus, Thetis, Dione und Rhea nach einer neuen Methode. Astr. Nachr. No. 2375.

Verfasser teilt die Formeln mit, nach denen er die elliptischen Elemente der genannten Saturns-Satelliten aus eigenen Beobachtungen abgeleitet hat. B.

A. Hall. The secular displacement of the orbit of a satellite. Anal. VIII. 177-187.

Es werden die Störungen untersucht, die von der Wirkung der Sonne und der sphäroidischen Form herrühren und numerische Resultate für die Satelliten von Saturn und Mars mitgeteilt. Jn. (O.).

A. de Gasparis. Sopra una nuova formola pel calcolo delle orbite delle stelle doppie. Rom., Acc. L. (3) V. 133-134.

B.

H. Hennessy. On the figures of the planets. Phil. Mag. 1881.

Die Arbeit beschäftigt sich damit, zu zeigen, dass bei den inneren Planeten Mars, Venus, Merkur und Erde die Abplattung an den Polen mit grösserer Wahrscheinlichkeit auf ihren ursprünglich flüssigen Zustand als auf Erosion zurückzuführen ist. Die Formel für die Abplattung aus letzterem Grunde wäre

$$e = \frac{5}{2} Q \left(\frac{D}{5D - 3D'} \right),$$

wo Q das Verhältnis der Centrifugalkraft zur Schwere am Aequa-

tor, D die mittlere Dichte, D' die an der Oberfläche ist. Diese Formel ist übrigens vom Verfasser in C. R. 1880 publicirt.

Csy. (O.).

H. Hennessy. Sur la figure des planètes. C. R. XCII. 225-228.

Verfasser sucht weiteres Material dafür beizubringen, dass die Annahme eines früher flüssigen Zustandes bei den inneren Planeten besser mit den Beobachtungen harmonire, als die Annahme einer Formänderung durch Erosionswirkung.

B.

G. H. Darwin. On the tidal friction of a planet attended by several satellites and on the evolution of the solar system. Phil. Trans. CLXXII. 491-535, Lond., R. S., Proc. XXXI. 322-325.

Letzteres ist ein Auszug aus den Arbeit in den Phil. Trans. Die Arbeit ist die Fortsetzung der 1879 und 1880 in den Phil. Trans. und den Proc. der Royal Society erschienenen. Sie besteht aus zwei Teilen. I) Theorie der Flutreibung eines Planeten, der von einigen Satelliten angezogen wird, besteht aus mehreren Paragraphen. 1) Aufstellung und Begrenzung des Problems. 2) Bildung und Transformation der Differentialgleichungen. 3) Methode zur Lösung der Gleichungen durch Rechnen. 4) Graphische Lösung für den Fall von nicht mehr als drei Satelliten und 5) Graphische Methode für den Fall von zwei Satelliten. II. „Discussion der Wirkung der Flutreibung mit Rücksicht auf die Evolution des Sonnensystems", umfasst die Abschnitte 6) Allgemeine Betrachtung des Problems, bezogen auf das Sonnensystem. 7) Numerische Data und Folgerungen daraus. 8) Ueber den Anteil der Flutreibung bei der Evolution planetarer Massen und 9) Allgemeine Discussion und Schlussfolgerung.

Cly. (O.).

A. SPRUNG. Ueber die Bahnlinien eines freien Teilchens auf der rotirenden Erdoberfläche und deren Bedeutung für die Meteorologie. Wiedemann Ann. (2) XIV. 128-149.

Behandelt die Bahn eines Teilchens, welches sich unter dem Einflusse der Erdanziehung auf der rotirenden Erdoberfläche ohne Reibung bewegt, und bespricht die Folgerungen, welche sich daraus für die Deutung meteorologischer Vorgänge ziehen lassen. B.

W. D. NIVEN. On a special form of Laplace's equation. Mess. (2) X. 114-117.

Die Form der Gleichung ist:

$$\frac{d}{d\varrho}(c+e^{\varrho}\cos\theta)\frac{dV}{d\varrho}+\frac{d}{d\theta}(c+e^{\varrho}\cos\theta)\frac{dV}{d\theta}=0,$$

wo

$x=(c+r\cos\theta)\cos\varphi$, $y=(c+r\cos\theta)\sin\varphi$, $z=r\sin\theta$, $\varrho=\log r$. Dabei wird vorausgesetzt, dass V für alle Längen denselben Wert hat. Von dieser Gleichung werden zwei specielle Lösungen gegeben:

$$(1)\qquad V=\frac{A\sin\frac{1}{2}(\psi+\alpha)}{\sqrt{rr'}}.$$

Dabei ist r' die Entfernung eines Punktes P von dem θ gegenüberliegenden Schnittpunkt des Kreises in derselben Längenebene φ. ψ bezeichnet den Winkel zwischen r und r', α ist constant.

$$(2)\qquad V=\frac{2c}{\sqrt{rr'}}\left\{\cos\frac{1}{2}\psi\log\frac{R}{\sqrt{2c}}-\sin\frac{1}{2}\psi.\chi\right\}$$

und

$$=\frac{2c}{\sqrt{rr'}}\left\{\sin\frac{1}{2}\psi\log\frac{R}{\sqrt{2c}}+\cos\frac{1}{2}\psi.\chi\right\},$$

wo

$$R^2=r+r'+2\sqrt{rr'}\cos\frac{1}{2}\psi\quad\text{und}\quad\operatorname{tang}\chi=\frac{r-r'+2c}{-r+r'+2c}.$$

Glr. (O.).

Tägert. Ueber die Einwirkung der Ebbe und Flut auf die Präcession und Nutation sowie auf die Drehungsgeschwindigkeit der Erde. Pr. Siegen.

Behandlung des von Laplace im zweiten Bande der Mécanique céleste bearbeiteten Problems unter Berücksichtigung der zweiten Potenz der störenden Kräfte. Die Resultate stimmen mit denen von Laplace überein. Ein näheres Eingehen würde einen so grossen Formelapparat erfordern, dass der hier gestattete Raum nicht ausreichen würde, weshalb auf die Arbeit selbst verwiesen werden muss. O.

S. Günther. Ein Ortsbestimmungsproblem der sphärischen Astronomie. Schlömilch Z. XXVI. 50-56.

Nach historischen Notizen wird das Problem auf das folgende geometrische Problem zurückgeführt: „Es soll in einem sphärischen Viereck der Durchschnittspunkt der Diagonalen gefunden werden, sobald die Coordinaten der vier Eckpunkte mit Bezug auf ein irgendwie gewähltes sphärisch-rechtwinkliges Axensystem gegeben sind.“ Dies Problem wird analytisch-geometrisch gelöst und das Resultat für die logarithmische Rechnung passend gemacht. O.

E. Weiss. Ueber die Bestimmung des Ortes eines Gestirns durch den Durchschnitt zweier grösster Kugelkreise. Schlömilch Z. XXVI. 201-204.

Lösung der Aufgabe, den Ort eines Objects an der Himmelskugel zu ermitteln, wenn bekannt ist, dass dasselbe im Durchschnittspunkte der Diagonalen oder der Seiten eines von vier bekannten Sternen gebildeten Vierecks liegt. Als Beispiel sind die Mästlin'schen Beobachtungen des Tychonischen Sternes berechnet.

B.

Ch. Rouget. Sur un procédé d'observation astronomique à l'usage des voyageurs, les dispensant de la mesure des angles pour la détermination de la latitude et du temps sidéral. C. R. XCII. 27-29.

Ch. Rouget. Sur un procédé d'observation astronomique à l'usage des voyageurs, les dispensant de la mesure des angles pour la détermination de la longitude. C. R. XCII. 69-71.

Die angegebenen Methoden kommen darauf hinaus, die Momente zu beobachten, wenn zwei Gestirne (zwei Sterne oder Mond und Sterne) gleiche Höhe oder gleiches, resp. entgegengesetztes Azimuth haben. B.

E. Adan. Latitude en voyage. Procédé graphique. Belg. Bull. (3) II. 112-127.

F. Folie. A propos de la détermination de la latitude. Belg. Bull. (3) II. 257-263.

Der erste Verfasser giebt eine einfache graphische Methode, um schnell die Breite eines Ortes zu bestimmen. Herr Folie zeigt, dass die Bessel'sche Methode sicherer und noch einfacher ist, wenn man Tafeln der natürlichen trigonometrischen Linien benutzt. Mn. (O.).

A. Handrick. Einige Aufgaben aus der sphärischen Astronomie. Pr. Neuhaldensleben.

Bekanntes. B.

C. Israel. Zur analytischen Behandlung scheinbarer Finsternisse. Bedingungsgleichung für die Parallaxe des Mondes und der näheren Planeten. Halle. H. W. Schmidt. Wochenschr. f. Astr. 1881.

C. Israel. Neue Darstellung der Hauptgleichung zur Berechnung der Länge zur See aus scheinbaren Monddistanzen. Halle. H. W. Schmidt. Wochenschr. f. Astr. 1881.

Formelentwickelungen, bezüglich deren auf die betreffenden Aufsätze zu verweisen ist. B.

D. P. Todd. Observations of the transit of Mercury, 1878, May 5-6 including a systematic search for a satellite and measures of the diameter of the planet. Amer. Ass., Proc. XXVIII. 74-77.

D. P. Todd. Preliminary account of a speculation and practical search for a transneptunian planet. Am. J. Sc. XX. 225-234.

D. P. Todd. Solar parallax from the velocity of light. Am. J. Sc. XIX. 59-64.

D. P. Todd. The Solar parallax as derived from the American photographs of the transit of Venus 1874, December 8-9. Am. J. Sc. XXI. 491-493.

D. P. Todd. Report on the total Solar eclipse of 1878. July 29. Washington Observ. 1876. App. III. Washington 1880.

B.

H. Seeliger. Ueber die Häufigkeit der Fixsternbedeckungen durch einen Planeten. Astr. Nachr. No. 2388, No. 2398.

Unter der Voraussetzung, dass Planet und Erde sich in Kreisbahnen in der Ekliptik bewegen, wird der auf elliptische Integrale führende Ausdruck für den Inhalt des Flächenstreifens hergeleitet, welcher in einer bestimmten Zeit von der Planetenscheibe am Himmel überstrichen wird. Diese Grösse liefert dann unter Annahme einer gleichförmigen Verteilung der Sterne sofort die gesuchte durchschnittliche Häufigkeit.

B.

H. Bruns. Bemerkungen über den Lichtwechsel der Sterne vom Algoltypus. Berl. Monatsber. 1881. 48-60.

Veranlasst durch den Versuch von Herrn Pickering, den Lichtwechsel des Algol durch einen umlaufenden dunklen Begleiter zu erklären, stellt sich Verfasser die Aufgabe, zu untersuchen, ob und wie weit es möglich ist, einen stetigen und regelmässig periodischen Lichtwechsel veränderlicher Sterne durch ungleiche Helligkeit an verschiedenen Stellen der Oberfläche in Verbindung mit einer Rotation um eine feste Axe zu erklären. Wird der Stern als sphärisch vorausgesetzt, und ist die Leuchtkraft für den Punkt mit der Poldistanz β und der Länge λ durch die Kugelfunctionenreihe

$$h(\beta,\lambda) = \sum_{m,n} A_{m,n}\, P(m,n,\beta) e^{in\lambda}$$

gegeben, wo

$$P(m,n,\beta) = \frac{1}{2^m}\frac{(i\sin\beta)^n}{(m+n)!}\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^m, \qquad \text{wo } x = \cos\beta,$$

so wird die scheinbare Helligkeit

$$H = 2\pi \sum_{m,n} A_{mn} P\left(m, n, \frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) e^{-nit} K_m,$$

wo

$$K_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}+\delta} F(\gamma) P_m(\cos\gamma)\sin\gamma\, dx.$$

Hierbei ist die Rotationsdauer gleich 2π; t ist die Zeit, $\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ die Poldistanz der Richtung nach der Erde, $F(\gamma)$ eine von dem Emissionsgesetz und der Beschaffenheit einer etwaigen Atmosphäre abhängige Function, δ die Horizontalrefraction für den Stern. Es wird dann gezeigt, dass es immer möglich ist, durch passende Annahmen über die Functionen h und F, sowie über die Grössen ε und δ zwischen der entsprechenden Function H und einer beobachteten Helligkeitscurve Uebereinstimmung mit einem beliebigen Grade von Genauigkeit zu erreichen. B.

R. Lehmann-Filhés. Ueber die mutmassliche Verteilung der Radiationspunkte. Astr. Nachr. No. 2405.

Der Verfasser hatte bei einer früheren Untersuchung über diesen Gegenstand (cf. F. d. M. XII. 1880. 866) die Voraussetzungen benutzt, dass die Meteorbahnen Parabeln seien, und dass in grosser Entfernung von der Sonne die Verteilung der Bewegungsrichtungen als eine zufällige angesehen werden könne. Der Verfasser nimmt nun die Untersuchung wieder auf, indem er die Annahme streng parabolischer Bahnen fallen lässt. Hierbei zeigt sich, dass die Verteilung der Radianten sehr wesentlich durch die Art der Abweichung des Bahnkegelschnitts von einer Parabel beeinflusst werden kann. B.

H. Gyldén. Ueber die Bessel'sche Theorie der Refraction. Astr. Nachr. No. 2380.

Verfasser giebt eine Darlegung der Gründe, welche ihn seiner Zeit veranlassten, bei seinen Untersuchungen über Refraction die Bessel'sche Theorie aufzugeben, indem er speciell den Punkt, in welchem diese Theorie mangelhaft ist, erörtert.

B.

M. Löw. Zur Theorie des Passageninstruments im ersten Vertical. Astr. Nachr. No. 2371, 2393.

Verfasser polemisirt gegen Verwechslungen und Unklarheiten, welche sich seiner Ansicht nach in die Darstellung der Rechnungsvorschriften für Beobachtungen im ersten Vertical eingeschlichen haben, und betont die Vorzüge des von Bessel angegebenen Reductionsverfahrens. B.

A. Schmidt. Theorie der Teilungsfehler am Meridiankreise. Astr. Nachr. No. 2372-2374.

Verfasser untersucht zunächst den Einfluss, welchen die Zapfengestalt des Instruments auf die Ablesungen ausübt, und giebt sodann eine Theorie der Teilungsfehler im engeren Sinne,

welche von der Beschaffenheit des Kreises selbst herrühren, wobei die Bessel'sche Methode, Teilungen zu untersuchen, ausführlicher discutirt wird. B.

J. A. C. Oudemans. Ueber die Compensation eines Secundenpendels für Temperatur und Luftdruck vermittels eines Quecksilbercylinders und eines Krüger'schen Manometers. Astr. Nachr. No. 2378-2380.

Der Aufsatz enthält eine vollständige Theorie des mit einem Manometer versehenen Quecksilberpendels und entwickelt in ausführlicher Weise die Vorschriften, welche zur Berechnung eines solchen Pendels erforderlich sind. B.

Anhang.

O. Schlömilch. Handbuch der Mathematik. Breslau. Trewendt.

Laut Erklärung des Herausgebers (Grunert Arch. LXX. ist kein Teil des Buchs von ihm selbst bearbeitet; vielmehr sind die auf dem Titel als Mitwirkende genannten Dr. Reidt und Prof. Dr. Heger ausschliesslich die Verfasser. Ersterer hat die Arithmetik und Algebra (einschliesslich Combinatorik, Reihen und Determinanten), ferner Planimetrie, Stereometrie und Trigometrie verfasst. Die von Letzterem bearbeiteten Abschnitte sind betitelt: Darstellende Geometrie, analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung, Ausgleichungsrechnung, Renten- etc. Versicherung. Die Bezeichnung als analytische Geometrie ist nicht zutreffend; denn gemäss der Erklärung, welche dieser Geometrie ausdrücklich eine synthetische Aufgabe zuweist, und gemäss der Ausführung, welche sich in synthetischem Fortschritt nur auf Curven und Flächen zweiten und dritten Grades erstreckt, die Existenz einer allgemeinen Theorie der Curven und Flächen hingegen gänzlich ignorirt, ist jener Abschnitt nur eine Coordinatenlehre mit der genannten Anwendung in synthetischer Behandlung. H.

H. Heilermann u. J. Diekmann. Lehr- und Uebungsbuch für den Unterricht in der Algebra an Gymnasien, Real- und Gewerbeschulen. I. Teil. 2te vermehrte Auflage. Essen. G. D. Bädecker.

Der vorliegende erste Teil dieses Lehrbuches, dessen erste Auflage 1878 erschienen, ist für die Klassen Quarta und Tertia bestimmt und umfasst die vier Grundoperationen und die linearen Gleichungen. Auf die in klarer Form ausgesprochenen Begriffe und Lehrsätze folgt in jedem Paragraphen eine Anzahl von Uebungsbeispielen. Die Division schliesst mit der Theorie der Decimalbrüche und den Elementen der Theorie der Teilbarkeit der Zahlen. Die Theorie der linearen Gleichungen enthält die Elemente der Determinanten. An verschiedenen Stellen sind knappe, für Schüler wohl ausreichende historische Notizen in Anmerkungen beigefügt. M.

K. Schmeisser. Die Analysis für Jünger und Freunde der Mathematik. Querfurt, im Verlage des Verfassers.

Der Herr Verfasser versteht unter „Analysis" einige abgerissene Sätze über Gleichungen, besonders solche ersten und zweiten Grades, über die binomische, die logarithmische, die Exponentialreihe, über Reihen für sinus und cosinus, über höhere arithmetische Reihen und Interpolation. Die Beispiele, welche diesen Notizen beigefügt werden, sind wertvoller als die Darstellung, welche ganz unwissenschaftlich ist. M.

F. Rummer. Lehrbuch der Buchstabenrechnung und der Gleichungen. Mit einer Sammlung von Aufgaben. I. Heidelberg. Winter. No.

E. Suchsland. Systematische Entwickelung der gesammten Algebra. I. Die vier Species. Pr. Stolp.

No.

A. Schwarz. Die Algebra, die Kettenbrüche und die Lehre von den einfachen Reihen. Für den Schulgebrauch bearbeitet. Siegen. Kogler.

Eine kurze, doch alles Notwendige berücksichtigende Zusammenstellung jener Lehren, deren Gesammtheit man in Italien passend als „Algebra complementare“ bezeichnet. Die Gleichungen der drei ersten Grade mit algebraischer und goniometrischer Auflösung, die absteigenden Kettenbrüche sammt ihren einfacheren Anwendungen auf Wurzelausziehung und unbestimmte Analytik, arithmetische und geometrische Reihen erfüllen die drei ersten Abschnitte der kleinen Schrift. Der vierte enthält eine elementare Functionentheorie, Limitenrechnung, Maxima und Minima, soweit sie ohne eigentlichen Infinitesimalcalcul gefunden werden können, endlich Reihenentwickelungen auf Grund der Methode der unbestimmten Coefficienten. Primaner, die in der Mathematik gerne über das eigentliche Schulpensum hinausgehen möchten, werden die Schrift mit Nutzen lesen. Gr.

G. Frizzo. La geometria per le scuole tecniche. Venet., Ateneo. Riv. 1881. 266-269.

G. Frizzo. L'aritmetica per le scuole ginnasialie tecniche. Venet., Ateneo Riv. 1881. 269-270.

Die in dieser italienischen Zeitschrift vorliegenden Recensionen über eine Geometrie für technische Schulen und eine Arithmetik, die gleichfalls für Schüler bestimmt ist, beide Werke von Professor Frizzo, sprechen sich im im Allgemeinen lobend über diese Arbeiten aus. Mz.

A. Skriwan. Das kaufmännische Rechnen. Prag. (Böhmisch).

Eine ausführliche und gründliche Darstellung der genannten Partie der praktischen Arithmetik, welche auf langjähriger Erfahrung des Verfassers basirt erscheint, wobei er namentlich die

Theorie und Praxis des logarithmischen Rechnens den betreffenden Kreisen mundgerecht zu machen bestrebt ist.

Std.

A. Weiler. Leitfaden der mathematischen Geographie für den Unterricht an Mittelschulen, sowie zum Selbststudium. Leipzig. Teubner.

B.

F. J. Studnička. Ueber zusammengesetzte Proportionen. Cas. X. 182. (Böhmisch).

Enthält eine Ergänzung zu des Verfassers Lehrbuch der Algebra in Betreff der Proportion

$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_n}{b} = \frac{1}{m},$$

wobei unter Verwendung der Grösse

$$m = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

die Lösung abgeleitet erscheint:

$$x_k = m^k a.$$

Std.

M. Rusch. Ueber das Kubiren und Kubikwurzelausziehen nach Horner's Methode. Hoppe Arch. LXVII. 291-312.

Auseinandersetzung der Methode zum Zweck der Einführung derselben in den elementaren Unterricht. No.

E. Sang. On equidistant multiples of irrational quantities. Edinb., Proc. X. 2-5.

Enthält praktische Methoden zur Abkürzung der Berechnung bei Reihen von Vielfachen einer gegebenen irrationalen Grösse, so dass man Resultate erhält, die auf eine gegebene Zahl von Decimalstellen correct sind. Cly. (O.).

A. J. Ellis. Postscript to the chronological summary of method of computing logarithms in my paper on the potential radix. Lond., R. S., Proc. XXXII. 377-379.

Cly.

A. J. Ellis. On an improved bimodular method of calculating natural and tabular logarithms and antilogarithms to twelve or sixteen places with very brief tables. Lond. R. S., Proc. XXXI. 381-398.

Bimodulus ist eine Constante, welche der doppelte Modul eines Logarithmen-Systems ist. Die Bimodular-Methode wird aus dem bekannten Satz, hergeleitet, dass, wenn die Differenz zweier Zahlen klein ist, die Differenz ihrer Logarithmen nahezu gleich dem Bimodulus, multiplicirt mit der Differenz und dividirt durch die Summe der Zahlen selbst, ist. Die Verbesserung besteht in der Vorausschickung einer Vorbereitung, welche die Methode allgemein anwendbar macht, in Verbindung mit einer leichten Correction, welche auf der Transformation einer bekannten Reihe beruht, die nach ganzen Potenzen des Quotienten aus der Differenz durch die Summe der Zahlen fortschreitet, wobei die Zahl der Stellen sehr schnell wächst. Angewandt wird die Methode auf die Berechnung des natürlichen und künstlichen Logarithmus einer Zahl auf zwölf Stellen mit Hülfe einer Tafel von zwei Seiten für jede Art der Logarithmen, und auf sechzehn Stellen mit Hülfe einer siebenstelligen Tafel Brigg'scher Logarithmen. Eine äusserst einfache Regel, welche der Verfasser für neu hält, gestattet den Uebergang vom Logarithmus zum Numerus. Cly. (O.).

A. J. Ellis. On the potential radix as a means of calculating logarithms to any required number of decimal places with a summary of all preceding methods chronologically arranged. Lond., R. S., Proc. XXXI. 398-413, XXXII. 377-379.

Bespricht die Vorzüge der Bimodularmethode. Die chronologische Uebersicht bespricht Werke der Bibliothek der Royal Society in London über den Gegenstand. Cly. (O.).

H. P. Udkast til Antilogarithmetabel til Beregning af Logarithmer og Antilogarithmer med indtil 8 cifre. Kjöbenhavn. G. E. C. Gad.

Von den acht Octavseiten dieser kleinen Arbeit enthält die vierte eine achtstellige Antilogarithmentafel der dreiziffrigen Zahlen, nebst ein Paar Hilfsgrössen. Die Tafel beruht aut einem sehr hübschen und, soweit dem Referenten bekannt ist, neuen Gedanken. Während nämlich das gewöhnliche Verfahren zur Berechnung vielstelliger Logarithmen auf die Auflösung einer Zahl in Factoren von der Form $1{,}00\ldots\alpha\beta\gamma\ldots$, wo die Ziffern $\alpha\beta\gamma\ldots$, die nicht Null sind, nur in kleiner Anzahl (1 oder 3) vorhanden sind, hinausläuft, so kommt es hier darauf an, dass $\alpha\beta\gamma\ldots$ eine Zahl bedeutet, deren Logarithmus eine Mantisse hat, für welche nur die zwei ersten Stellen von Null verschieden sind. Mittels zweier Hülfscolonnen, welche gewisse Logarithmen von den Formen $\log\left(1+\frac{1}{a}\right)$ und $\log\left(1+\frac{1}{10a}\right)$ enthalten, ist es dann möglich, achtziffrige Logarithmen und Antilogarithmen mittels weniger Aufschläge in der Tafel und mittels einfacher Additionen zu berechnen. Interpolationen sind sogar überflüssig, und die ganze Rechnung scheint in der Tat auf ein Minimum reducirt zu sein. Die vorliegende Tafel ist eigentlich nur eine Probe, das Princip lässt sich aber wohl auf grosse Tafeln anwenden.

Gm.

C. Bruhns. Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch mit sieben Decimalen. Zweite Stereotyp-Ausgabe. Leipzig. Tauchnitz.

Neue Ausgabe der bereits bekannten Tafel. Die sechs Fehler, welche sich im Laufe der Zeit in der ersten Ausgabe

noch gefunden hatten, sind hier verbessert. Gleichzeitig ist auch eine englische, französische und italienische Ausgabe des Werkes erschienen. O.

C. Bremiker. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen. Mit besonderer Rücksicht auf den Schulgebrauch. Achte Stereotyp-Ausgabe. Berlin. Nicolai.

Neue Ausgabe der bereits hinlänglich bekannten Tafeln, über die schon früher in diesem Jahrbuch berichtet worden ist. Veränderungen sind nicht vorgenommen. O.

W. Jordan. Kreis-Coordinaten für 200 Radien. Leipzig. Teubner.

Die Tafeln geben die Functionswerte $y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$ für 200 Werte von r zwischen 45-10200 und gleichförmig wachsende Coordinaten zwischen 5 und 600. O.

G. B. Halsted. Metrical geometry. An elementary treatise on mensuration. Boston. Ginn a. Heath.

Das Buch enthält eine elementare Theorie der Ausmessung geometrischer Grössen. Es beginnt mit der Ausmessung gerader Strecken, sowohl absolut genommen, als in Dreiecken und ähnlichen Figuren und bringt dann die Rectification des Kreises. Es folgt die Messung des Winkels; alsdann die Bestimmung des Inhaltes ebener Flächen. Hieran schliessen sich die Methoden zur Ausmessung der elementaren stereometrischen Körper, zur Bestimmung ihrer Oberfläche und ihres Volumens. Zuletzt folgen Näherungsmethoden zur Berechnung des Inhaltes beliebiger von krummen Flächen begrenzter Körper. Jedem Abschnitt sind mehrere Uebungsbeispiele hinzugefügt. M.

M. W. Crofton. On symbols of operation. Sylv., Am. J. IV. 269-271.

Zunächst wird bewiesen, dass, wenn φ eine Function D, d. h. $\frac{d}{dx}$ ist,

$$e^{x\varphi(D)}e^{hx} = e^{\lambda x},$$

wo λ eine durch die Gleichung

$$\psi(\lambda) = 1 + \varphi(h)$$

bestimmte Constante ist und die Function ψ definirt wird durch:

$$\psi(x) = \int \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

Ferner wird durch Vergleichung von Lagrange's Theorem mit einem von Herrn Crofton (Lond., M. S. XII. 122, s. diesen Band p. 212) gefundenen Resultat eine bemerkenswerte Identität zwischen gewissen symbolischen Operationen hergeleitet. M.

A. Cayley. On the analytical forms called trees. Sylv., Am. J. IV. 266-268.

Eine Vereinfachung der Resultate, welche Herr Cayley in den früheren Arbeiten: „On the theory of the analytical forms called trees", Phil. Mag. XIII. 1857. p. 172-176 und „On the analytical forms called trees, with applications to the theory of chemical combinations", Rep. Brit. Ass. 1875, 257-305, veröffentlicht hat. Sie betreffen die Anzahl der Wurzelbäume (root-trees) mit N Aesten (knots) und die Anzahl der besonderen Bäume mit N Aesten. Wegen der Terminologie muss auf die genannten Abhandlungen verwiesen werden. M.

G. M. Schultzky. Das Quadrat der Bildung. Berlin. Th. Grieben.

Dem Mathematiker diene zur Mitteilung, dass das 382 Seiten lange Werk Schultzky's, trotzdem es sich den Titel mathematisch-philosophische Erwägungen beilegt, nichts Mathematisches enthält. Vielmehr zeigt der Verfasser an den Stellen, wo die Be-

trachtung sich mathematischer Worte und Formeln bedient, z. B. bei der Berechnung des Bildungsverlaufes Unkenntnis des Zweckes und der Grenzen mathematischer Betrachtungen, und das 16. Capitel, wo der Verfasser es unternimmt, das kopernikanische System zu vervollständigen und zu erweitern, muss geradezu als Hohn auf die mathematische Methode betrachtet werden. Der Verfasser findet unter anderem, dass sich um seine Axe drehen in der Entwickelung der Himmelskörper zum Selbstbewusstsein kommen heisst, dass die Polneigung nichts anderes als ein Pendelschwung des Sterns ist, dass sich in der Atmosphäre das im Himmelskörper vorhandene Selbstvermögen ausspricht, dass die Atmosphäre das Zukunftsbild des Sternes ist, dass schliesslich jeder Himmelskörper zu Atmosphäre, Wärme, Licht werden muss, dass die Kometen die vollendetsten Himmelskörper sind, dass der Himmelskörper sich im letzten Stadium seiner Entwickelung selbst opfert u. s. w. Dabei glaubt der Verfasser, dass seine Theorie auf begründeten Widerspruch nicht stossen werde. Mi.

W. C. Wittwer. Grundzüge der mathematischen Chemie. Schlömilch Z. XXVI. 337-356.

Diese Mitteilung enthält die Fortsetzung der vorjährigen (Schlömilch Z. XXV. 353-374, siehe F. d. M. XII. 1880. 872-873) und zwar die zweite specielle Betrachtung, welche sich auf den Sauerstoff und dessen Verbindungen mit dem Wasserstoff bezieht. Auf den letzten elf Seiten wird das Eis berücksichtigt.

Rs.

Namenregister.



